

4007 1939  
ФРИДРИХ БЛЕЙХ

УСТОЙЧИВОСТЬ  
МЕТАЛЛИЧЕСКИХ  
КОНСТРУКЦИЙ

ФИЗМАТГИЗ • 1939

# BUCKLING STRENGTH OF METAL STRUCTURES

BY

FRIEDRICH BLEICH  
Late Consulting Engineer

With the Collaboration of  
Commander Lyle B. Ramsey, USA

Edited by

HANS H. BLEICH  
Associate Professor of Civil  
Engineering, Columbia University

FIRST EDITION

McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC  
NEW YORK—TORONTO—LONDON  
1952

ФРИДРИХ БЛЕЙХ

# УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Перевод с английского  
Ж. С. СИСЛЯНА  
под редакцией  
Э. И. ГРИГОЛЮКА

Сканировал и обрабатывал  
Лукин А.О.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1959

**APPROVED**

**Фридрих Блейх.**

**Устойчивость металлических конструкций.**

**Редактор И. К. Снитко.**

**Техн. редактор В. Н. Крючкова.**

**Корректор А. С. Бакулова.**

**Сдано в набор 27/V 1959 г. Подписано к печати 2/XI 1959 г. Бумага 60×92/16. Физ. печ. л., 34,00.**

**Условн. печ. л. 34,00.**

**Уч.-изд. л. 35,85.**

**Тираж 5500 экз.**

**T-11035.**

**Цена 19 р. 96 к. Заказ № 459.**

**Государственное издательство физико-математической литературы.**

**Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.**

**Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза,**

**Ленинград, Измайловский пр., 29.**



## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие редактора перевода . . . . .	10
Предисловие редактора . . . . .	13

### Г Л А В А I

#### ВЫПУЧИВАНИЕ ЦЕНТРАЛЬНО ИЛИ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

1. Введение . . . . .	15
2. Упругое выпучивание прямых сжатых стержней . . . . .	18
3. Неупругое выпучивание прямых сжатых стержней . . . . .	22
4. Теория двойного модуля для неупругого выпучивания сжатых стержней . . . . .	24
5. Теория касательного модуля неупругого выпучивания сжатого стержня . . . . .	29
6. Теория неупругого поведения сжатого стержня Шэнли . . . . .	31
7. Кривая критических напряжений сжатых стержней . . . . .	36
8. Влияние касательных напряжений на критические силы . . . . .	38
9. Внецентренно и поперечно нагруженные стержни. Историческая справка . . . . .	40
10. Внецентренно сжатые стержни прямоугольного поперечного сечения. Метод Кармана и Хвалла . . . . .	42
11. Метод Вестергора и Осгуда . . . . .	48
12. Приближенное решение задачи устойчивости . . . . .	50
13. Метод расчета внецентренно сжатых стержней . . . . .	57
14. Влияние формы поперечного сечения на прочность сжатых стержней . . . . .	60
15. Формула секанса . . . . .	61
16. Опыты над внецентренно сжатыми стержнями . . . . .	63
17. Дальнейшее развитие теории внецентренно сжатых стержней . . . . .	66
18. Сжатый стержень как элемент конструкции. Основы расчета сжатых стержней . . . . .	67
19. Коэффициент безопасности . . . . .	71

### Г Л А В А II

#### АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ И КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

20. Введение . . . . .	76
21. Задача о выпучивании, рассматриваемая как задача о собственных значениях . . . . .	77
22. Условия ортогональности . . . . .	80
23. Энергетический метод и теорема о стационарном значении потенциальной энергии . . . . .	84

24. Метод Ритца . . . . .	88
25. Метод Тимошенко решения задач о выпучивании . . . . .	91
26. Дальнейшее развитие метода Ритца . . . . .	93
27. Решение задач о сжатом стержне методом последовательных приближений . . . . .	98
28. Решение задач о выпучивании методом конечных разностей . . . . .	104
29. Введение в вариационное исчисление . . . . .	108
30. Интегралы, содержащие только одну функцию от одного независимого переменного . . . . .	110
31. Интегралы, содержащие несколько функций, зависящих от одного независимого переменного . . . . .	114
32. Интегралы, содержащие функцию от двух независимых переменных . . . . .	115
33. Граничные условия . . . . .	117

### ГЛАВА III

#### ВЫПУЧИВАНИЕ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ, ВСЛЕДСТВИЕ КРУЧЕНИЯ И ИЗГИБА

34. Введение . . . . .	122
35. Потенциальная энергия изгибаемых и закрученных стержней открытого тонкостенного поперечного сечения . . . . .	125
36. Дифференциальные уравнения изгиба и кручения . . . . .	132
37. Сравнение с теорией Гудьера . . . . .	135
38. Характеристики поперечных сечений . . . . .	140
39. Потенциальная энергия центрально сжатых стержней . . . . .	144
40. Дифференциальные уравнения выпучивания . . . . .	149
41. Стержни, в которых центр сдвига совпадает с центром тяжести . . . . .	150
42. Сжатые стержни с одной осью симметрии . . . . .	154
43. Крутильное выпучивание с фиксированной осью вращения . . . . .	161
44. Влияние деформаций стенки на крутильное выпучивание тавровых ребер жесткости . . . . .	165
45. Экспериментальное обоснование теории . . . . .	170

### ГЛАВА IV

#### БОКОВОЕ ВЫПУЧИВАНИЕ БАЛОК

46. Введение . . . . .	173
47. Боковое выпучивание двутавровых балок под действием осевой и поперечной нагрузок . . . . .	178
48. Балка под действием только осевых сил . . . . .	184
49. Балка под действием только поперечных нагрузок . . . . .	185
50. Боковое выпучивание с фиксированным центром вращения; другие уточнения теории . . . . .	189
51. Боковое выпучивание в неупругой области . . . . .	190

### ГЛАВА V

#### СОСТАВНЫЕ СЖАТЫЕ СТЕРЖНИ И СЖАТЫЕ СТЕРЖНИ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

52. Введение . . . . .	193
53. Устойчивость решетчатых сжатых стержней . . . . .	195
54. Рамные стержни . . . . .	201
55. Местная потеря устойчивости составных сжатых стержней . . . . .	206
56. Вторичные напряжения в решетчатых сжатых стержнях . . . . .	210
57. Составные сжатые стержни с переменным моментом инерции . . . . .	213

## ГЛАВА VI УСТОЙЧИВОСТЬ РАМ

58. Введение . . . . .	220
59. Аналитический критерий устойчивости плоских рамных систем. Метод Блейха . . . . .	223
60. Видоизменение аналитического метода, использующего в качестве неизвестных углы поворотов узлов . . . . .	238
61. Численные методы, основанные на принципах метода распределения моментов . . . . .	241
62. Влияние изгибающих моментов в элементах рам на устойчивость . . . . .	250
63. Экспериментальные исследования в области устойчивости рам . . . . .	261

## ГЛАВА VII ЭФФЕКТИВНАЯ ДЛИНА СЖАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ФЕРМ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЖЕСТКИХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

64. Введение . . . . .	263
65. Устойчивость сжатых элементов ферм . . . . .	264
66. Условие устойчивости части фермы, состоящей из трех групп стержней . . . . .	267
67. Выпучивание поясов в плоскости фермы . . . . .	269
68. Фермы с постоянным поперечным сечением сжатого пояса . . . . .	270
69. Пояса неразрезных ферм . . . . .	273
70. Выпучивание элементов решетки . . . . .	275
71. Стойки в полураскосных фермах . . . . .	279
72. Выпучивание прямоугольных жестких рам . . . . .	281
73. Выпучивание однопролетной порталной рамы, шарнирно закрепленной в опорах . . . . .	282
74. Выпучивание однопролетной порталной рамы, заделанной в опорах . . . . .	285
75. Двухэтажная прямоугольная рама, заделанная в опорах (рис. 135) . . . . .	287
76. Многоэтажные прямоугольные рамы . . . . .	291
77. Влияние начальных изгибающих моментов на критическую силу жестких прямоугольных рам . . . . .	298

## ГЛАВА VIII УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ, УПРУГО ОПЕРТЫХ В НЕКОТОРЫХ ТОЧКАХ

78. Введение . . . . .	300
79. Формула Энгессера . . . . .	304
80. Точная теория упруго опертого стержня. Общее решение . . . . .	308
81. Стержень с жестко опертыми концами . . . . .	310
82. Стержень с упруго опертыми концами . . . . .	316
83. Устойчивость поясов при переменных сжимающих силах, пролетах, моментах инерции и жесткостях опор . . . . .	322
84. Влияние кручения на устойчивость сжатых поясов открытых пролетных строений . . . . .	328

## ГЛАВА IX МЕСТНОЕ ВЫПУЧИВАНИЕ ПЛАСТИНЧАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

85. Введение . . . . .	336
86. Основное дифференциальное уравнение задачи о пластинке . . . . .	340
87. Теории устойчивости Ильюшина и Стоуэлла . . . . .	345
88. Общее решение дифференциального уравнения (601) . . . . .	350

89. Случай I: пластинка, свободно опертая по краям $b$ и упруго заделанная по краям $a$ . . . . .	352
90. Случай II: пластинка, свободно опертая на краях $b$ , упруго заделанная на одном краю $a$ и свободная на другом . . . . .	361
91. Критические напряжения и длины полуволн для свободно опертой или полностью защемленной пластинок . . . . .	365
92. Определение значения коэффициента заделки . . . . .	366
93. Определение значения критического напряжения в неупругой области выпучивания . . . . .	379
94. Расчетные формулы для требуемой толщины пластинчатых элементов сжатых стержней . . . . .	381
95. Опыты с выпучиванием пластинок . . . . .	385
96. Выводы и заключительные замечания . . . . .	391

## ГЛАВА X

### ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПЛАСТИНКИ С ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

97. Введение . . . . .	395
98. Свободно опертые пластинки, подкрепленные одним ребром жесткости вдоль осевой линии . . . . .	398
99. Свободно опертые пластинки с двумя равноотстоящими ребрами жесткости . . . . .	408
100. Свободно опертые пластинки с одним эксцентрично расположенным ребром жесткости . . . . .	408
101. Прямоугольные пластинки, упруго опертые на ненагруженных краях . . . . .	412
102. Местное выпучивание плоских и тавровых ребер жесткости . . . . .	417
103. Предельная прочность плоских подкрепленных панелей . . . . .	420

## ГЛАВА XI

### УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕНОК СПЛОШНЫХ БАЛОК

104. Введение . . . . .	424
105. Выпучивание прямоугольных пластинок при сдвиге . . . . .	428
106. Выпучивание стенок при неравномерно распределенных напряжениях . . . . .	437
107. Свободно опертые пластинки под одновременным действием касательных и равномерно распределенных продольных напряжений . . . . .	442
108. Свободно опертые пластинки под совместным действием сдвига и напряжений чистого изгиба . . . . .	446
109. Сводка расчетных формул для стенок сплошных балок . . . . .	447
110. Поперечно подкрепленные стенки при сдвиге . . . . .	451
111. Продольно подкрепленные стенки под действием продольного сжатия . . . . .	457
112. Подкрепленные пластинки при комбинированном действии сдвига и продольного сжатия . . . . .	463
113. Предельная прочность пластинок, подверженных сдвигу . . . . .	464
114. Экспериментальное исследование . . . . .	465

## ГЛАВА XII

### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА ОБШИВКИ КОРАБЛЯ

115. Введение . . . . .	468
116. Прямоугольные пластинки при продольном сжатии, упруго заделанные на нагруженных и свободно опертые на ненагруженных краях . . . . .	469
117. Выпучивание прямоугольных пластинок, защемленных на всех четырех краях . . . . .	477



118. Устойчивость сжатых элементов, имеющих ячеистые поперечные сечения . . . . .	481
119. Влияние соединений внахлестку на устойчивость пластинок . . . .	493
120. Предельная прочность прямоугольных пластинок под действием сжатия и нормального давления. Введение. . . . .	499
121. Основные уравнения теории больших прогибов тонких пластинок .	503
122. Теория Маргерра больших прогибов прямоугольных пластинок под действием продольного сжатия . . . . .	506
123. Результаты теории Маргерра для квадратных пластинок . . . . .	510
124. Результаты теории Маргерра для прямоугольных пластинок . . .	515
125. Теория Маргерра для очень тонких пластинок . . . . .	516
126. Опыты по определению предельной прочности пластинок . . . . .	520
127. Распространение теории Маргерра на пластинки, находящиеся под действием продольного сжатия и нормального давления . . . . .	522
128. Расчет внешней обшивки корпуса корабля . . . . .	526
129. Линеаризированная теория расчета внешней обшивки корпуса корабля . . . . .	531
130. Влияние нормального давления на критическую нагрузку прямоугольных пластинок . . . . .	538
Предметный указатель . . . . .	543

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Монография Фридриха Блейха, изданная на английском языке, содержит исследование устойчивости прямолинейных стержней и плоских тонких прямоугольных пластин в пределах и за пределом упругости. Ф. Блейх, немецкий специалист по теории мостов и стальных сооружений, известен русскому читателю по книгам «Железные мосты» (Трансжелдориздат, 1931) и «Стальные конструкции» (Госстройиздат, 1938).

Отметим основные особенности настоящей книги. Общие вопросы устойчивости центрально и эксцентрично сжатых стержней сплошного сечения рассмотрены в первой и второй главах, при этом для определения критического напряжения за пределами упругости автор рекомендует вернуться к первоначальному варианту теории Энгесера — Консидера (1889 г.) (теория касательного модуля) и описывает модель Ридера — Шэнли (1947 г.)

Для стержня прямоугольного поперечного сечения, шарнирно опертого по краям, эксцентрично сжатого за пределом упругости, описываются методы Кармана (1910 г.), Хвалла (1928 г.), Вестергора — Осгуда (1928 г.). Приведено приближенное решение Ежека (1934 г.) для материала, лишенного упрочнения, обсуждены результаты экспериментов.

Устойчивость тонкостенных стержней открытого профиля с недеформируемым контуром поперечного сечения рассматривается в третьей и четвертой главах. Указывается, что неточность результатов Вагнера (1929 г.), посвященных исследованию крутильной формы потери устойчивости и связанных с концепцией единичного искажения, обусловлена гипотезой о совпадении центра сдвига и центра вращения, и замечается, что впервые это было обнаружено Остенфельдом (1931 г.), получившим ряд точных решений. Отмечается, что общая теория изгиба, кручения и устойчивости полигонального тонкостенного стержня открытого профиля дана Ф. и Г. Блейхами (1936 г.), а для любого профиля — Каппусом (1937 г.). Замечено, что Ландквист и Флитч (1937 г.) определяли положение центра вращения, соответствующее минимуму критической нагрузки.

Для контура произвольного вида, также исходя из гипотезы о недеформируемости контура поперечного сечения, теория интенсивно разрабатывалась Власовым В. З. (1933—1940).

Следующие четыре главы посвящены исследованию устойчивости стержней с перекрестными связями, коробчатых стержней, рам и сжатых элементов ферм.

Некоторые результаты местной потери устойчивости плоских элементов сжатых стержней содержатся в девятой главе. Здесь без вывода приведено уравнение устойчивости Брайяна (1891 г.) для плоской тонкой прямоугольной пластины, дан вывод уравнения устойчивости пластины за пределом упругости в случае несжимаемого материала и активного процесса деформации, исходя из теории малых упруго-пластических деформаций. Это уравнение автор называет уравнением Стоуэлла (1948 г.). Соответствующие результаты, полученные на основе этого уравнения, согласуются с данными экспериментов. Приведены табличные данные для определения толщин, сжатых пластинчатых элементов, исходя из условия местной потери устойчивости при разных вариантах сечений.

Обсуждены как результаты опытов Коллбруннера (1935—1946) по проверке теории устойчивости длинных сжатых прямоугольных пластин в упругой и неупругой областях, так и аналогичные данные Джерарда (1946 г.), использовавшего при обработке экспериментов секущий модуль.

Тонкие упругие сжатые прямоугольные пластины с продольными ребрами при различных вариантах их расстановки исследуются в десятой главе.

В одиннадцатой главе содержатся задачи по устойчивости прямоугольных пластин применительно к балкам-стенкам. Отмечается, что пионерами в области расчета на устойчивость пластин являются Бубнов и Тимошенко. Анализируется решение об устойчивости опертой и защемленной прямоугольной пластины при сдвиге, причем для неупругой области описывается решение Стоуэлла. Разобрана устойчивость прямоугольной пластины при неравномерном распределении осевых напряжений по высоте пластины, при комбинированной нагрузке (сдвиг и сжатие, сдвиг и чистый изгиб). Указаны формулы для определения критических напряжений за пределом упругости.

Последняя глава включает в себя различные задачи. В ней исследована устойчивость прямоугольной пластины при продольном сжатии, упруго-защемленной на нагруженных краях и опертых на ненагруженных, устойчивость прямоугольной пластины с четырьмя защемленными краями при сжатии в обоих направлениях, устойчивость прямоугольной коробки и неразрезной пластины при осевом сжатии. Приведены уравнения конечных прогибов тонкой упругой пластины и дано решение Маргерра (1937 г.) для случая осевого сжатия прямоугольной пластины, края которой свободны поворачиваться относительно опоры и двигаться вдоль опор. При этом считается, что в процессе деформации края пластины остаются прямолинейными. Решение приведено для двух случаев: тонкая пластина и очень тонкая пластина. Рассмотрено одновременное действие

нормального давления и осевого сжатия; обсуждается влияние нормального давления на устойчивость прямоугольной пластины.

Практическая направленность книги несомненна. Доведение обсуждаемых решений до расчетных формул и графиков наряду с ясностью изложения делает книгу интересной инженеру-проектировщику. Сопоставление расчетных и экспериментальных данных позволяет оценить практическую приемлемость результатов расчета. Но, по-видимому, особенно ценно в книге — критическое рассмотрение и оценка обсуждаемых результатов.

Приведенная в книге обширная библиография почти целиком основана на немецких и американских источниках, русская библиография в книге не дана.

В переводе английская система мер заменена на метрическую, что потребовало некоторой переделки графического материала книги.

Книга Ф. Блейха представляет собой полезное дополнение к известной литературе по устойчивости элементов металлоконструкций, она интересна и инженеру, и исследователю.

Москва  
Январь 1959 г.

*Э. И. Григолюк*



## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Настоящая книга представляет собой результат произведенного автором изучения существующей литературы. Однако она не является просто компиляцией материалов, заимствованных из различных источников. В результате критической оценки, позволившей устранить устарелые и ошибочные теории, автор пытался выбрать наиболее полезные и практически применимые методы и объединить их в одно целое, удобное для опубликования. При этом рассматривались, конечно, различные подходы к решению важных задач; однако для большинства второстепенных задач иногда считалось необходимым выбрать один из нескольких равноценных методов; таким образом, книга не претендует на полноту. По необходимости выбор между различными методами в чисто педагогических целях определяется преимуществом использования аналогичных подходов к решению некоторых задач.

Пересматривая многочисленные научные исследования, имеющиеся в литературе, автор часто обнаруживал, что большинство этих исследований не доведено до конца и не может быть использовано для практических расчетов конструкторских бюро главным образом по одной или двум из следующих причин: 1) полученные результаты были слишком сложными для практического использования и не могли быть представлены в виде таблиц или диаграмм вследствие наличия большого числа переменных; 2) довольно часто теоретические исследования рассматривали лишь случаи устойчивости в упругой области, и следовательно, полученные результаты не могли быть применены в неупругой области, в то время как усовершенствованиями методов расчета и с возрастающим использованием высокопрочных сталей эта область приобретает первостепенное значение в строительных и корабельных конструкциях.

Автор считал своим долгом, по мере надобности, исправлять такое положение дел путем упрощения имеющихся теорий с целью сделать их практически полезными, а также приводя многочисленные таблицы или приближенные формулы и, в частности, распространяя теории упругого выпучивания в неупругую область. Для достижения этой цели автору пришлось проделать большую самостоятельную работу, которая впервые публикуется в этой книге.

На протяжении всей книги автор обращал внимание на задачи, часто встречающиеся при проектировании строительных и корабельных конструкций; при этом были приведены таблицы и приближенные формулы в том виде, в котором они могут быть использованы в конструкторском бюро; вообще они применимы не только для стали, но и для легких сплавов, что делает книгу полезной и для авиационных инженеров. Однако в книге не изучаются многочисленные частные задачи, возникающие при проектировании легких самолетных конструкций, в связи с тем, что эти частные задачи рассматривались за пределами этой работы. Кроме того, в некоторых вопросах точка зрения авиационного инженера отличается от точки зрения строительного или корабельного инженера; в таких случаях принималась во внимание точка зрения последних.

Книга предназначена в качестве учебного пособия или для самостоятельного изучения аспирантами и научными работниками, а также может быть использована инженерами практиками, работающими над проектированием строительных конструкций или корпусов кораблей.

*Ганс Г. Блейх*

Нью-Йорк  
Сентябрь 1951 г.

# ГЛАВА I

## ВЫПУЧИВАНИЕ ЦЕНТРАЛЬНО ИЛИ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

### 1. Введение

Ни одна проблема в области изучения сопротивления материалов не имеет такую многообразную историю, как теория выпучивания сжатых элементов металлических конструкций. Даже теперь, несмотря на многочисленные исследования прошлых десятилетий, изыскания в этой специфической области отнюдь не завершены. С начала этого века был достигнут существенный прогресс в теоретическом решении многих сложных задач, но большинство решений все еще не проверены экспериментом так, чтобы можно было включить их в число достоверных научных данных.

Причины затруднений, встречающихся при исследовании задач выпучивания, обусловлены частично особенностями самих задач и частично особенностями материала, из которого выполнены металлические конструкции. Обычно расчет конструкции заключается в определении напряжений, которое основано на молчаливом предположении о существовании между внутренними и внешними силами устойчивого равновесия, т. е. равновесия, при котором любое незначительное изменение условий нагружения в определенных пределах не вызывает чрезмерного увеличения напряжений или непропорциональных упругих искривлений системы. Следовательно, введение в расчет некоторого напряжения, называемого допускаемым напряжением, обеспечивает степень безопасности конструкции. Совершенно под другим углом зрения рассматривается задача о выпучивании, а именно исследование возможного неустойчивого равновесия между внешней нагрузкой и внутренним сопротивлением конструкции. Дополнительным осложнением является тот факт, что явление выпучивания вообще зависит от сложного соотношения напряжений-деформаций рассматриваемого материала, что вызывает большие затруднения как в области теоретических, так и в области экспериментальных исследований.

При оценке прочности сжатых стержней скорее всего рассматривается вопрос о предотвращении возможности появления особого

состояния неустойчивого равновесия, чем вопрос, как избежать, исходя из соответствующего запаса, определенного напряжения в конструкции или в одной из ее частей. Это состояние характеризуется несоразмерно большими, неопределенными по величине приростами деформаций и напряжений при незначительном возрастании нагрузок. В этом более или менее внезапном преодолении внутреннего сопротивления и заключается характерная особенность явления выпучивания независимо от того, превзойден ли в момент потери устойчивости предел упругости. Следовательно, задачу о выпучивании металлических конструкций нужно рассматривать как задачу устойчивости. Главная причина ошибок и неудачных попыток исследователей XIX века заключалась в недостаточном понимании этого факта; они тщетно пытались определить прочность сжатых стержней рассмотрением изгибных напряжений в условии устойчивого равновесия. Существование этой точки зрения задержало решение задачи о прочности сжатых стержней, хотя Эйлер<sup>1)</sup>, который впервые занимался этой проблемой, указал действительный характер этой задачи и правильный путь ее теоретического решения. Заключение Эйлера были подтверждены и обобщены Лагранжем (1770 г.), который дал более строгий анализ этой проблемы.

Непригодность формулы Эйлера в случае коротких стержней и стержней средней длины являлась первоначальной причиной для почти полного отказа от нее и от тех обоснований, из которых она вытекала. Недостаточно ясно осознавался тот факт, что наблюдаемые расхождения являлись результатом того, что перед выпучиванием был превзойден предел упругости. Это обстоятельство, конечно, не учитывалось теорией Эйлера в первоначальной форме.

В третьей главе своей книги «Стержни» Салмон<sup>2)</sup> дает яркое представление о той путанице, которая в течение века господствовала во всех попытках примирить теорию Эйлера с фактами, наблюдаемыми при испытании сжатых стержней. Только в 1845 г. бельгийский исследователь Е. Ламарль установил, что предел упругости является пределом для применения формулы Эйлера. Однако и он не имел ясного представления о поведении сжатых стержней, нагруженных перед выпучиванием за пределом упругости. Приводим цитату из Салмона:

«Он (Ламарль) показал, что если идеальный сжатый стержень изгибается, то материал в наиболее напряженном волокне сразу переходит предел упругости. Таким образом, предельную нагрузку Эйлера можно рассматривать не только как нагрузку, соответствующую возникновению прогиба, но и как разрушающую нагрузку для образца. Кроме того, если упругая предельная нагрузка меньше

<sup>1)</sup> Euler Leonhard, De curvis elasticis, Lausanne and Geneva, 1744. Формула Эйлера получена позднее в работе «Sur la force des colonnes», опубликованной в 1759 г. в Mémoires de l'Académie de Berlin.

<sup>2)</sup> Salmon E. H., Columns, Oxford Technical Publications, London, 1921,



эйлеровой, то идеальный стержень разрушается скорее от чистого сжатия, чем от изгиба. Это условие определяет то значение  $l/r$ , меньше которого формула Эйлера неприменима».

Лишь в 1889 г. Консидер во Франции и Энгессер в Германии независимо друг от друга установили полную применимость формулы Эйлера, хотя и в обобщенном виде <sup>1)</sup>. Энгессер <sup>2)</sup> в 1895 г. опубликовал свою теорию двойного модуля. Однако его теоретические исследования не привлекли большого внимания до тех пор, пока Карман <sup>3)</sup> не провел серию тщательно поставленных опытов с целью доказать правильность предположений Энгессера. Важность работ Энгессера и Кармана заключается прежде всего в том, что было найдено общее решение задачи о сжатом стержне, рассматриваемой как задача устойчивости, учитывающая упругие и пластические свойства материала стержня. Кроме того, теория Энгессера и опыты Кармана заложили основу для теоретического исследования всевозможных задач в области выпучивания.

Очевидно, что для практического применения результатов вышеупомянутых теоретических исследований необходимо определить численные значения некоторых эмпирических данных. Эти числовые данные могут быть представлены формулой, полученной в результате проведения тщательно поставленных опытов на центрально сжатых стержнях или из диаграммы зависимости между напряжением и деформацией материала при сжатии. Таким образом, исходя из теоретических рассуждений Энгессера и Кармана и используя формулу для сжатого стержня (или же таблицу или диаграмму, основанную на этой формуле, правильно выражающую те эмпирические данные, которые характеризуют материал), можно уже сейчас рассматривать и успешно решать даже теоретически трудные задачи в упругой и неупругой областях выпучивания. С этой точки зрения концепция Консидера и Энгессера, а также экспериментальные исследования Кармана можно расценивать как важные вехи в истории решения задачи об устойчивости.

Теоретически всякая упругая система при определенных условиях нагружения может перейти в неустойчивое состояние равновесия. Так как модуль упругости металлических конструкций велик по сравнению с пределом упругости, то возможно, что эти элементы становятся неустойчивыми в упругой области только при значительных упругих деформациях. Это имеет место, когда по крайней

---

<sup>1)</sup> Considère A., Résistance des pièces comprimées, Congrès international de procédés de construction, 1889, Engesser F., Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, 1889, стр. 455.

<sup>2)</sup> Engesser F., Schweizerische Bauzeitung, т. 26, стр. 24, 1895.

<sup>3)</sup> Von Kármán T., Die Knickfestigkeit gerader Stäbe, Physikalische Zeitschrift, т. 9, стр. 136, 1908; Untersuchungen über Knickfestigkeit, Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, No. 81, Berlin, 1910.

мере один или два размера сжатого элемента являются малыми по сравнению с третьим размером, как, например, в случае гибких стержней или тонких пластинок и оболочек. Однако вследствие быстрого уменьшения модуля упругости при переходе через предел упругости диапазон нагрузок, при которых может возникнуть неустойчивое состояние при обычных условиях нагружения, значительно расширяется. Частичное нарушение внутренней структуры материала после перехода предела упругости ускоряет начало критического состояния выпучивания. Этот факт объясняет то важное положение, которое занимают проблемы устойчивости при расчете металлических конструкций.

После краткого введения и некоторых исторических справок в следующем параграфе на примере выпучивания тонкого гибкого сжатого стержня исследуются сущность и природа явления выпучивания. В §§ 3—6 рассматривается явление неустойчивости сжатых стержней, разрушающихся за пределом упругости.

## 2. Упругое выпучивание прямых сжатых стержней

Рассмотрим первоначально прямой идеально упругий гибкий стержень постоянного поперечного сечения под действием продольной сжимающей силы  $P$ , приложенной вдоль ее центральной оси (рис. 1). Пусть на сжатый стержень действует также поперечная нагрузка, которая вызывает момент  $m_x$  в точке  $x$ . Полный изгибающий момент в точке  $x$  будет

$$M_x = Py + m_x.$$

Пусть плоскость изгиба совпадает с плоскостью минимального момента инерции  $J$  поперечного сечения стержня. Предполагая, что прогибы  $y$  малы, дифференциальное уравнение упругой линии деформированного стержня запишем в следующем виде:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} + Py + m_x = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь случай свободно опертого сжатого стержня (свободно вращающегося на концах), причем  $m_x$  вызван малой сосредоточенной поперечной нагрузкой  $Q$ , действующей в середине стержня. Выражение

$$y = \frac{m_x}{P} \left( \frac{\sin \alpha x}{\alpha x \cos \frac{\alpha l}{2}} - 1 \right) \quad (2)$$

Рис. 1.

будет решением уравнения (1), годным для верхней половины стержня ( $0 \leq x \leq l/2$ ), где  $m_x = Qx/2$  и  $\alpha = \sqrt{P/EJ}$ . Решение (2) удовлетворяет уравнению (1) до тех пор, пока возмущающий

момент не равен нулю. Для малых значений  $P$  множитель  $\cos \frac{\alpha l}{2}$  в уравнении (2) мало отличается от единицы, но когда  $P$  (а следовательно, и  $\alpha$ ) увеличивается, то значение дроби в выражении (2) быстро возрастает, когда  $\frac{\alpha l}{2}$  стремится к  $\frac{\pi}{2}$ . Таким образом,  $y$  монотонно возрастает и становится неограниченным, когда  $\alpha l$  приближается к  $\pi$ , при этом стержень выпучивается. Из условия  $\alpha l = l\sqrt{P/EJ} = \pi$  получим формулу Эйлера для верхней границы  $P_E$  критической силы

$$P_E = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (3)$$

Чем меньше момент  $m_x$ , тем ближе нагрузка  $P$ , при которой стержень выпучивается к эйлеровой силе  $P_E$ .

Рассмотрим теперь случай, когда момент  $m_x$  стремится к нулю. При этом уравнение (1) сводится к однородному дифференциальному уравнению, имеющему нулевое решение для любого значения  $P$ , а стержень остается прямым. Наряду с этим тривиальным решением однородного дифференциального уравнения существует система так называемых характеристических решений

$$y = C \sin n \frac{\pi x}{l}, \quad (4)$$

соответствующих характеристическим значениям  $P = n^2 \pi^2 EJ / l^2$ , где  $n$  — целое число, а  $C$  — произвольная постоянная. Из этих решений только решение при  $n=1$ , т. е. когда  $P = P_E$ , и решение  $P=0$  имеют определенный смысл, так как формы выпучивания сжатого стержня, соответствующие другим значениям  $n$ , могут иметь место только при некоторых искусственных условиях, не подлежащих рассмотрению. Когда  $m_x$  отсутствует, стержень остается прямым при любом значении  $P < P_E$ ; в случае же, когда  $P = P_E$ , он изгибается по синусоидальной кривой неопределенной амплитуды  $C$ . Таким образом, эйлерову силу  $P_E$  можно определить как наименьшую силу, способную сохранить стержень в слегка изогнутой форме.

Резюмируя, мы можем утверждать, что центрально сжатый, идеально прямой стержень ведет себя следующим образом. Стержень остается прямым, пока на него действует нагрузка  $P$  меньше критической силы  $P_E$ . При добавлении момента  $m_x$  она изгибается и величина прогиба определяется уравнением (2). При устранении момента  $m_x$  стержень возвращается к своей первоначальной прямолинейной форме. Внешние и внутренние силы находятся в устойчивом равновесии. При отсутствии поперечной нагрузки отклоненное состояние стержня, описываемое синусоидальной кривой, неопределенной амплитуды возможно, когда  $P$  равняется  $P_E$ , но достаточен некоторый малый возмущающий момент, чтобы вызвать бесконечно большие прогибы стержня, который уже больше не возвратится к первоначальному положению при устранении возмущающего мо-

мента. Это и есть случай неустойчивого равновесия между внутренними и внешними силами. Таким образом, критическая сила  $P_E$  определяет состояние неустойчивости в поведении сжатого стержня.

Эти замечательные выводы тем не менее частично являются результатом математической идеализации, так как дифференциальное уравнение (1), из которого вытекают предыдущие заключения, лишь приблизительно описывает поведение деформированного стержня. Выпишем точное уравнение упругой кривой стержня:

$$\frac{EJ}{\rho} = -M_x,$$

где  $\rho$  есть радиус кривизны искривленной оси стержня. Значение  $y_m$  прогиба в середине сжатого стержня, когда поперечная нагрузка равна нулю, принимает тогда следующую, более точную форму:

$$y_m = \frac{2l}{\pi} \sqrt{\frac{P_E}{P}} \left( \sqrt{\frac{P}{P_E}} - 1 \right), \quad (5)$$

где  $P$  и  $P_E$  имеют тот же смысл, что и раньше.<sup>1)</sup>

Пока  $P < P_E$ , прогиб  $y_m$  является мнимым; изгиба не происходит, и стержень остается прямым. Даже тогда, когда  $P = P_E$ , то  $y_m = 0$ , и стержень не искривляется. Прогиб определенной величины имеет место только тогда, когда  $P > P_E$ . Однако, как легко видеть, достаточно незначительное превышение  $P$  над  $P_E$ , чтобы вызвать заметный прогиб. Несмотря на то, что значение  $P_E$  превзойдено мало, возникающие прогибы являются опасными.

Например, при  $P/P_E = 1,001$  получим  $y_m = 0,0142l$ . Для стержня с  $l/r = 120$  и  $c/r = 2$  (где  $c$  — расстояние крайнего волокна от оси стержня) максимальное напряжение в крайнем волокне будет  $\sigma = 3,41P_E/A$  (через  $A$  обозначена площадь поперечного сечения). Таким образом, достаточно превзойти критическую силу  $P_E$  на 1/1000 ее величины, чтобы напряжение в крайнем волокне превысило критическое  $P_E$  в 3,41 раза. Но такое напряжение мягкие стали могут не воспринять. Следовательно, сжатый стержень выйдет из строя до достижения этой нагрузки.

Аналогично можно показать, что когда  $P = P_E$ , стержень может воспринять лишь небольшой возмущающий момент; в этом случае он становится очень чувствительным к возмущениям, реагируя на них конечными, но очень большими прогибами.

Следовательно, практически результаты более точного исследования не отличаются от ранее полученных. После того как эйлера критическая сила достигнута, поведение сжатого стержня становится неопределенным и очень малые приращения этой нагрузки или малейшие возмущения вызывают потери устойчивости. Точное

<sup>1)</sup> Grashof F., Theorie der Elasticität und Festigkeit, 2-изд., стр. 168, Berlin, 1878.



исследование только показывает, что между  $P_E$  и действительной нагрузкой, которая вызывает некоторый конечный прогиб, существует узкая переходная область, в которой устраняется любой неестественный разрыв непрерывности в поведении сжатого стержня вблизи критического состояния. В ранее приведенных формулах эта переходная область вследствие пренебрежения некоторыми слагаемыми высшего порядка в основном уравнении стягивается к точке разрыва непрерывности. Нам важно определить критическую силу  $P_E$ , при которой поведение сжатого стержня изменяется более или менее резко. Точнее, мы хотим определить условия, при которых начинается процесс выпучивания, но не заинтересованы процессом самого выпучивания. Для упрощения исследования мы предполагаем, что стержень выпучивается внезапно. Таким образом, мы можем исходить из линейного дифференциального уравнения

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = 0, \quad (6)$$

которое является точным для предельного случая бесконечно малых прогибов  $y$ . Этот факт объясняет, почему уравнение (6) и более точное уравнение

$$\frac{EJ}{\rho} + Py = 0$$

дают то же самое значение  $P_E$  для критической силы.

Вышеприведенные рассуждения определяют критерий неустойчивости (выпучивания), который можно сформулировать следующим образом: при достижении критической силы  $P_E$  возможны две формы равновесия стержня: прямолинейная форма и бесконечно близкая к ней криволинейная. Мы будем говорить о «бифуркации состояния равновесия» и рассмотрим эту бифуркацию в качестве критерия неустойчивости.

Разделив уравнение (3) на площадь поперечного сечения и подставляя вместо момента инерции  $J$  его значение  $Ar^2$ , где  $r$  — радиус инерции сечения, мы можем написать его в следующей форме:

$$\frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 E}{(l/r)^2}, \quad (7)$$

где  $l/r$  является гибкостью стержня.

Формула Эйлера (3), а следовательно, и уравнение (7) получены нами при молчаливом допущении, что модуль упругости  $E$  постоянен. Поэтому уравнение (7) верно только тогда, когда модуль  $E$  не меняется до выпучивания, т. е. оно верно, пока значение  $P_E/A$  остается ниже предела упругости. Это условие ограничивает применимость уравнения (7) в так называемой упругой области выпучивания. Уравнение (7) справедливо для гибкостей, превосходящих некоторое предельное значение, которое зависит от свойств материала стержня. Интересно, что прошло целое столетие, от Эйлера до Ламарля, пока был установлен этот фундаментальный факт.

До сих пор мы рассматривали сжатые стержни, свободно опертые на концах; стержни сжатые, упруго заделанные или защемленные ведут себя аналогичным образом, так что предыдущие выводы можно распространить на более общие случаи. Мы можем написать уравнение (7) в обобщенной форме, обозначая  $P_{кр}/A$  ( $P_{кр}$  — критическая сила или нагрузка выпучивания) через  $\sigma_{кр}$  (критическое напряжение):

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{(kl/r)^2}, \quad (8)$$

где безразмерный коэффициент  $k$  учитывает влияние концевых условий на критическую силу. Величина  $kl$  называется «приведенной длиной» или «свободной длиной» стержня.

В дальнейшем случай  $k=1$  будем считать как основной случай выпучивания, а соответствующее критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  будем обозначать через  $\sigma_E$ .

Конечно, значение критической силы  $P_E$ , определяемое из формулы Эйлера (3), не может быть достигнуто в действительных условиях, так как не существует идеально прямых стержней, а нагрузки нельзя приложить точно по оси, как это предполагается в теории. Тем не менее, в тщательно поставленных опытах на малых образцах, где возмущающие моменты устранены, наблюдаемые значения критической силы так близки к теоретическому значению  $P_E$ , что ошибка, полученная из эксперимента, в действительности является незначительной.

### 3. Неупругое выпучивание прямых сжатых стержней

Соображения, приведенные в предыдущем параграфе, основывались на предположении, что критические напряжения, т. е. равномерно распределенные по сечению сжимающие напряжения, не достигают предела упругости в момент, когда равновесие становится неустойчивым. Однако это предположение верно только для гибких стержней. В коротких сжатых стержнях до начала выпучивания напряжения превосходят предел упругости, и модуль упругости  $E$ , до этого постоянный, становится функцией критического напряжения  $\sigma_{кр} = P_{кр}/A$ .

Консидер и Энгессер впервые указали на возможность использования формулы Эйлера в неупругой области выпучивания введением переменного модуля упругости. Энгессер<sup>1)</sup> дал свою теорию касательного модуля в 1889 г. Почти в то же время Консидер<sup>2)</sup> в своей лекции, прочитанной на международном конгрессе в Па-

<sup>1)</sup> Engesser F., Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesens, 1889, стр. 455.

<sup>2)</sup> Considère A., Résistance des pièces comprimées, Congrès International des procédés de construction, т. 3, стр. 371, Paris, 1891.

риже, предсказал, что прочность сжатого стержня в случае неупругого выпучивания можно определить обобщенной формулой Эйлера  $\pi^2 \bar{E} J / l^2$ , где значение переменного модуля  $\bar{E}$  лежит между модулем Юнга и касательным модулем. Несмотря на то, что Консидером не была дана теория для определения действительного значения  $\bar{E}$ , тем не менее он уже понимал, что когда центрально нагруженный за пределом упругости стержень изгибается, то напряжения на вогнутой стороне возрастают согласно диаграмме сжатия, в то время как напряжения на выпуклой стороне уменьшаются пропорционально соответствующей деформации<sup>1)</sup>. Позже Энгессер подтвердил идею Консидера и в 1895 г. дал усовершенствованное решение задачи о выпучивании стержня в неупругой области, а именно теорию двойного модуля<sup>2)</sup>.

Прогресса в решении этой задачи не было до 1908 г., пока Карман<sup>3)</sup> не занялся вопросом поведения сжатых стержней в неупругой области. Он обновил теорию Энгессера, основываясь на результатах опытов, проведенных Мейером<sup>4)</sup>, который показал, что основы обычной теории изгиба (см. допущения 2 и 3 в § 4) имеют силу и тогда, когда изгибные напряжения превосходят предел упругости. В 1910 г. Карман обосновал теорию серией тщательно поставленных опытов на малых образцах прямоугольного поперечного сечения.

Интересно отметить, что Саутуелл в 1912 г., по-видимому, независимо от Энгессера и Кармана, дал теорию двойного модуля в своей статье «Прочность стоек»<sup>5)</sup>.

С тех пор теория двойного модуля считалась теорией, верно описывающей поведение сжатых стержней в неупругой области. Однако в последнее время выдвигались некоторые сомнения относительно правильности концепции двойного модуля. Данные экспериментов, сделанных над образцами с различными поперечными сечениями, показывают, что действительные значения критических сил лежат между значениями, рассчитанными по теории касательного модуля Энгессера, и значениями, полученными из теории двойного модуля, однако обычно они лежат ближе к касательно-модульной нагрузке. В недавно опубликованной статье Шэнли<sup>6)</sup> указал на необходимость пересмотра теории двойного модуля и

---

1) Osgood W. R., The Double — modulus Theory of Column Action, Civil Eng., т. 5, стр. 173, 1935.

2) Энгессер, цит. выше, стр. 17.

3) Карман, цит. выше, стр. 17.

4) Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, т. 52, 1908.

5) Southwell R. V., The Strength of Struts, Engineering, т. 94, стр. 249, 1912.

6) Shanley F. R., Inelastic Column Theory, Journ. Aeronaut. Sci., 1947, стр. 261; русский перевод: Шэнли, сб. «Механика», 1951, № 2, стр. 88.

выдвинул новые концепции, которые позволяют правильно оценить первоначальную теорию касательного модуля Энгессера.

Ниже будут изложены теории двойного модуля и ранняя теория касательного модуля Энгессера, а в свете усовершенствованной теории Шэнли будет обсуждено значение обеих теорий для действительной зависимости между кривой напряжения — деформации и критической силой сжатого стержня.

#### 4. Теория двойного модуля для неупругого выпучивания сжатых стержней<sup>1)</sup>

пропорционально  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_t$ , как легко видеть из рис. 3. Здесь  $E_t$  есть касательный модуль диаграммы напряжений-деформаций материала при напряжении  $\sigma$ . С другой стороны прямой  $n-n$  произойдет уменьшение продольных напряжений, вызванное наложением изгибных напряжений в связи с изменением знака деформации; так как при этом освобождается только упругая часть деформации, то здесь имеет место закон пропорциональности напряжения и деформации при постоянном модуле  $E$ . Эпюра напряжений на выпуклой стороне ограничена линией  $NA'$  (рис. 2) с угловым коэффициентом, отличным от углового коэффициента линии  $NB'$ .

Используя обозначения, показанные на рис. 2, из условия равновесия между внутренними напряжениями и внешней нагрузкой мы получим:

$$\int_0^{h_1} s_1 dA - \int_0^{h_2} s_2 dA = 0 \quad (9a)$$

и

$$\begin{aligned} & \int_0^{h_1} s_1 (z_1 + e) dA + \\ & + \int_0^{h_2} s_2 (z_2 - e) dA = P_y. \end{aligned} \quad (9b)$$

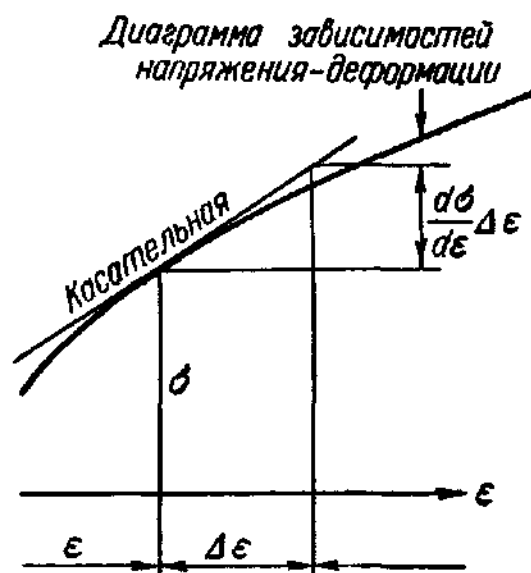


Рис. 3.

Прогиб  $y$  отсчитывается от центральной оси стержня. Из рис. 2 находим:

$$s_1 = \frac{\sigma_1}{h_1} z_1 \quad \text{и} \quad s_2 = \frac{\sigma_2}{h_2} z_2.$$

Из рис. 4, на котором показан относительный поворот двух бесконечно близких поперечных сечений, очевидно, что  $\Delta dx = h_1 d\varphi$ , и так как  $\Delta dx = \frac{\sigma_1 dx}{E}$ , то мы имеем  $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sigma_1}{Eh_1}$  и аналогичным образом получим  $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sigma_2}{E_t h_2}$ . Поскольку при малых деформациях  $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ , то окончательно имеем:

$$\sigma_1 = Eh_1 \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{и} \quad \sigma_2 = E_t h_2 \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Следовательно, условие (9a) запишется в виде

$$E \frac{d^2 y}{dx^2} \int_0^{h_1} z_1 dA - E_t \frac{d^2 y}{dx^2} \int_0^{h_2} z_2 dA = 0$$

или

$$ES_1 - E_t S_2 = 0, \quad (10)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  обозначают статические моменты относительно оси  $n-n$  площадей поперечного сечения, находящихся по левую и правую стороны от этой оси. Это уравнение и соотношение  $h_1 + h_2 = h$  определяют положение оси  $n-n$ .

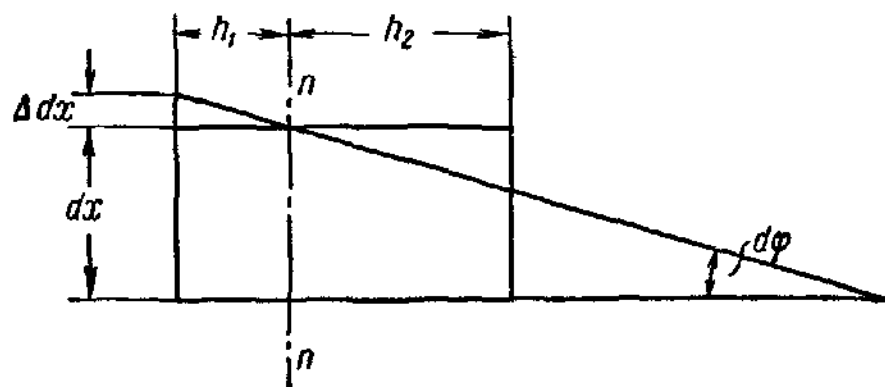


Рис. 4.

Из второго условия (9b) получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \left( E \int_0^{h_1} z_1^2 dA + E_t \int_0^{h_2} z_2^2 dA \right) + e \frac{d^2 y}{dx^2} \left( E \int_0^{h_1} z_1 dA - E_t \int_0^{h_2} z_2 dA \right) = Py.$$

Второе слагаемое в силу уравнения (10) равно нулю, и в результате имеем:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} (EJ_1 + E_t J_2) = Py,$$

где через  $J_1$  и  $J_2$  обозначены моменты инерции относительно оси  $n-n$  площадей, разделенных этой осью. Вводя

$$\bar{E}J = EJ_1 + E_t J_2, \quad (11)$$

окончательно получим:

$$\bar{E}J \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = 0, \quad (12)$$

где

$$\bar{E} = E \frac{J_1}{J} + \frac{J_2}{J} E_t. \quad (13)$$

Здесь  $J$  обозначает момент инерции поперечного сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести  $C$  (рис. 2).

Уравнение (12) является дифференциальным уравнением упругой линии стержня в состоянии неустойчивого равновесия. Величина  $\bar{E}$  называется «эффективным модулем» или «приведенным модулем». Его значение зависит от формы поперечного сечения и свойств

материала стержня. Для любого заданного поперечного сечения значение  $\bar{E}$  может быть определено с помощью уравнений (10) и (13) и из диаграммы напряжения-деформации как функция критического напряжения  $\sigma = P/A$ .

Дифференциальное уравнение (12) имеет тот же вид, что и дифференциальное уравнение (6) для упругой линии идеально упругих сжатых стержней при неустойчивом равновесии, где  $\bar{E}$ , так же как и  $E$ , не зависят от абсциссы  $x$ . Таким образом, мы установили важный факт, согласно которому дифференциальное уравнение деформированной центральной оси при неустойчивом равновесии [уравнение (12)] пригодно как в упругой, так и в неупругой областях. В неупругой области  $\bar{E}$  является переменной величиной, зависящей от напряжения  $\sigma = \frac{P}{A}$ , в то время как в упругой области  $\bar{E}$  равняется  $E$ .

Кроме того, при рассмотрении центрально сжатого свободно опертого стержня решение

$$y = C \sin n \frac{\pi x}{l},$$

как и в § 2, можно применить и в случае отсутствия возмущающего момента. Однако это решение пригодно только при значениях

$$P = n^2 \pi^2 \frac{\bar{E} J}{l^2}.$$

При  $n=1$  мы получаем, согласно теории приведенного модуля, наименьшее значение критической силы  $P_r$ :

$$P_r = \pi^2 \frac{\bar{E} J}{l^2}. \quad (14)$$

Это есть обобщенный вид формулы Эйлера.

Обозначая для удобства отношение  $\bar{E}/E = \tau_r$ , основные уравнения можно написать в следующем виде:

$$E J \tau_r \frac{d^2 y}{dx^2} + P y = 0, \quad (15)$$

$$\tau_r = \frac{J_1}{J} + \frac{E_t}{E} \frac{J_2}{J}, \quad (16)$$

$$\sigma_r = \frac{P_r}{A} = \frac{\pi^2 E \tau_r}{(l/r)^2}. \quad (17)$$

Влияние формы поперечного сечения на  $\tau_r$ , а следовательно, и на критическое напряжение  $\sigma_r$  для некоторого частного материала показано на рис. 5. Значения  $\tau_r$  и  $E_t/E$  изображены как функции  $\sigma_r = P_r/A$  для двух различных форм поперечного сечения. На рис. 5

показаны диаграмма напряжений-деформаций для стали с пределом упругости  $2060 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$  и пределом текучести  $2640 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$  и кривые значений  $\tau_r$  для крестообразных и Н-образных поперечных сечений при выпучивании последних в плоскости стенки. Расхождение кривых становится существенным при приближении к пределу текучести<sup>1)</sup>. Влияние формы поперечного сечения сильнее сказывается с увеличением  $\sigma_r$ , т. е. с уменьшением гибкости.

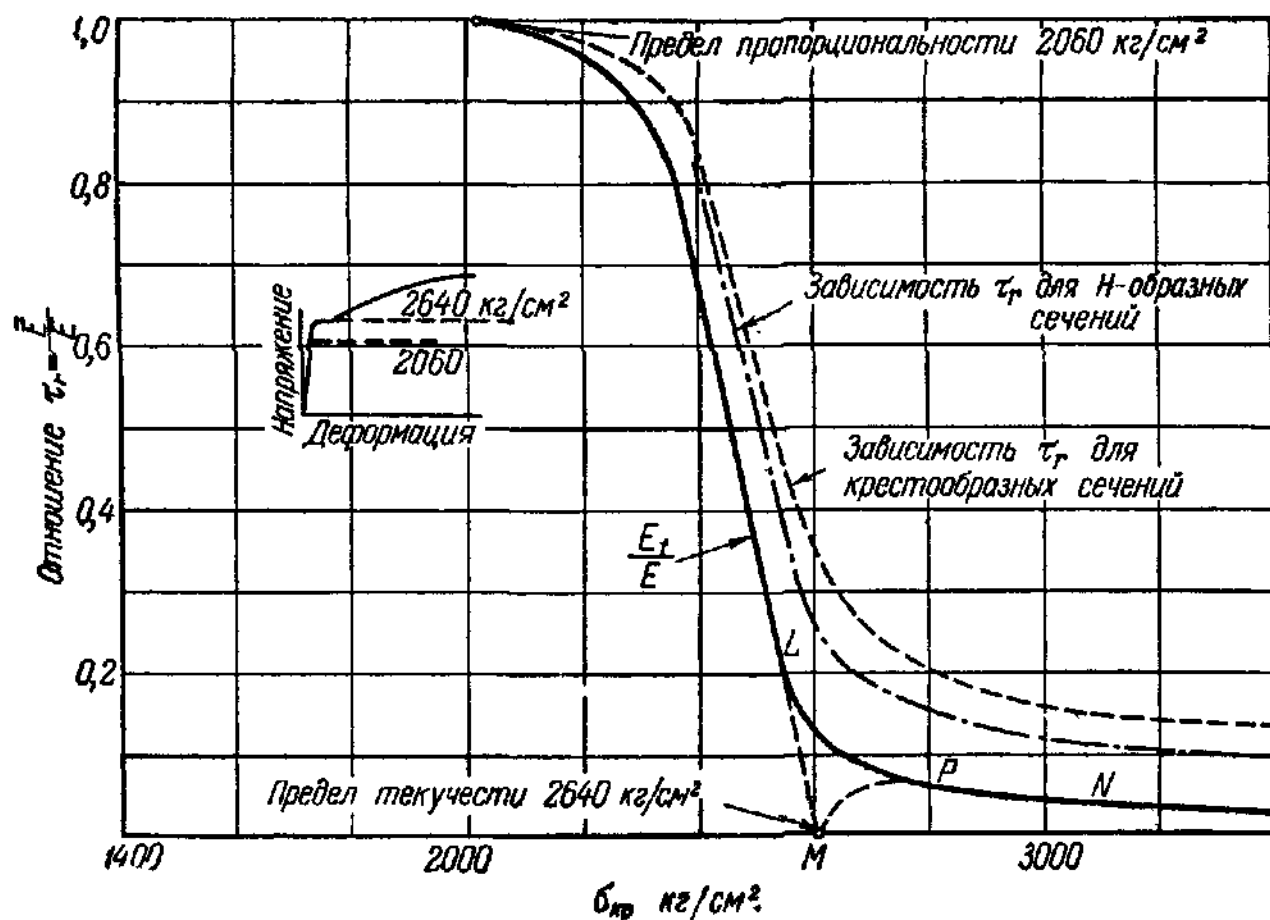


Рис. 5.

Важно отметить, что в случае поперечных сечений, имеющих одну ось симметрии, лежащей в плоскости выпучивания, значение  $\tau_r$  меняется в зависимости от направления выпучивания. Например, для таврового сечения значение  $\tau_r$  при выпучивании в сторону полки меньше, чем при выпучивании в обратном направлении. Поэтому, если нагрузка центрирована достаточно точно, то сжатый стержень выпучивается в направлении от середины высоты стенки к центру тяжести поперечного сечения. Причина такого поведения

<sup>1)</sup> В окрестности предела текучести действительная кривая значений  $E_t/E$ , построенная на основе диаграммы зависимостей между напряжением и деформацией, будет  $L-M-P$ . Эта часть кривой  $E_t/E$  заменена непрерывной кривой  $L-P-N$ . Объяснение этого будет дано в § 7.



состоит в том, что возможны два условия равновесия изогнутого стержня в зависимости от того, лежит ли ось  $n-n$  среднего напряжения справа или слева от центра тяжести поперечного сечения.

### 5. Теория касательного модуля неупругого выпучивания сжатого стержня

Первоначальная теория Энгессера выпучивания за пределом упругости основывалась на предположении, согласно которому при некотором критическом напряжении  $\sigma_t = P_t/A$  возможна изогнутая форма неустойчивого равновесия и деформация зависит только от касательного модуля  $E_t = \frac{d\sigma}{d\epsilon}$ , соответствующего критическому напряжению  $\sigma_t$ . Следовательно, предполагалось, что на выпуклой стороне изгибаемого стержня, когда он от прямолинейной формы переходит в смежную деформированную форму, не имеет место изменение знака деформации. Признание неправильности этого предположения привело к преждевременному отказу от теории Энгессера. Однако теперь эта теория снова нашла применение. Рассмотрим всевозможные деформированные состояния равновесия первоначально прямого сжатого стержня под действием нагрузки  $P$ ; рассматривая историю нагружения сжатого стержня независимо от того, имеет ли место изменение знака деформации или нет, мы должны применить или теорию двойного модуля, или теорию касательного модуля. Таким же образом, как и в случае упругого выпучивания, где изогнутое состояние стержня невозможно при  $P \leq P_E$ , мы можем заключить, что изогнутое состояние невозможно при  $P \leq P_r$  или  $P \leq P_t$  в зависимости от того, имеет ли место изменение знака деформации или нет. Ниже мы увидим, что  $P_t < P_r$ . Значит, касательно-модульная нагрузка  $P_t$  есть максимальная нагрузка, под действием которой первоначально прямой сжатый стержень будет обязательно оставаться прямым. Этот факт является исходным пунктом теории Шэнли, которую мы рассмотрим в следующем параграфе.

Предполагая, что касательный модуль  $E_t$  применим для всего поперечного сечения, дифференциальное уравнение изогнутой оси можно написать в следующем виде:

$$E_t J \frac{d^2 y}{dx^2} + P y = 0$$

и, вводя обозначение

$$\tau = \frac{E_t}{E}, \quad (18)$$

получить

$$E J \tau \frac{d^2 y}{dx^2} + P y = 0. \quad (19)$$

Следовательно, критическая сила  $P_t$  определяется при помощи соотношения

$$\sigma_t = \frac{P_t}{A} = \frac{\pi^2 E \tau}{(l/r)^2}. \quad (20)$$

Так как в уравнении (11)  $J_1 + J_2 > J$  ( $J_1$  и  $J_2$  относятся к оси  $n-n$ , проходящей вне центра тяжести) и  $E > E_t$ , то мы заключаем, что  $\tau = E_t/E$  меньше значения  $\tau_r$ , полученного из уравнения (16). Следовательно, теория касательного модуля дает более низкие значения критической силы, чем теория двойного модуля. В теории касательного модуля  $\tau$  и, следовательно,  $P_t$  не зависят от формы поперечного сечения стержня и определяются только упруго-пластическими свойствами материала.

Подставляя значения коэффициента  $\tau_r$  для Н-образных сечений, указанные на рис. 5, и соответствующие значения напряжения  $\sigma_r$  в уравнение (17) и решая относительно  $l/r$ , получим ряд значений  $l/r$ , соответствующих значениям напряжения  $\sigma_r$ . Результат вычисления

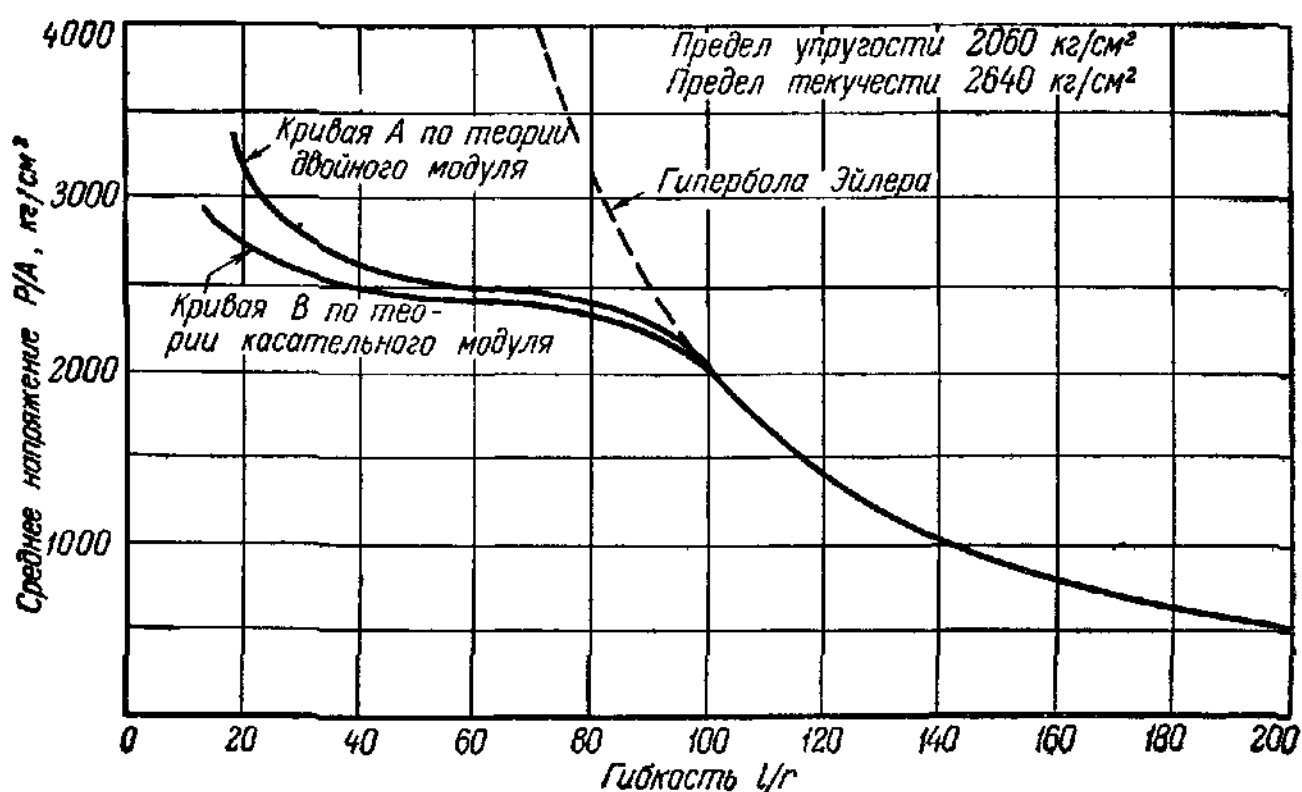


Рис. 6.

показан в виде кривой А на рис. 6, где нанесены значения  $\sigma_r$  в зависимости от гибкости  $l/r$ . В упругой области выпучивания гипербола Эйлера представляет собой соотношение между  $\sigma_r$  и  $l/r$ . Аналогичным образом можно построить и кривую В, используя кривую  $E_t/E$ , данную на рис. 5, и уравнение (20) теории касательного модуля. Расхождение двух кривых невелико при значениях гибкости  $60 \leq l/r \leq 90$ , но оно заметно увеличивается для гибкостей, меньших 40. Диаграммы зависимости напряжения от гибкости, показанные на рис. 6, назовем кривыми критических напряжений стержней.

Формулы (17) и (20) можно также обобщить, с тем чтобы учесть влияние концевых заделок сжатого стержня; полученные уравнения

по аналогии с уравнением (8) можно написать в следующей обобщенной форме:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \tau}{(kl/r)^2}, \quad (21)$$

где  $kl$  обозначает свободную длину сжатого элемента.

Важно отметить следующее обстоятельство: в упругой области  $\tau = 1$  и сопротивление выпучиванию уменьшается пропорционально квадрату  $kl/r$ . Поэтому гибкие стержни очень чувствительны к изменениям коэффициента  $k$ . В неупругой области  $\tau < 1$  и увеличение критической силы, которое получается в результате уменьшения коэффициента  $k$ , частично возмещается быстрым уменьшением  $\tau$  в связи с уменьшением  $kl/r$ . В результате с уменьшением  $k$  наблюдается очень медленное увеличение прочности коротких стержней. Для подтверждения этого достаточно беглого ознакомления с рис. 6. В интервале  $40 \leq l/r \leq 90$  кривая критических напряжений стержня почти параллельна оси абсцисс. Отсюда очевидно, что упругая заделка концов сжатого стержня, выраженная соответствующим значением коэффициента  $k$ , оказывает большое влияние на сопротивление выпучиванию в упругой области и сравнительно незначительное — в неупругой области.

## 6. Теория неупругого поведения сжатого стержня Шэнли

В своей недавно опубликованной статье Шэнли<sup>1)</sup> дает объяснение тому непонятному явлению, когда в результате применения апробированной теории приведенного модуля во многих случаях получаются большие значения критической силы, чем значения, полученные из опытов, тщательно поставленных. Его заслуга состоит в том, что он указал на сомнительные моменты, молчаливо вводимые в теории приведенного модуля. Из этой теории, основывающейся на тех же принципах, что и теория идеально упругого стержня, которая применяется при получении эйлеровой силы, следует, что стержень остается прямым, пока не достигнута критическая сила  $P_r$ . В этом случае не учитывается то обстоятельство, что стержень, достигнув тангенциально-модульной нагрузки  $P_t$ , т. е. максимальной нагрузки, при которой стержень должен остаться прямым, может изгибаться одновременно с увеличением осевой нагрузки. Шэнли показал, что в действительности дело обстоит именно так. Существует непрерывный спектр всевозможных изогнутых состояний, соответствующих значениям  $P$ , находящимся между тангенциально-модульной нагрузкой  $P_t$  и приведенно-модульной нагрузкой  $P_r$ . Прогиб  $y$ , соответствующий нагрузке  $P$ , имеет конечное значение и увеличивается от нуля до бесконечности, когда  $P$  изменяется от  $P_t$  до  $P_r$ .

<sup>1)</sup> Шэнли, цит. выше, стр. 23.

Шэнли анализирует поведение сжатого стержня в неупругой области с помощью идеализированного стержня, образованного из двух шарнирно опертых абсолютно жестких частей, соединенных упруго-пластическим шарниром, состоящим из двух маленьких продольных элементов (рис. 7). Предполагая, что такой стержень начинает изгибаться, как только превышена касательно-модульная нагрузка  $P_t$ , Шэнли изучает влияние нагрузки  $P > P_t$  исследуя взаимосвязь между  $P - P_t$  и прогибом  $d$  в середине стержня. В результате он приходит к следующему соотношению между нагрузкой и прогибом:

$$P = P_t \left( 1 + \frac{1}{\frac{b}{2d} + \frac{1+\tau}{1-\tau}} \right), \quad (22)$$

где  $b$  — ширина стержня, а  $\tau = E_t/E$ . Предполагается, что  $\tau$  при значении, соответствующем нагрузке  $P_t$ , остается постоянной величиной.

Необходимо обратить внимание на тот факт, что изогнутая форма равновесия при нагрузке  $P$  является, по крайней мере теоретически, устойчивой и что она аналогична устойчивой криволинейной форме равновесия, выведенной на основании точной теории идеально упругого стержня, когда эйлерова сила несколько превышена. Шэнли первый указал на возможность существования таких изогнутых форм равновесия, наблюдаемых в результате превышения касательно-модульной нагрузки.

Уравнения, выражающие изменение деформации в двух элементах стержня в функции отношения  $R = P/P_t$ , согласно Шэнли, будут:

$$\left. \begin{aligned} \text{вогнутая сторона } \frac{\Delta \epsilon_1}{\epsilon_t} &= \frac{2 \left( \frac{1}{\tau} - R \right)}{\frac{1-\tau}{R-1} - (1+\tau)}, \\ \text{выпуклая сторона } \frac{\Delta \epsilon_2}{\epsilon_t} &= \frac{2(R-1)}{\frac{1-\tau}{R-1} - (1+\tau)}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где  $\epsilon_t$  обозначает величину деформации, соответствующую нагрузке  $P_t$ . Для значения  $\tau = E_t/E = 0,75$  на рис. 8 приведена зависимость  $\frac{\Delta \epsilon}{\epsilon_t}$  от  $R$ . После того как превышена касательно-модульная нагрузка, на вогнутой стороне стержня деформация сжатия быстро увеличивается, в то время как на выпуклой стороне она начинает уменьшаться сравнительно медленно. Уравнения (22) и (23) были получены в результате исследования крайне идеализированной расчетной схемы стержня, и поэтому рис. 8 дает всего лишь грубую картину пове-

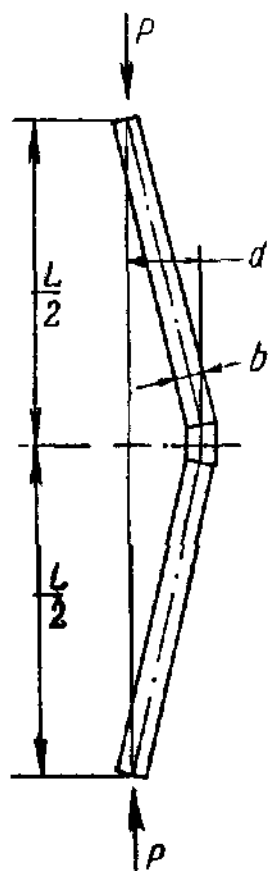


Рис. 7.

дения действительного стержня. Легко представить себе, что в реальном стержне дополнительная деформация  $\Delta \epsilon_1$ , обусловленная изгибом, увеличивается значительно более быстро, так как искривления всех элементов стержня способствуют процессу изгиба. Кроме того, быстрое увеличение деформации сжатия, необходимое для удовлетворения условия равновесия между нагрузкой  $P$  и напряжениями, вызывает существенное уменьшение значения  $E_t$ . В результате можно сделать вывод о том, что в большинстве реальных случаев критическая сила, при которой стержень становится непригодным, лишь незначительно превосходит касательно-модульную нагрузку  $P_t$ .

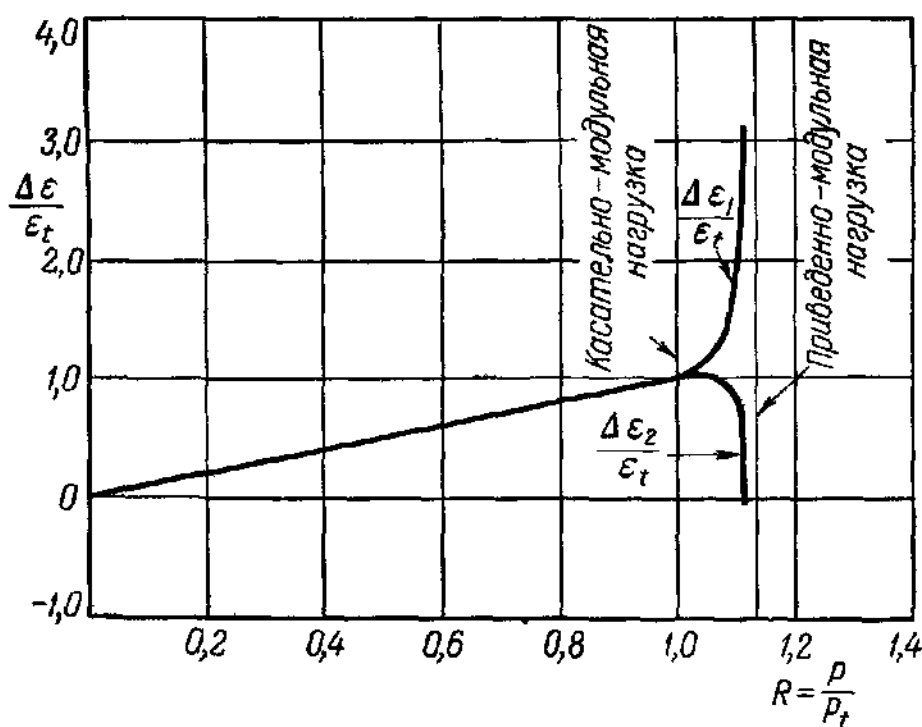


Рис. 8.

Карман<sup>1)</sup> в комментарии к статье Шэнли признал несомненную важность его работы. Поскольку эти комментарии прекрасно иллюстрируют существо проблемы, мы воспроизведем из них следующие строки:

«Как исследование Энгессера, так и мое собственное были основаны на предположении, согласно которому равновесие прямого сжатого стержня становится неустойчивым в том случае, когда при одной и той же осевой нагрузке существует положение равновесия, бесконечно близкое к прямому положению. За пределом упругости критическая сила в такой постановке определяется формулой Эйлера, в которой модуль Юнга заменен так называемым приведенным модулем. Исследование Шэнли представляет собой обобщение данной задачи. Поставленный им вопрос можно сформулировать следующим образом: каково будет наименьшее значение осевой нагрузки,

<sup>1)</sup> Journ. Aeronaut. Sci., 1947, стр. 267—268.

при которой может иметь место бифуркация положения равновесия, независимо от того, является ли необходимым для перехода к изогнутому положению увеличение осевой силы. Ответ на этот вопрос следующий: первая бифуркация равновесного состояния от прямолинейной формы равновесия имеет место при нагрузке, определяемой формулой Эйлера, в которой модуль Юнга заменен касательным модулем. Действительно, можно построить ряд положений равновесия при любой нагрузке, находящейся между двумя предельными значениями, соответствующими касательному и приведенному модулям.

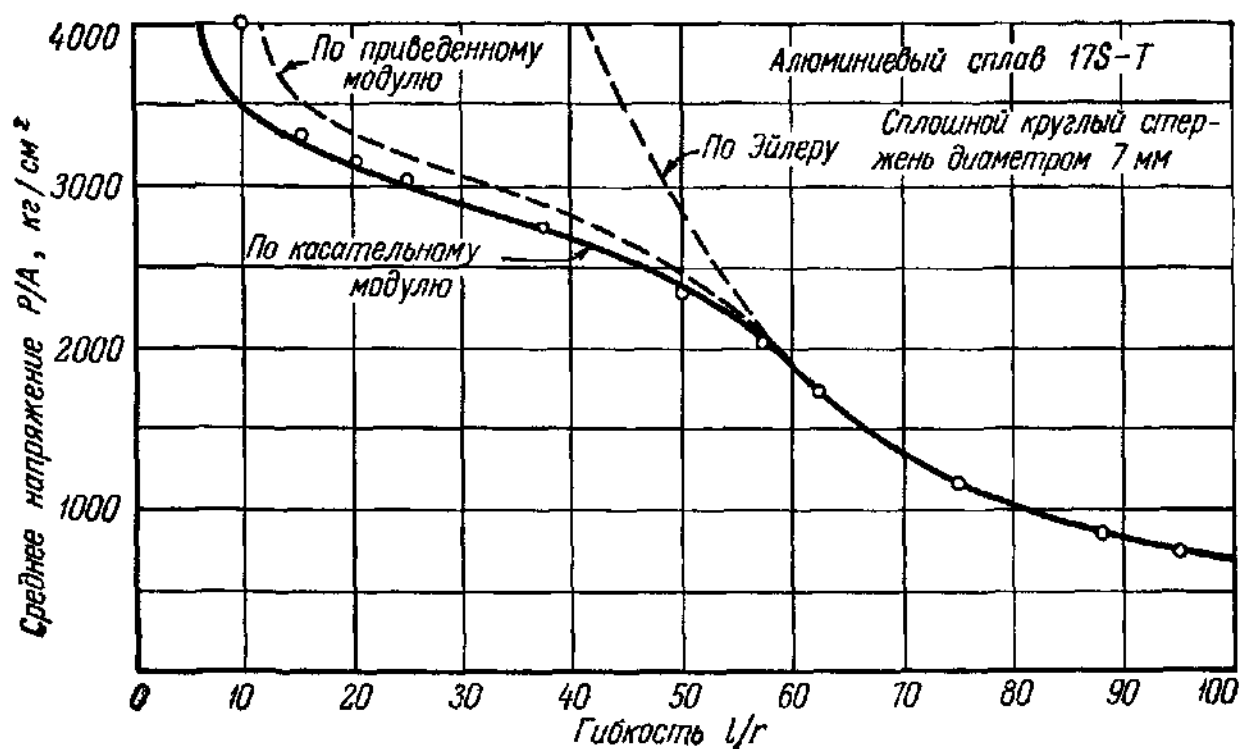


Рис. 9.

«Мое первоначальное исследование, а также исследование Энгесера представляют собой обобщение теории упругого выпучивания. Почему оно не охватывает всевозможные положения равновесия в неупругом случае? Очевидно, не потому, что в неупругой области соотношение между напряжением и деформацией является нелинейным, но в связи с тем, что процесс деформации имеет необратимый характер. В зависимости от истории процесса нагружения и разгрузки существует множество значений остаточной деформации, соответствующих одному и тому же напряжению. Следовательно, для необратимых процессов определение границы устойчивости должно быть пересмотрено. Необходимость этого была интуитивно признана Шэнли, что, как я полагаю, и является большой заслугой его работы».

Суммируя, можно сказать следующее: касательно-модульная нагрузка точно не определяет действительную нагрузку выпучивания, т. е. нагрузку, которую сжатый стержень в состоянии выдержать без значительного прогиба, но ее можно рассматривать как нижний

предел такой нагрузки. Этот предел для большинства металлов, применяемых в инженерных конструкциях, лежит несколько ниже критической силы. Следовательно, касательно-модульную нагрузку можно считать критической; таким образом, мы вправе положить в основу формулы для сжатого стержня первоначальное уравнение Энгесера, т. е. уравнение (20) предыдущего параграфа. Уравнение (19) представляет собой обобщенное основное дифференциальное уравнение для исследования условия неустойчивости сжатых элементов стержней и всех металлических конструкций, содержащих такие элементы.

Типичные примеры экспериментальных данных показаны на рис. 9 и 10; они подтверждают заключения, выведенные из теории Шэнли о поведении сжатых стержней<sup>1)</sup>. На рис. 9 приведены результаты опытов над круглыми стержнями из

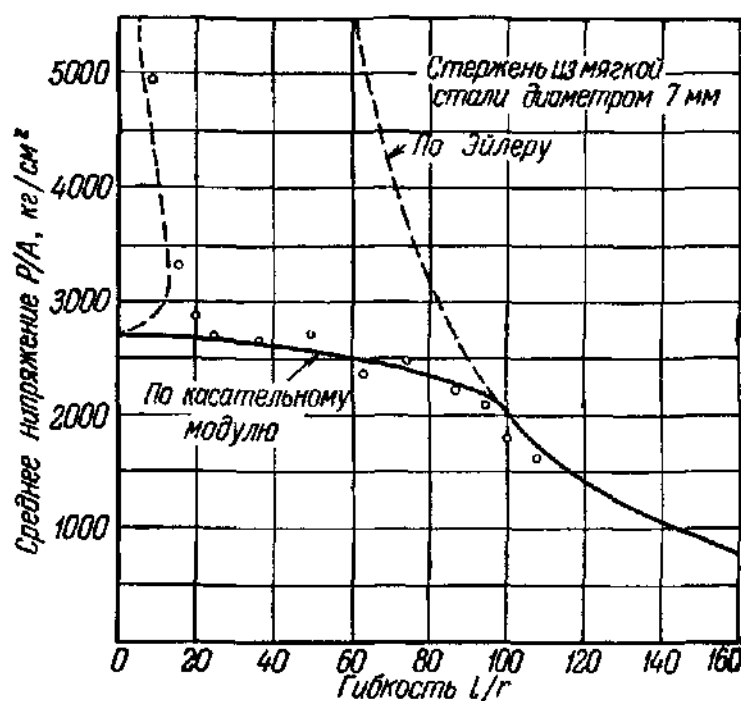


Рис. 10.

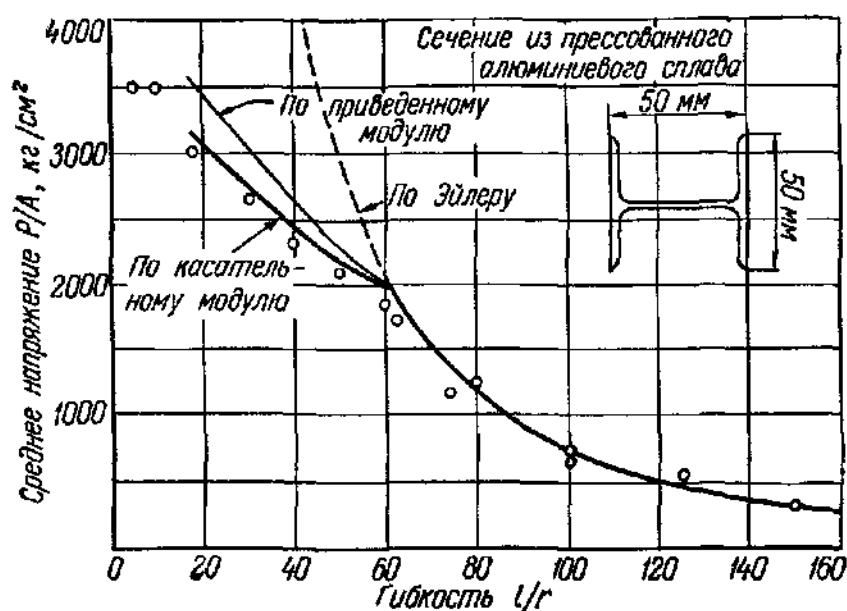


Рис. 11.

алюминиевого сплава, а на рис. 10 — данные, относящиеся к опытам со стержнями из мягкой стали. Результаты обеих групп опытов

<sup>1)</sup> Templin R. L., Sturm R. G., Hartmann E. C., Holt M., Column Strength of Various Aluminum Alloys, Aluminum Research Labs., Tech. Paper 1, Aluminum Company of America, Pittsburgh, 1938,

достаточно хорошо совпадают с данными теории касательного модуля.

На рис. 11 приведены результаты опытов с Н-образными образцами из алюминиевого сплава, полученными с помощью выдавливания. Эта фигура еще раз показывает лучшее соответствие результатов опытов с теорией касательного модуля, чем с теорией приведенного модуля.

## 7. Кривая критических напряжений сжатых стержней

Форма кривой напряжения деформации существенно влияет на кривую критических напряжений сжатых стержней, которая определяет взаимосвязь между критическим напряжением и гибкостью стержня.

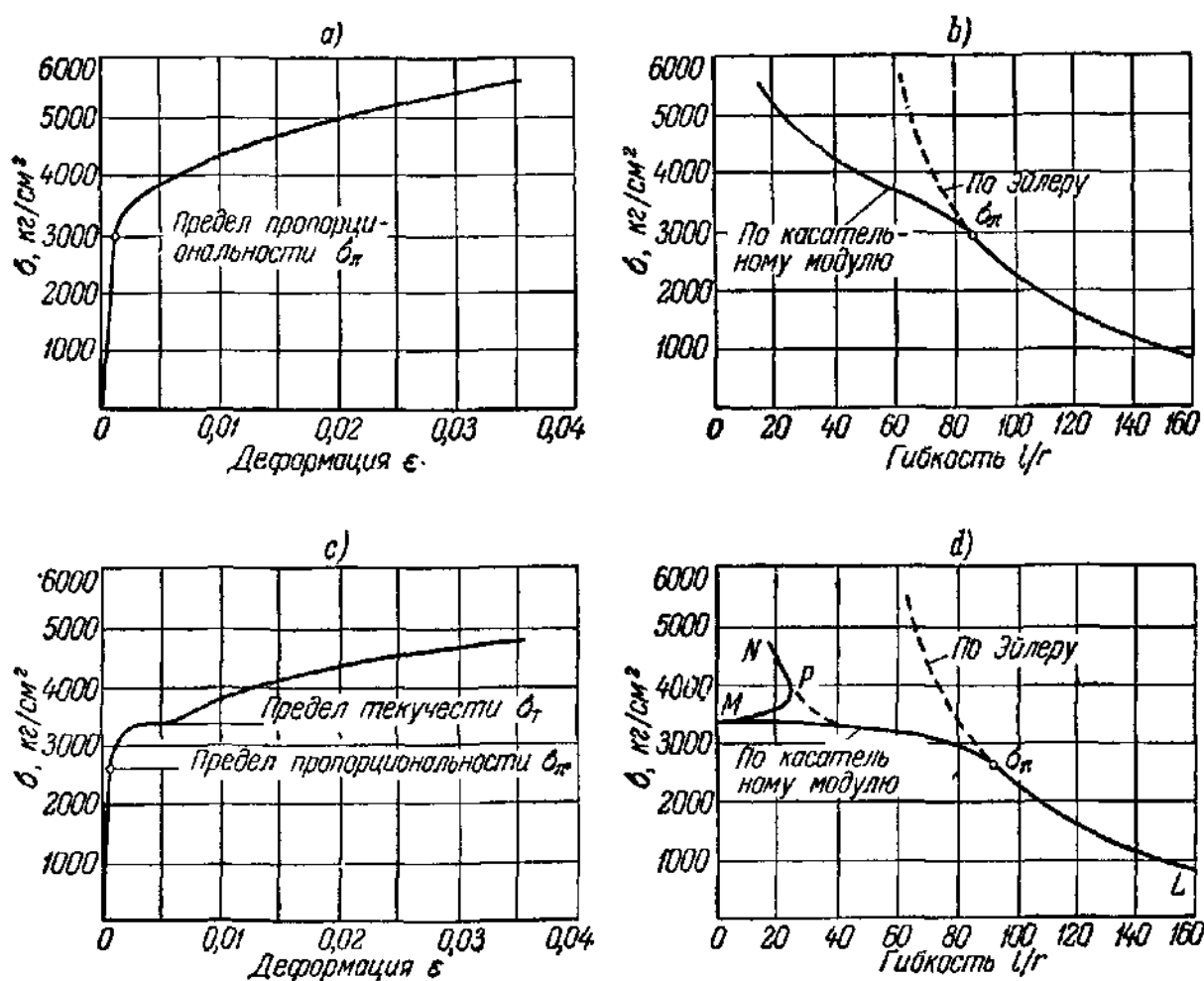


Рис. 12.

На рис. 12, а показана кривая напряжения-деформации для материала, не имеющего ясно выраженного предела текучести, как, например, алюминиевые сплавы и высокопрочные стали. Соответствующая кривая критических напряжений сжатых стержней принимает вид, показанный на рис. 12, б.

Кривая критических напряжений строительной стали с явно выраженным пределом текучести и относительно небольшой площадкой текучести (рис. 12, с) подобна кривой, приведенной на рис. 12, д.



Необходимо сделать некоторые пояснения относительно характера этой кривой. Когда  $\sigma$  приближается к пределу текучести  $\sigma_T$ , касательный модуль  $E_t$  монотонно убывает и становится равным нулю при достижении предела текучести. Так как при  $l/r = 0$   $E_t = 0$ , то кривая критических напряжений сжатого стержня, охватывающая часть диаграммы напряжений-деформаций от точки 0 до точки Y, выражается кривой  $L - \sigma_K - M$  на рис. 12, *d*. Если сжатый стержень при прохождении напряжения  $\sigma$  через зону текучести был подкреплен так, что прогибы были невозможны, и далее загружен осевой нагрузкой с напряжением  $\sigma$ , находящимся в области упрочнения, то можно было бы получить значения критических напряжений выше предела текучести, представленные ветвью  $M - P - N$  кривой критических напряжений. Эта ветвь соответствует части диаграммы напряжений-деформаций, находящейся выше предела текучести. Однако вполне возможно, что в случаях, когда горизонтальная площадка кривой напряжений-деформаций коротка, тенденция сжатого стержня к неустойчивости на пределе текучести может быть предотвращена без помощи боковых подкреплений так, чтобы имело место упрочнение. В этом случае кривая критических напряжений сжатого стержня будет представлена линией  $\sigma_K - P - N$ . Действительно, тщательно нагруженные образцы строительной стали со значениями  $l/r$  ниже 30 часто дают значения критических напряжений  $P/A$  значительно выше предела текучести. Это объясняется тем, что вследствие неоднородности материала текучесть не имеет места одновременно по всему поперечному сечению и в то время, как в одной части стержня происходит упрочнение, в других частях начинается текучесть. Таким образом, возможно, что изгиб, который должен был бы наблюдаться в пределе текучести, более или менее задерживается, и выпучивание происходит при среднем напряжении выше предела текучести. Однако такие большие значения величин критических напряжений очень коротких сжатых стержней можно наблюдать только в тщательно поставленных опытах над небольшими образцами и нельзя полагаться на них при расчете стержней. Поэтому для строительной стали целесообразно рассматривать кривую  $L - \sigma_K - M$  как реальную кривую критических напряжений сжатых стержней. Следовательно, предел текучести является верхним пределом среднего напряжения, при котором разрушается короткий сжатый стержень, выполненный из строительной стали с ясно выраженным пределом текучести.

В предыдущих параграфах исследовалась теоретическая сторона задачи прочности сжатых стержней как задачи устойчивости, а также обсуждались критерии потери устойчивости. Было установлено, что эйлерова сила в упругой области и касательно-модульная нагрузка в неупругой области являются предельными значениями несущей способности сжатого стержня; до этих значений нагрузок на стержень можно не опасаться прогибов его. Таким образом, для любого строительного металла можно получить основное соотношение между

критической силы и гибкостью стержня во всей области выпучивания, если только имеется полная диаграмма напряжения-деформации материала при сжатии. Это соотношение, графически выраженное кривой критических напряжений и пригодное для идеализированного стержня любой формы сплошного поперечного сечения, нужно рассматривать как единственно рациональное, на основании которого можно получить расчетные формулы для центрально сжатых стержней.

В дальнейшем в § 18 будут рассмотрены принципы, на которых основаны формулы критических напряжений для практического расчета, а также трудности, встречаемые при установлении таких формул, возникающие вследствие неравномерностей в упруго-пластическом поведении материала и от сложных условий, в которых находятся сжатые элементы в металлических конструкциях.

### 8. Влияние касательных напряжений на критические силы

При математическом выводе значения критической силы мы до сих пор не принимали во внимание влияния касательных напряжений в сжатом изогнутом стержне в случае, когда он переходит из устойчивого положения равновесия в неустойчивое. Это влияние, как будет показано ниже, является очень незначительным и им можно пренебречь для рассматриваемых в этой главе стержней со сплошным поперечным сечением.

Поперечная сила  $Q$  в сжатом стержне, в котором возникает изгибающий момент  $M = Py$ , равна

$$Q = \frac{dM}{dx} = P \frac{dy}{dx}.$$

Эта сила вызывает дополнительный прогиб  $\Delta y$ , и согласно упругой теории изменение наклона кривой прогиба  $y$  будет

$$\frac{d \Delta y}{dx} = \frac{Q\beta}{GA},$$

где  $G$  — модуль сдвига, а  $\beta$  — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения стержня. Для прямоугольных сечений имеем  $\beta = 1,2$ ; он приблизительно равен 2 для Н-образного сечения, изогнутого в плоскости стенки. Изменение кривизны, обусловленное влиянием поперечной силы, равно

$$\frac{d^2 \Delta y}{dx^2} = \frac{\beta}{GA} \frac{dQ}{dx} = \frac{P\beta}{GA} \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Следовательно, полная кривизна кривой прогиба, определяемая изгибающим моментом и поперечной силой, будет

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Py}{EJ} + \frac{P\beta}{GA} \frac{d^2 y}{dx^2},$$

где в целях использования этого уравнения для всей области выпучивания были введены касательный модуль  $E_t$  и касательный модуль сдвига  $G_t$ . Это уравнение можно записать в следующем виде:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Py}{(1 - \beta P/G_t A) E_t J} = 0. \quad (24)$$

Вводя обозначение  $\alpha^2 = \frac{P}{(1 - \beta P/G_t A) E_t J}$ , имеем:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0.$$

Рассуждая так же, как и в предыдущих параграфах, находим, что критическая сила снова определяется условием  $\alpha l = \pi$ , откуда получается формула

$$P = \frac{\pi^2 E_t J}{l^2} \left( 1 - \frac{\beta P}{G_t A} \right).$$

Решая это уравнение относительно  $P$ , получим следующее выражение для критической силы  $P'_{кр}$ :

$$P'_{кр} = \frac{\pi^2 E_t J}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\beta}{G_t A} \frac{\pi^2 E_t J}{l^2}}.$$

Предполагая, что отношение  $E_t/G_t$  постоянно и равно  $\nu = E/G$ , имеем:

$$P'_{кр} = \pi^2 E_t J \frac{1}{\left[ 1 + \pi^2 \beta \nu \left( \frac{r}{l} \right)^2 \right] l^2} = \frac{\pi^2 E_t J}{(kl)^2}. \quad (25)$$

Коэффициент  $k$ , данный выражением

$$k = \sqrt{1 + \pi^2 \beta \nu \left( \frac{r}{l} \right)^2}, \quad (26)$$

зависит от гибкости  $l/r$ . Так как  $k > 1$ , то  $P'_{кр}$  меньше критической силы  $P_{кр}$ , полученной при условии пренебрежения влиянием поперечных сил для той же гибкости.

Значения коэффициента Пуассона  $\nu$  для металлов находятся между величинами  $1/3$  и  $1/4$  и следовательно, значение выражения  $\nu = 2(1 + \nu)$  лежит между  $8/3$  и  $5/2$ . Выбирая как более неблагоприятное для данного случая значение  $8/3$  и полагая, что  $\beta = 2$  для Н-образных сечений, получим следующие значения  $P'_{кр}/P_{кр}$  для различных значений  $l/r$ :

$l/r$ . . . . .	20	30	40	50	100	150
$k$ . . . . .	1,063	1,028	1,016	1,010	1,003	1,002
$P'_{кр}/P_{кр}$ . . . . .	0,995	0,997	0,998	0,998	0,997	0,998

Последняя строка этой таблицы была вычислена на основе кривой критических напряжений на рис. 12, *d* для строительной стали. Для очень коротких стержней коэффициент  $k$  заметно отличается от единицы; тем не менее отношение  $P'_{кр}/P_{кр}$  очень близко к 1, так как изменение значения коэффициента  $k$ , как это было показано в § 5, имеет второстепенное значение для критической силы при малых значениях  $l/r$ . Следовательно, для всех практических значений гибкостей уменьшение прочности стержня со сплошным поперечным сечением весьма незначительно и не должно быть принято во внимание при практических расчетах.

## 9. Внецентренно и поперечно нагруженные стержни. Историческая справка

Чтобы избежать путаницы в решении задач методами, которые рассматриваются в этой главе, необходимо точно определить способ нагружения, предполагаемый в этом и в следующих параграфах. Внецентренно или поперечно нагруженными стержнями считаются только те стержни, где плоскость действия момента от эксцентриситета или плоскость поперечных сил совпадает с плоскостью действительного выпучивания. Когда выпучивание происходит в плоскости, перпендикулярной к плоскости действия изгибающих моментов, упомянутой выше, мы говорим о «боковом выпучивании». Последняя задача будет рассмотрена в главе IV.

Кратко останавливаясь на истории развития теории внецентренно нагруженных стержней, необходимо упомянуть имя Остенфельда <sup>1)</sup>, который полвека назад сделал попытку получить расчетные формулы для центрально и внецентренно сжатых стержней. Его метод основан на том, что значение критической силы стержня определяется нагрузкой, при которой впервые напряжения на внешнем волокне равняются пределу текучести.

Задачу об определении критической силы внецентренно нагруженных стержней, сформулированную как задача об устойчивости, впервые исследовал Карман <sup>2)</sup>, который в связи с изучением центрально сжатых стержней дал полное и точное освещение этой довольно запутанной проблемы. Он обратил внимание на чувствительность коротких стержней и стержней средней длины даже к весьма незначительным эксцентриситетам приложенных нагрузок, что заметно уменьшает несущую способность прямолинейных сжатых стержней. В 1926 г. Рош и Бруннер опубликовали упрощенную теорию устойчивости внецентренно сжатых стержней и на основе ряда опытов доказали правильность полученных ими теоретических ре-

<sup>1)</sup> O s t e n f e l d A., Exzentrische und zentrische Knickfestigkeit, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, т. 94, стр. 1462, 1898.

<sup>2)</sup> Цит. выше, стр. 17.

зультатов. Они <sup>1)</sup> предположили, что упругая линия сжатого стержня представляет собою полуволну синуса, но при расчете критической силы они исходили из действительной диаграммы зависимости между напряжением и деформацией.

В 1928 г. Вестергор и Осгуд <sup>2)</sup> опубликовали статью, в которой аналитическим путем было исследовано поведение внецентренно сжатых и первоначально искривленных стержней. Их метод основан на тех же уравнениях, которые были использованы Карманом, при этом предполагается, что упругую линию внецентренно сжатых элементов можно представить косинусоидой, упрощая таким образом метод Кармана и не искажая практической точности получаемых результатов.

Исходя из точной теории Кармана, Хвалла <sup>3)</sup> в ряде статей, опубликованных между 1928 и 1937 гг., очень тщательно исследовал устойчивость внецентренно сжатых стержней, и полученные им результаты для различных форм поперечного сечения стержней представил в виде таблиц и диаграмм. Все свои вычисления Хвалла основывал на одной и той же диаграмме зависимости между напряжением и деформацией, взятой за типичную для строительной стали. Значение его трудоемкой работы заключается в том, что приведенные в ней многочисленные таблицы и диаграммы внесли ясность в вопрос о поведении внецентренно сжатых стержней, определяемом формой поперечного сечения, гибкостью и эксцентриситетом; с помощью полученных им точных результатов можно оценить степень точности приближенных методов.

Ежек <sup>4)</sup> внес ценный вклад в дело решения этой задачи. Он дал аналитическое решение для стальных сжатых стержней, основанное на упрощенной диаграмме зависимости между напряжением и деформацией, состоящей из двух прямых линий, и показал, что полученные им результаты достаточно хорошо совпадают с результатами, полученными на базе действительной диаграммы зависимости между напряжением и деформацией. Идея, лежащая в основе теории Ежека, оказывается полезной при составлении аналитических выражений, из которых достаточно простым путем можно получить диаграммы, таблицы или расчетные формулы для разных материалов, имеющих ясно выраженный предел текучести.

---

<sup>1)</sup> Roš M., Die Bemessung zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe auf Knickung, Rept. 2d Internat. Cong. Bridge and Structural Eng., Vienna, 1928.

<sup>2)</sup> Westergaard H. M. and Osgood W. R., Strength of Steel Columns, Trans. ASME, т. 49, 50, APM-50-9, стр. 65, 1928.

<sup>3)</sup> Chwalla E., Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, Abt. 11a, стр. 469, 1928. Список дополнительной литературы приведен в конце главы.

<sup>4)</sup> Ježek K., Die Tragfähigkeit des exzentrisch beanspruchten und des querbelasteten Druckstabes aus einem ideal plastischen Material, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, Abt. 11a, т. 143, 1934.

Исходя из формулы секанса, Юнг<sup>1)</sup> предложил другой подход к решению сложной задачи внецентренно сжатых стержней. Он, как Остенфельд и другие, предполагал, что разрушающая нагрузка является нагрузкой, вызывающей текучесть в наиболее напряженном волокне. Для строительной стали с пределом текучести  $2540 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$  он построил кривые критических напряжений с различными значениями эксцентриситета. Аналогичным способом он исследовал стержни с начальной кривизной.

В последующих параграфах 10 и 11 приводятся краткие сведения о характере задачи устойчивости внецентренно сжатых стержней, о теории, разработанной Карманом и Хвалла, и об упрощенном методе Вестергорга и Осгуда. В §§ 12 и 13 будет дан анализ теории Ежека, а также способов применения для практических расчетов аналитических результатов, полученных на базе его теории. Критическое обсуждение формулы секанса дается в § 15.

### 10. Внецентренно сжатые стержни прямоугольного поперечного сечения. Метод Кармана и Хвалла

Теория основывается на тех же положениях, которые приводились в предшествующих параграфах при исследовании устойчивости центрально сжатых стержней за пределом упругости. Первоначально прямой стержень с прямоугольным поперечным сечением шириной  $b$  и высотой  $h$  нагружен сжимающей силой  $P$ , действующей с эксцентриситетом  $e$  и находящейся в плоскости, проходящей через ось  $I—I$  поперечного сечения (рис. 13, *a*). В связи с тем, что с самого начала процесса нагружения изгибающие и сжимающие напряжения действуют и возрастают одновременно с увеличением нагрузки  $P$ , на выпуклой стороне изогнутого стержня при достижении значения критической силы не наблюдается изменения знака деформации. По мере увеличения значения  $P$  до того момента, пока предел пропорциональности не будет превзойден, во всем поперечном сечении или по крайней мере в наиболее напряженной части сечения распределение напряжений происходит согласно диаграмме зависимости между напряжением и деформацией. В каждом поперечном сечении имеется ось  $\sigma_0$ , вдоль которой значение напряжения  $\sigma$  равно среднему  $\sigma_0 = P/A$ , отмеченное точкой  $O$  на рис. 13, *b*. Удобно разложить напряжение  $\sigma$  на два слагаемых:  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_b$ , где  $\sigma_b$  обозначает изгибающие напряжения (заштрихованные площади на рис. 13, *b*). Условия равновесия тогда можно выразить в следующем виде:

$$b \int_{h_1}^{h_2} \sigma_b dz = 0 \quad \text{и} \quad b \int_{h_1}^{h_2} \sigma_b z dz = P(e + y), \quad (27)$$

<sup>1)</sup> Jo ung D. H., Rational Design of Steel Columns, Trans. ASCE, т. 101, стр. 422, 1936.

где прогиб  $y$  отсчитывается от центральной оси стержня. В связи с тем, что изгибающие напряжения образуют пару, ось отсчета для

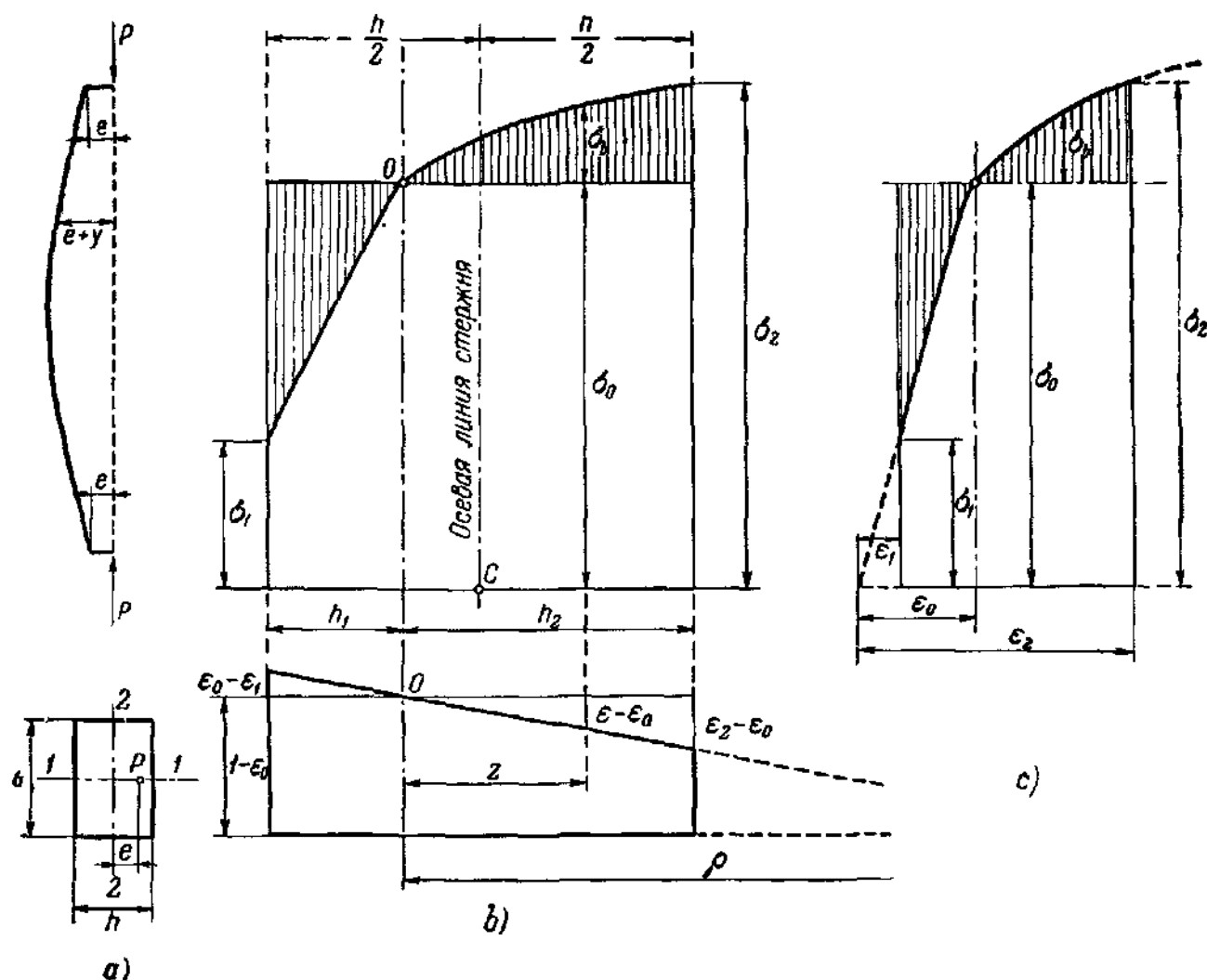


Рис. 13.

вычисления момента напряжений можно выбрать произвольно. Поэтому второе уравнение (27) составлено относительно оси  $O$ .

Введем следующие обозначения:

$z$  — расстояние любого волокна от оси  $\sigma_0$  поперечного сечения;  
 $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — соответственно минимальное и максимальное продольные напряжения на внешних волокнах;

$\epsilon_0$  — деформация сжатия, соответствующая среднему напряжению  $\sigma_0$ ;

$\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  — минимальная и максимальная деформации сжатия, соответствующие напряжениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Рассматривая относительный поворот двух сечений находящихся на единичном расстоянии одно от другого, из рис. 13, б) имеем:

$$\epsilon - \epsilon_0 = \frac{z}{\rho} \quad (28)$$

и

$$\epsilon_2 - \epsilon_1 = \frac{h}{\rho}, \quad (29)$$

где  $\rho$  — есть радиус кривизны изогнутого стержня в рассмотренном поперечном сечении. Исключая  $\rho$  из этих двух уравнений, получим:

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{z}{h} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1), \quad (30)$$

которое в результате дифференцирования по  $z$  даст:

$$d\varepsilon = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h} dz. \quad (31)$$

Подставляя (30) и (31) в выражение (27), получим:

$$\frac{bh}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma_b d\varepsilon = 0. \quad (32)$$

$$\frac{bh^2}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma_b (\varepsilon - \varepsilon_0) d\varepsilon = P(e + y). \quad (33)$$

В этих уравнениях  $\sigma_b$  рассматривается как функция от  $\varepsilon$ , представленная диаграммой напряжения-деформации, заключенной между  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  (рис. 13, с).

Из уравнения (32) при данном среднем напряжении  $\sigma_0 = P/A$  и наибольшей деформации сжатия  $\varepsilon_2$  на вогнутой стороне сжатого стержня можно получить наименьшую деформацию сжатия  $\varepsilon_1$ <sup>1)</sup>. Таким образом, получим ряд различных распределений напряжений, соответствующих одной и той же осевой нагрузке. Они представляют собой ряд возможных распределений напряжений, которые могут существовать в различных поперечных сечениях изогнутого стержня. Из уравнения (29) следует, что каждому такому распределению напряжений, определенному значениями  $\sigma_0$  и  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ , соответствует некоторое значение радиуса кривизны  $\rho$ . С другой стороны, определяя с помощью диаграммы напряжения-деформации значение интеграла

$$\frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma_b (\varepsilon - \varepsilon_0) d\varepsilon,$$

можно из уравнения (33) рассчитать соответствующее значение  $y$ . Таким образом, получим ряд соответствующих друг другу значений  $\rho$  и  $y$  в виде функции  $\rho = F(y)$ . Так как при малых прогибах  $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$ , то можно установить соотношение

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(y). \quad (34)$$

<sup>1)</sup> Уравнение (32) выражает условие равенства двух заштрихованных площадей на рис. 13 с.



Функцию  $F(y)$  можно определить численно с помощью таблицы или графически в виде диаграммы. При любом значении среднего напряжения  $\sigma_0 = P/A$ , эксцентриситета  $e$  и длины стержня  $l$  из дифференциального уравнения (34) можно определить  $y$ , т. е. форму упругой линии стержня.

Мы не будем останавливаться на весьма сложной проблеме решения уравнения (34). Необходимо лишь отметить, что с помощью некоторых графических интегрирований можно выразить длину стержня  $l$  (или гибкость  $l/r$ ) в виде функции от  $\sigma_0$  и  $e$ . Используя полученные в результате кривые, можно построить другое семейство кривых, определяющих для заданных значений  $l/r$  и  $e$  связь между средним напряжением  $\sigma_0$  и прогибом  $y_m$  в середине стержня.

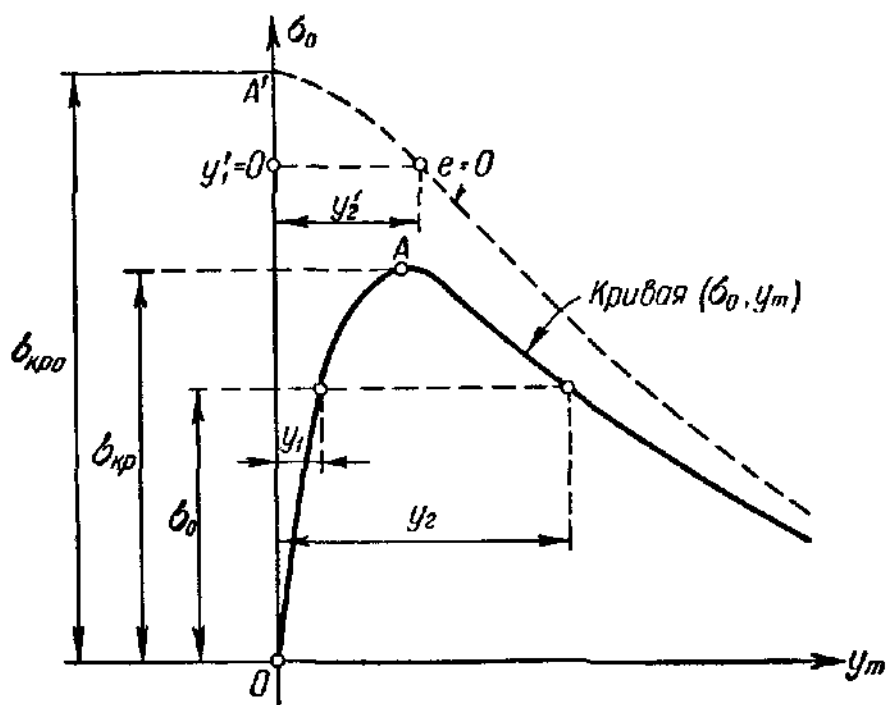


Рис. 14.

На рис. 14 изображена характерная кривая  $(\sigma_0, y_m)$ , выражающая поведение внецентренно сжатых стержней из упруго-пластического материала. Линия, параллельная оси  $y_m$  и проведенная на расстоянии  $\sigma_0$  от нее, пересекает кривую в двух точках. Это свидетельствует о том, что при одной и той же нагрузке  $P = A\sigma_0$  возможны два положения равновесия. Первое положение, соответствующее прогибу  $y_m = y_1$ , является устойчивым, так как увеличение прогиба требует увеличения значения среднего напряжения  $\sigma_0$ . После разгрузки стержень стремится вернуться к своей первоначальной прямолинейной форме, но вследствие наличия остаточных деформаций в тех волокнах, где предел текучести был превзойден, он принимает слегка изогнутую форму. Второе положение равновесия, связанное со значением прогиба  $y_m = y_2$ , является неустойчивым, так как дальнейшее увеличение прогиба требует уменьшения значения среднего напряжения  $\sigma_0$ . Следовательно, наибольшее значение  $\sigma_0$ ,

равное ординате  $\sigma_{кр}$  наивысшей точки  $A$  данной кривой, соответствует переходу от устойчивого к неустойчивому положению равновесия. Отсюда разрушающая нагрузка внецентренно сжатых стержней равна  $P_{кр} = A\sigma_{кр}$ .

На основании приведенных выше положений можно заключить, что внецентренно сжатые стержни из строительных металлов разрушаются вследствие того, что при определенном критическом

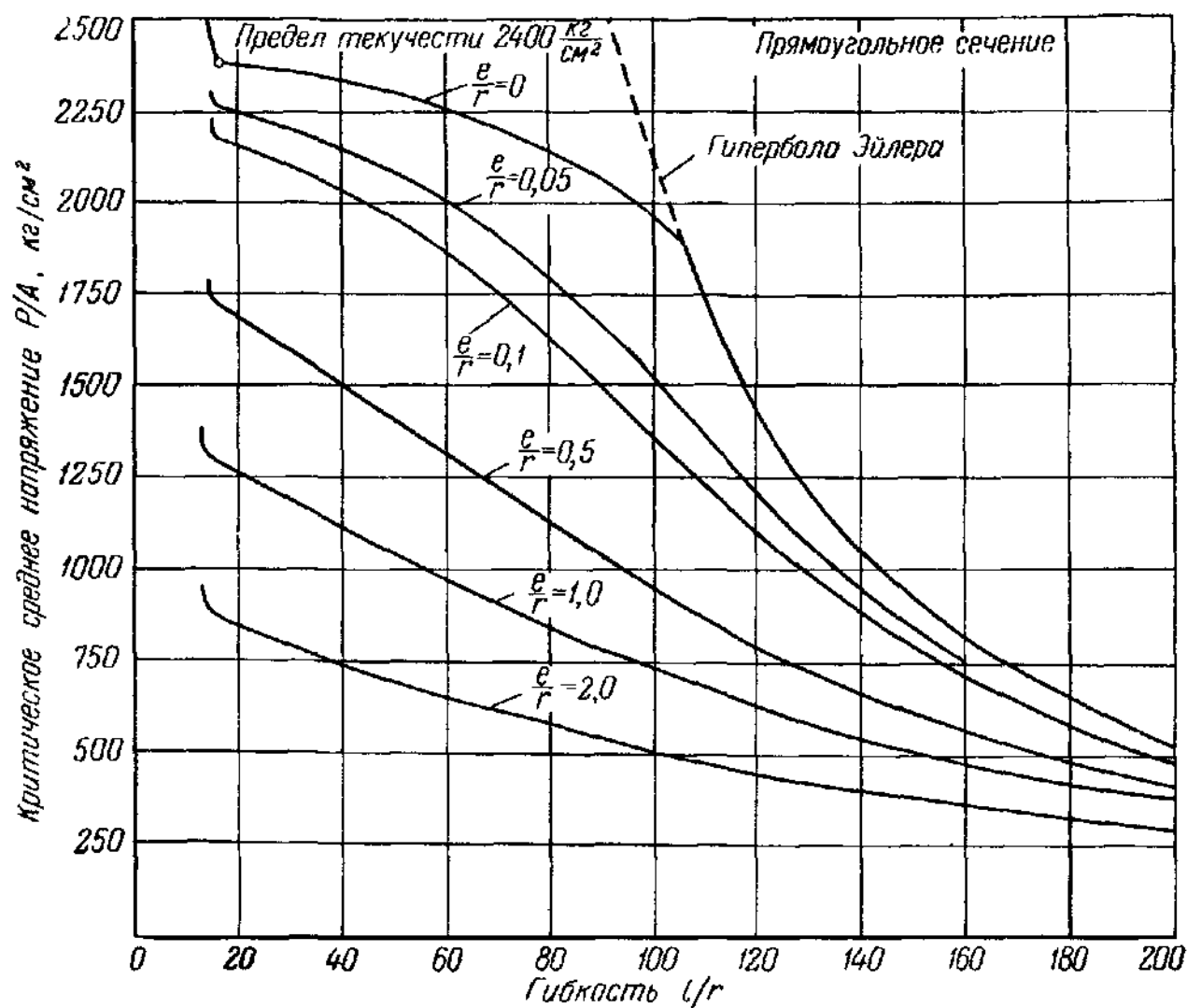


Рис. 15.

значении нагрузки равновесие между внутренним и внешним изгибающими моментами становится неустойчивым, а не как результат того, что в наиболее напряженном волокне достигается некоторое критическое напряжение. Все попытки решить рассматриваемую задачу о сжатых стержнях как задачу об определении напряжений беспредметны, ибо в этом случае совершенно неправильно понимается основная суть задачи.

Важно отметить, что кривая  $(\sigma_0, y_m)$  обладает вышеуказанными особенностями, т. е. имеет восходящую и нисходящую ветви с вершиной, определяющей значение критической силы, в том случае, когда  $\sigma_{кр}$  лежит ниже предела пропорциональности. Необходимо

помнить, что индивидуальные свойства материала, выражаемые формой диаграммы зависимости между напряжением и деформацией, влияют на состояние равновесия между внешними силами и напряжениями; из этого условия равновесия можно определить значение критической силы независимо от того, лежит ли  $\sigma_{кр}$  ниже или выше предела пропорциональности.

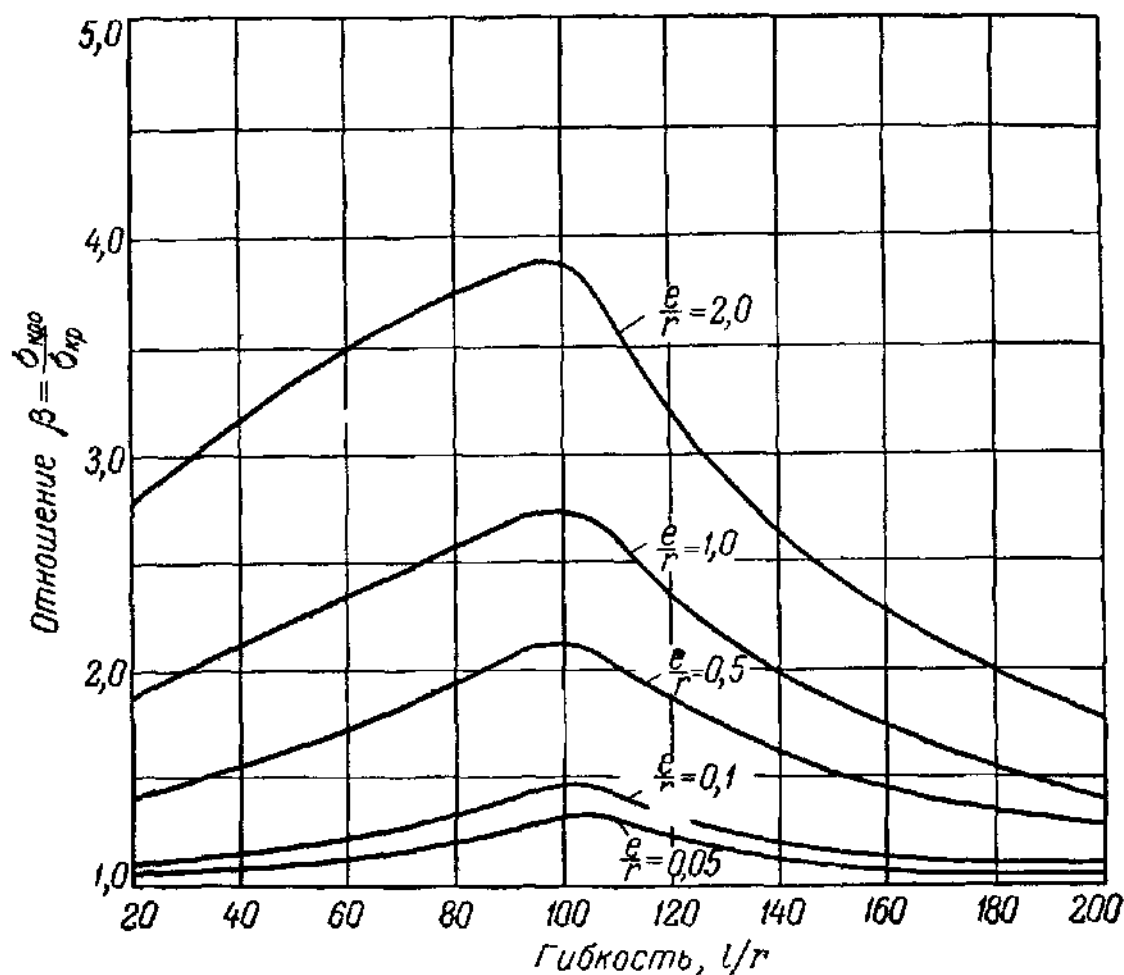


Рис. 16.

Хвалла удалось при помощи специального приспособления в опытах над малыми внецентренно нагруженными образцами прямоугольного поперечного сечения измерить прогиб  $y_m$  уже после того, как критическая сила была достигнута. Форма полученной кривой ( $\sigma_0, y_m$ ) удивительно точно согласуется с формой, предсказываемой теорией<sup>1)</sup>. Значение этих экспериментов заключается в том, что они могут служить доказательством, подтверждающим правильность трактовки Кармана данной задачи как задачи об устойчивости.

В предельном случае центрально сжатых стержней, когда  $e = 0$ , кривая ( $\sigma_0, y_m$ ) принимает форму, показанную пунктиром на рис. 14. Ордината вершины  $A'$  этой кривой определяет значение эйлеровой силы или касательно-модульной нагрузки для таких стержней. При

<sup>1)</sup> Chwalla E., Über die experimentelle Untersuchung des Tragverhaltens gedrückter Stäbe aus Baustahl, Der Stahlbau, т. 7, стр. 17, 1934.

значениях нагрузки ниже этого предела также наблюдаются две возможные формы равновесия: прямая и устойчивая форма равновесия, для которой  $y_m = y'_1 = 0$ , и изогнутая, но неустойчивая форма равновесия, соответствующая прогибу  $y_m = y'_2$ .

Совокупность кривых  $(\sigma_0, y_m)$ , рассчитанных для различных значений гибкости  $l/r$  и эксцентриситета  $e$ , в конечном счете представляет собой основу для табулирования значений критических средних напряжений  $\sigma_{кр} = P_{кр}/A$  в функции от  $l/r$  и  $e$ . На рис. 15 приведены значения критических средних напряжений  $\sigma_{кр} = P_{кр}/A$  в зависимости от гибкости  $l/r$  для различных значений отношения  $e/r$ . Таким образом, получается совокупность кривых критических напряжений сжатых стержней, ясно показывающая значительное влияние, которое оказывает эксцентриситет нагружения на несущую способность стержней. Кривые, приведенные на рис. 15, построены для стержней с прямоугольным поперечным сечением из строительной стали с пределом пропорциональности  $\sigma_{\pi} = 1900 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$  и пределом текучести  $\sigma_{\tau} = 2400 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ . Для коротких стержней и стержней средней длины величина эксцентриситета оказывает значительное влияние, но в упругой области выпучивания оно уменьшается с увеличением  $l/r$ . На рис. 16, на котором представлены значения отношения  $\beta = \sigma_{\text{кpo}}/\sigma_{\text{кр}}$  в зависимости от  $l/r$  ( $\sigma_{\text{кpo}}$  есть критическое среднее напряжение центрально сжатых стержней), отчетливо иллюстрируется это влияние.

## 11. Метод Вестергора и Осгуда

Проделанный в предыдущем параграфе анализ можно значительно упростить, если сделать некоторые допущения относительно формы кривой прогибов стержня. Поступая таким образом, Вестергор и Осгуд<sup>1)</sup> предположили, что упругую линию можно представить частью косинусоиды с длиной полуволны  $L$  (рис. 17). Используя приведенные выше основные уравнения (29), (30), (32) и (33), эти авторы поступили следующим образом:

Вводя значения радиуса инерции прямоугольного поперечного сечения  $r = h/\sqrt{12}$  и используя обозначения

$$R = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma_b (\varepsilon - \varepsilon_0) d\varepsilon \quad \text{и} \quad S = \frac{\sqrt{12} R}{\sigma_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2},$$

уравнение (33) можно привести к следующему виду:

$$\frac{e + y}{r} = S. \quad (35)$$

<sup>1)</sup> Вестергор и Осгуд, цит. выше, стр. 41.

Численные расчеты производятся так же, как изложено выше, путем расчета ряда распределений напряжений на основании данных диаграммы напряжения-деформации, получая, таким образом, ряд соответствующих значений для  $\sigma_0$ ,  $\epsilon_2 - \epsilon_1$ ,  $R$  и  $S$ .

Затем делается предположение, что упругая линия аппроксимируется с помощью следующего выражения:

$$e + y = \bar{y}_m \cos ax, \quad (36)$$

где  $\bar{y}_m = e + y_m$ , а  $a = \pi/L$  (рис. 17). Из этого уравнения получим:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2y}{dx^2} = \bar{y}_m a^2 \cos ax.$$

Следовательно, уравнение (29) принимает следующий вид:

$$\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{r\sqrt{12}} = \bar{y}_m a^2 \cos ax. \quad (37)$$

Затем, рассматривая стержень данной длины  $l$ , нагруженный силой  $P$ , задачу можно решить, найдя соответствующее максимальное значение эксцентриситета  $e$ , при котором еще возможно положение устойчивого равновесия. Из уравнения (36) при  $x = \frac{l}{2}$  имеем:

$$e = \bar{y}_m \cos \frac{al}{2}. \quad (38)$$

Условие  $\frac{de}{d\bar{y}_m}$  дает нам искомое максимальное значение. Принимая во внимание, что  $a$  есть функция от  $\bar{y}_m$  с производной  $a' = \frac{da}{d\bar{y}_m}$ , получим:

$$\frac{\bar{y}_m a'}{a} = \frac{1}{(al/2) \operatorname{tg} al/2}. \quad (39)$$

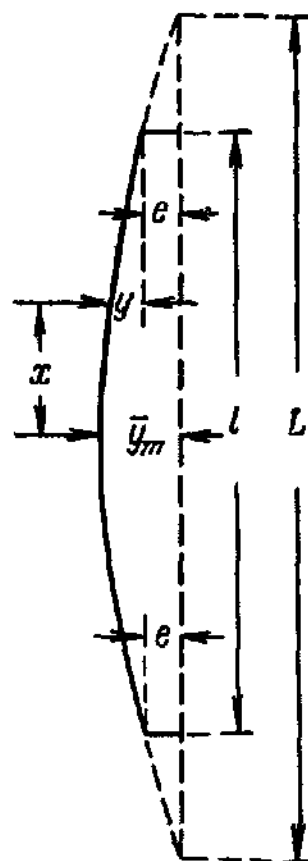


Рис. 17.

Поставленную задачу можно решить с помощью уравнений (35) — (39). При данном значении  $\sigma_0$  можно найти ряд значений  $\bar{y}_m$  и  $\pi/L$ , соответствующих различным значениям разности деформаций  $\epsilon_2 - \epsilon_1$ . После графического определения  $a'$  из кривой  $a = f(\bar{y}_m)$  и вычисления  $\bar{y}_m a'/a$  с помощью уравнений (38) и (39) можно графически вычислить отношения  $e/\bar{y}_m$  и величину  $al$ , а тем самым и значения  $e$  и  $l$ .

Вестергор и Осгуд исследовали также влияние начальной кривизны на предельную прочность центрально сжатых стержней. Предположив, что первоначальная упругая линия представляет собой плоскую и гладкую кривую и что добавочный прогиб  $y$ , вызванный нагрузкой  $P$ , можно аппроксимировать полуволной косинусоиды с длиной полуволны  $L$ , авторы в результате получили ряд кривых

критических напряжений для различных отношений  $e/r$ , где  $e$  обозначает начальный прогиб в середине стержня. Для проверки степени точности аппроксимирующей кривой в виде косинусоиды авторы повторяли вычисления, выражая  $u$  двухчленным рядом Фурье. В результате этих вычислений было установлено, что аппроксимация упругой линии косинусоидой приводит к результатам, лишь незначительно отличающимся от более точного решения. Упрощенные решения задачи приводят к более безопасным значениям критической силы.

## 12. Приближенное решение задачи устойчивости

Серьезные затруднения, являющиеся следствием сложного характера кривой зависимости между напряжением и деформацией, которые встречаются в вышеизложенном методе решения задачи об устойчивости внецентренно сжатых стержней, привели, естественно, к мысли о необходимости найти аналитическое решение задачи, основанное на некотором упрощенном соотношении между напряжениями и деформациями. Идея заключается в нахождении достаточно простых уравнений, определяющих соотношение между гибкостью  $l/r$  и критическим средним напряжением  $\sigma_{кр}$ .

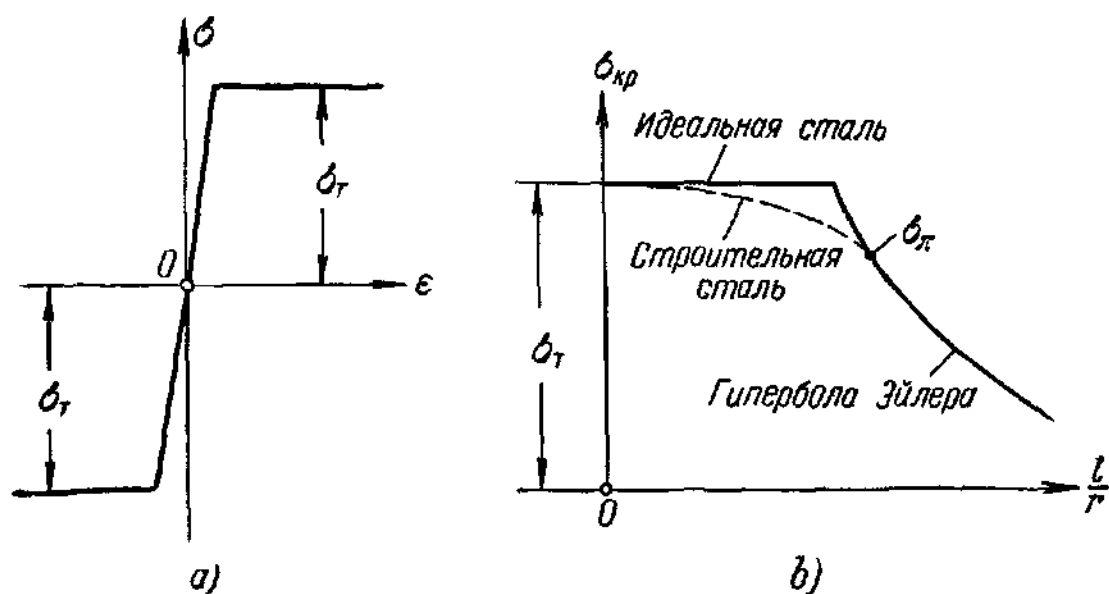


Рис. 18.

Этим вопросом занимался Ежек, который основывал свое исследование на диаграмме напряжения-деформации идеального упруго-пластического материала. Предполагается, что до предела текучести модуль упругости  $E$  остается постоянным, за пределом упругости  $E = 0$  (рис. 18, а). Допускается также, что пределы текучести при растяжении и сжатии равны. В этом случае кривая критических напряжений составляется из гипербола Эйлера и из прямой, проведенной на расстоянии  $\sigma_T$  от оси  $l/r$  (рис. 18, б). Для сравнения

на том же рисунке пунктиром проведена кривая критических напряжений для строительной стали. В результате с помощью такого упрощенного соотношения между напряжениями и деформациями можно получить аналитическое решение задачи устойчивости внецентренно и поперечно нагруженных сжатых стержней.

На основе вышеописанной упрощенной диаграммы зависимости между напряжением и деформацией Ежек<sup>1)</sup> в своем первом сообщении по этому вопросу дал точное решение задачи устойчивости. В двух последующих статьях<sup>2)</sup> он дал приближенный метод решения той же задачи и показал, что для практических целей этот метод дает удовлетворительные результаты. Предполагается, что ось изогнутого сжатого стержня является полуволной синуса. Это весьма грубое приближение, но характер большинства задач устойчивости таков, что ошибка в аппроксимировании формы кривой прогиба не влияет существенно на результаты исследования. С другой стороны, такое упрощение, касающееся формы кривой прогибов, дает возможность создать общий метод, пригодный как для внецентренно нагруженных, так и для поперечно нагруженных стержней, а также для первоначально изогнутых сжатых элементов. Общие положения этой приближенной теории приводятся в последующих параграфах.

Рассмотрим свободно опертый прямолинейный стержень прямоугольного поперечного сечения под действием осевой нагрузки  $P$  и

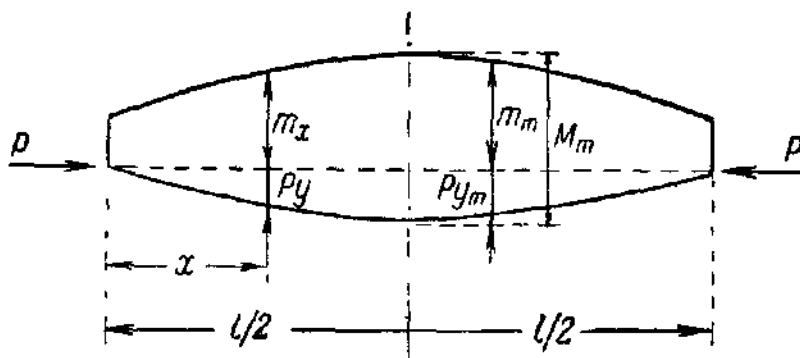


Рис. 19.

изгибающего момента  $m_x$ , изменяющегося вдоль длины стержня  $l$  согласно эпюре моментов, показанной на рис. 19. Предполагается, что эпюра моментов симметрична. Полный изгибающий момент в сечении, находящийся на расстоянии  $x$ , будет

$$M_x = m_x + P y.$$

<sup>1)</sup> Ежек, цит. выше, стр. 41.

<sup>2)</sup> Ježek K., Näherungsberechnung der Tragkraft exzentrisch gedrückter Stahlstäbe, Der Stahlbau, Bd 8, S. 89, 1935; Die Tragfähigkeit axial gedrückter und auf Biegung beanspruchter Stahlstäbe, Der Stahlbau, Bd 9, S. 12, 1936. Дополнительная литература по этому вопросу приводится в конце главы.

Предполагая, что упругая линия стержня является синусоидой

$$y = y_m \sin \frac{\pi x}{l},$$

определяем величину кривизны в середине стержня:

$$\frac{1}{\rho_m} = - \left[ \frac{d^2 y}{dx^2} \right]_{x=l/2} = \frac{\pi^2}{l^2} y_m. \quad (40)$$

Приравнявая выражение (40) к выражению для кривизны, полученному в результате рассмотрения распределения напряжений в поперечном сечении  $x = l/2$ , получим некоторое соотношение между прогибом  $y_m$  и средним напряжением  $\sigma_0 = P/A$ . В этом соотношении, однако, принимается во внимание только распределение напряжений в поперечном сечении в середине стержня. В этом сечении возможны два различных распределения напряжений, показанных на рис. 20, *a* и *b*.

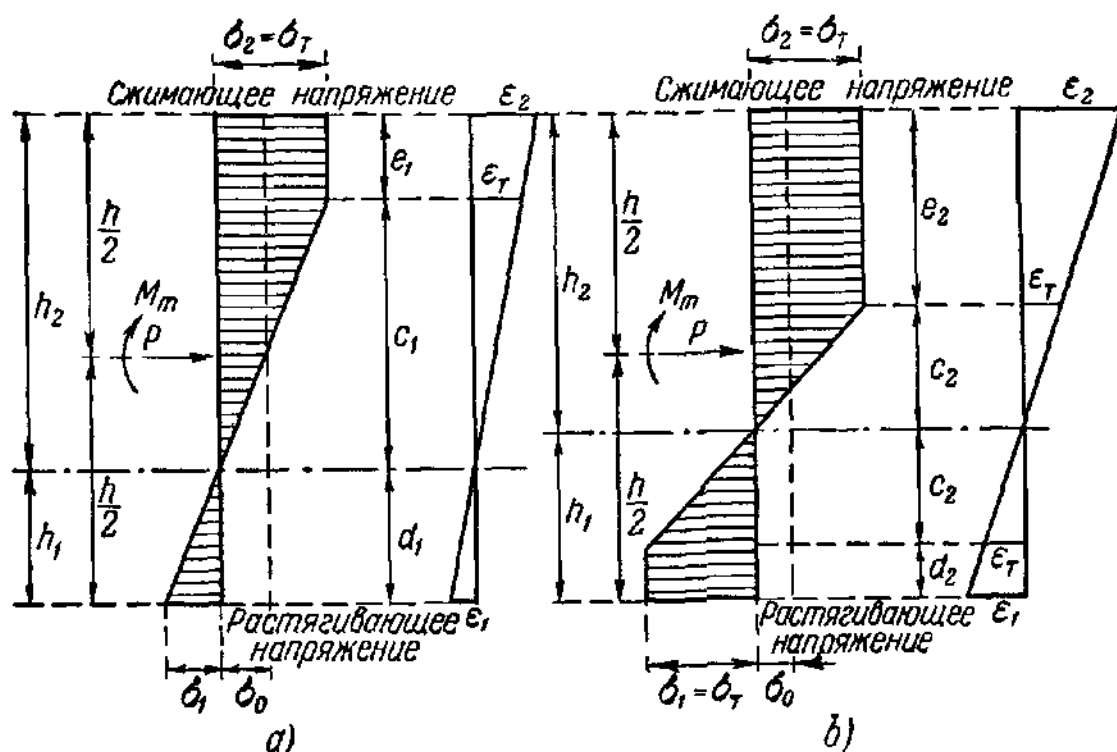


Рис. 20.

Случай I (рис. 20, *a*). Предел текучести достигается на вогнутой стороне изогнутого стержня, тогда как растягивающие напряжения на выпуклой стороне остаются в упругой области. Предполагается, что область текучести простирается на расстояние  $e_1$  внутрь поперечного сечения.

Случай II (рис. 20, *b*). Текучесть начинается одновременно в обеих сторонах поперечного сечения, причем предполагается, что она простирается соответственно на расстояние  $e_2$  и  $d_2$  внутрь поперечного сечения.



Сначала исследуем случай I. Условия равновесия между внутренними и внешними силами в поперечном сечении в середине стержня будут

$$b \int_{h_1}^{h_2} \sigma dz = P \quad \text{и} \quad b \int_{h_1}^{h_2} \sigma z dz = M_m,$$

где  $z$  обозначает расстояние волокна от оси  $\sigma_0$ . Так как переменное напряжение  $\sigma$  изменяется линейно (рис. 20, а), то данные выше интегралы легко вычислить. Таким образом, эти два уравнения образуют два соотношения, из которых можно определить расстояния  $e_1$  и  $d_1$ . Вводя среднее напряжение  $\sigma_0 = P/A$  и принимая  $e_1 + c_1 + d_1 = h$ , получим следующие два уравнения:

$$\frac{e_1}{h} = \frac{3M_m}{(\sigma_T - \sigma_0)bh^2} - \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{c_1}{h} = \frac{9\left(\sigma_T - \sigma_0 - \frac{2M_m}{bh^2}\right)}{8(\sigma_T - \sigma_0)^3} \sigma_T. \quad (41)$$

Из рис. 20, а следует

$$\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{h} = \frac{\epsilon_T}{c_1} = \frac{\sigma_T}{Ec_1}$$

и так как  $(\epsilon_2 - \epsilon_1)/h = 1/\rho_m$  [уравнение (29), стр. 43], то имеем:

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{\sigma_T}{Ec_1}.$$

Подставляя значение  $c_1$  из выражения (41), получим следующее выражение кривизны  $1/\rho_m$  в рассмотренном поперечном сечении:

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{2\sigma_0 \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_0} - 1\right)^3 h}{9E \left[ \frac{h}{2} \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_0} - 1\right) - \frac{M_m}{P} \right]^2}. \quad (42)$$

В результате, приравнявая уравнения (40) и (42), получим следующее соотношение между  $y_m$  и  $\sigma_0$ :

$$9Ey_m \left[ \frac{h}{2} \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_0} - 1\right) - y_m - \frac{m_m}{P} \right]^2 - 2\sigma_0 h \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_0} - 1\right)^3 \frac{l^3}{\pi^2} = 0, \quad (43)$$

где вместо  $M_m$  поставлено  $m_m + Py$ .

Уравнение (43) представляет собой аналитическое выражение кривых  $(y_m, \sigma_0)$ , которые можно построить для различных значений параметра  $m_m/P$ . Эти кривые аналогичны кривым, рассмотренным в §§ 10 и 11. Максимум каждой кривой определится условием  $\frac{d\sigma_0}{dy_m} = 0$ , которое приводит к квадратному уравнению относительно  $y_m$  для определения критического значения среднего напряжения  $\sigma_0$ :

$$3y_m^2 - 4y_m \left[ \frac{h}{2} \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_0} - 1\right) - \frac{m_m}{P} \right] + \left[ \frac{h}{2} \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_0} - 1\right) - \frac{m_m}{P} \right]^2 = 0.$$

Из этого соотношения можно получить критическое значение  $y_m$ , соответствующее критическому значению  $\sigma_0$ :

$$y_m = \frac{1}{3} \left[ \frac{h}{2} \left( \frac{\sigma_T}{\sigma_0} - 1 \right) - \frac{m_m}{P} \right]. \quad (44)$$

Подставляя выражение (44) в (43), окончательно получим следующее уравнение, связывающее критическое среднее напряжение  $\sigma_0 = \sigma_{кр}$  с гибкостью  $l/r$  для любого заданного значения параметра  $m_m/P$ :

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{(l/r)^2} \left( \frac{\frac{\sigma_T}{\sigma_{кр}} - 1 - \frac{2m_m}{Ph}}{\frac{\sigma_T}{\sigma_{кр}} - 1} \right)^3. \quad (45)$$

Случай II. Метод решения тот же, что и в предыдущем случае. Из условий равновесия можно определить расстояния  $c_2$ ,  $e_2$  и  $d_2$  на рис. 20, б:

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_2}{h} &= \sqrt{\frac{3}{4} \left( 1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_T^2} \right) - \frac{3M_m}{bh^2\sigma_T}}; \\ \frac{e_2}{h} &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sigma_0}{\sigma_T} \right) - \sqrt{\frac{3}{4} \left( 1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_T^2} \right) - \frac{3M_m}{bh^2\sigma_T}}; \\ \frac{d_2}{h} &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_T} \right) - \sqrt{\frac{3}{4} \left( 1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_T^2} \right) - \frac{3M_m}{bh^2\sigma_T}}. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Аналогичным способом, используя уравнение (29) из рис. 20, б, находим:

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{\sigma_T}{Ec_2}$$

и, подставляя значения  $c_2$  из первого уравнения (46), получим:

$$\frac{1}{\rho_m} = \sqrt{\frac{\sigma_T^3/3hE^2\sigma_0}{\frac{h\sigma_T}{4\sigma_0} \left( 1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_T^2} \right) - \frac{M_m}{P}}}. \quad (47)$$

Приравняв правые части выражений (40) и (47), приходим к следующему уравнению кривых ( $y_m$ ,  $\sigma_0$ ):

$$y_m \sqrt{\frac{h\sigma_T}{4\sigma_0} \left( 1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_T^2} \right) - y_m - \frac{m_m}{P}} - \frac{l^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\sigma_T^3}{3hE^2\sigma_0}} = 0. \quad (48)$$

Из условия  $\frac{d\sigma_0}{dy_m} = 0$  получим значение прогиба  $y_m$ , соответствующее критическому среднему напряжению  $\sigma_0$ :

$$y_m = \frac{h\sigma_T}{6\sigma_0} \left( 1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_T^2} \right) - \frac{2m_m}{3P}. \quad (49)$$

Подставляя значения  $y_m$  из уравнения (49) в (48), получим в результате следующее соотношение, связывающее критическое среднее напряжение  $\sigma_0 = \sigma_{кр}$  с гибкостью  $l/r$  для любого заданного значения параметра  $m_m/P$ :

$$\sigma_{кр} = \frac{\left[ \frac{l/r}{\pi^2 E} \right]^3 \sigma_T^3}{\left( \frac{\sigma_T}{\sigma_{кр}} - \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_T} - \frac{4m_m}{Ph} \right)^3}. \quad (50)$$

С помощью формул (45) и (50) можно непосредственно вычислить значения критической гибкости  $l/r$ , соответствующие заданным значениям «эквивалентного эксцентриситета»  $e = m_m/P$  и критического среднего напряжения  $\sigma_{кр}$ . В целях применения этих двух формул в случае других видов поперечного сечения, отличных от прямоугольного, удобно выразить  $h$  через радиус ядра  $S = h/6$  прямоугольного поперечного сечения. Вводя относительный эксцентриситет

$$k = \frac{e}{S} = \frac{m_m}{Ps} \quad (51)$$

в уравнения (45) и (50) и решая полученное уравнение относительно  $l/r$ , найдем:

$$\left( \frac{l}{r} \right)^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{кр}} \left[ \frac{3 \left( \frac{\sigma_T}{\sigma_{кр}} - 1 \right) - k}{3 \left( \frac{\sigma_T}{\sigma_{кр}} - 1 \right)} \right]^3, \quad (52)$$

если  $\left( \frac{l}{r} \right)^2 - \frac{\pi^2 E k^3}{9\sigma_T (3-k)} > 0$  (распределение напряжений, случай I),  
и

$$\left( \frac{l}{r} \right)^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_T} \sqrt[3]{\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_T} \left( \frac{\sigma_T}{\sigma_{кр}} - \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_T} - \frac{2}{3} k \right)}, \quad (53)$$

если  $\left( \frac{l}{r} \right)^2 - \frac{\pi^2 E k^3}{9\sigma_T (3-k)} < 0$  (распределение напряжений, случай II).

Для больших значений эксцентриситета ( $k \geq 3$ ) нужно использовать уравнение (53), так как в этом случае распределение напряжений в среднем сечении стержня такое же, как рассмотрено в случае II.

Алгебраические формулы Ежека не дают непосредственно значения критического напряжения  $\sigma_{кр} = P_{кр}/A$  в функции от  $l/r$ . Для заданного материала прежде всего необходимо составить таблицу подходящих выбранных значений  $l/r$  в функции  $\sigma_{кр}$  и  $k$ , после чего можно легко построить кривые критических напряжений сжатых стержней или вычислить таблицу, дающую критическое среднее напряжение в функции от гибкости  $l/r$  для различных значений относительного эксцентриситета  $k$ . Эти кривые критических напряжений, по существу, имеют тот же вид, что и кривые, полученные в результате применения точной теории, как показано на рис. 15. В таблице 1 приведены значения  $\sigma_{кр}$  в табулированном виде. Эта

Таблица 1. Значения критических напряжений  $\sigma_{кр} = P_{кр}/A$  в  $\text{кг/см}^2$  для внецентренно сжатых стержней из строительной стали ( $\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$ )

$l/r$	Относительный эксцентриситет $k=e/s$														
	0	0,10	0,175	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
20	2400	2287	2209	2139	1927	1757	1616	1503	1397	1291	1207	1051	946	840	762
30	2400	2266	2181	2096	1856	1687	1546	1426	1327	1235	1150	1009	903	804	734
40	2400	2238	2139	2047	1786	1609	1468	1341	1249	1164	1094	960	854	769	698
50	2400	2209	2089	1976	1715	1524	1383	1270	1171	1101	1030	910	811	734	663
60	2400	2160	2026	1899	1623	1433	1299	1193	1101	1030	974	854	769	691	635
70	2400	2075	1948	1821	1524	1341	1214	1115	1030	960	910	804	727	656	600
80	2400	1976	1835	1694	1426	1256	1136	1044	960	903	854	755	684	621	571
90	2400	1835	1694	1553	1313	1164	1051	967	896	847	790	713	642	593	543
100	2089	1659	1532	1426	1207	1073	974	896	833	783	734	663	600	550	515
110	1729	1468	1376	1284	1094	981	896	826	769	720	684	621	564	522	480
120	1454	1284	1214	1143	1002	889	826	762	713	670	635	578	529	494	451
130	1235	1229	1073	1023	903	811	755	706	663	621	593	543	501	458	430
140	1066	995	953	917	811	741	691	649	614	578	550	508	473	430	402
150	924	875	847	811	734	684	635	593	564	536	508	473	444	402	381
160	818	783	755	734	663	621	578	550	522	501	473	444	409	381	360

таблица вычислена Ежеком на основе уравнений (52) и (53) для строительной стали с пределом текучести  $\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$ .

Теперь возникает необходимость выявить степень приближения, введенного при использовании идеализированной диаграммы напряжения-деформации. Расхождение между значениями критических напряжений  $\sigma_{кр}$ , вычисленных по приближенной теории, и значениями, определенными при помощи действительной диаграммы зависимости между напряжением и деформацией для строительной стали, становится заметным при малых значениях  $k$  и достигает максимума, когда  $k$  приближается к нулю, но оно быстро уменьшается, когда величина относительного эксцентриситета возрастает.

Из рис. 21 видно, что те части кривых критических напряжений больше всего не соответствуют точным кривым, которые находятся ниже точки  $A$ , что является следствием различия, наблюдаемого в этой области между действительной и идеализированной диаграммами зависимости между напряжением и деформацией. В следующем параграфе разбирается простой способ уточнения значения  $\sigma_{кр}$  в этой области с помощью поправочного коэффициента.

В результате внесения поправки наибольшая ошибка, содержащаяся в аналитических результатах приближенного метода, становится величиной, сравнимой с неизбежными колебаниями значения предела текучести в любой стальной конструкции. Следовательно, аналитические результаты, полученные из вышеизложенной приближенной теории, позволяющей сравнительно быстро произвести вычисление кривых критических напряжений для любого материала с ясно выраженной площадкой текучести, могут служить основой для метода расчета внецентренно сжатых элементов.

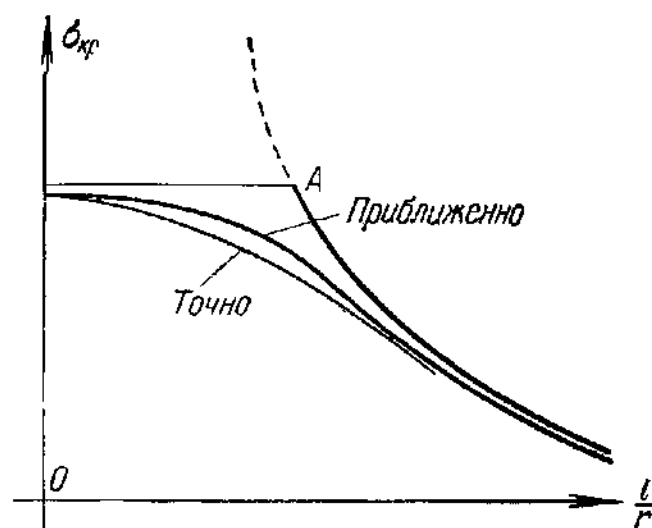


Рис. 21.

### 13. Метод расчета внецентренно сжатых стержней

Ниже в общих чертах приводится практический метод расчета внецентренно или поперечно нагруженных стержней, а также стержней с начальной кривизной. Для этой цели введем при расчете стержней использованное в предыдущем параграфе соотношение

$$\beta = \frac{\sigma_{кр0}}{\sigma_{кр}}, \quad (54)$$

где  $\sigma_{кр0}$  — критическое напряжение при  $k=0$ . Предположим, что коэффициент  $\beta$ , вычисленный по приближенной теории, с достаточной для практических целей точностью описывает соотношение между  $\sigma_{кр0}$  — критическим напряжением для центрально сжатого стержня и  $\sigma_{кр}$  — критическим напряжением для внецентренно сжатого стержня. Последнее можно написать так:

$$\sigma_{кр} = \frac{\sigma_{кр0}}{\beta}, \quad (55)$$

где  $\sigma_{кр0}$  теперь обозначает критическое среднее напряжение центрально сжатого стержня, полученное на основе действительной кривой критических напряжений. Разделив обе части уравнения (55)

на коэффициент безопасности, получим следующее соотношение между допускаемыми напряжениями:

$$F' = \frac{F}{\beta}, \quad (56)$$

где  $F$  — допускаемое напряжение для центрально сжатого стержня, тогда как  $F'$  представляет собой допускаемое напряжение для внецентренно или поперечно нагруженного стержня. Нужно заметить, что уравнение (56) дает допускаемое среднее напряжение  $F' = P/A$ , а не максимальное фибровое напряжение. Значения коэффициента  $\beta$  можно легко вычислить, разделяя значения, приведенные в первом столбце таблицы 1 ( $k=0$ ), на соответствующие значения в остальных столбцах.

Характер  $\beta$ -кривых можно видеть из рис. 22, где представлены значения  $\beta$  в зависимости от  $l/r$  для  $k=2$ . При  $l/r=93$  на кривой

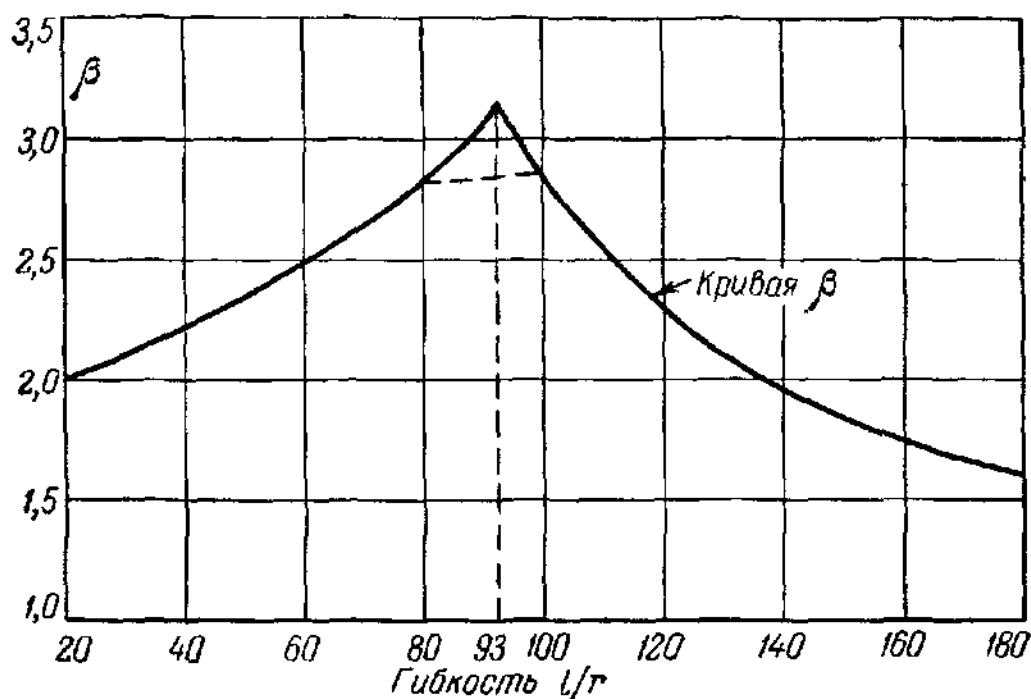


Рис. 22.

значений  $\beta$  имеет место резкий разрыв непрерывности в производной, который обусловлен кривой критических напряжений при  $k=0$ . Отрезая прямой линией в точках между значениями  $l/r=80$  и  $100$  вершину кривой, мы тем самым ликвидируем влияние не имеющего места в действительности разрыва, и  $\beta$ -кривая примет форму, достаточно хорошо совпадающую с кривыми, полученными на основе точной теории.

В целях облегчения применения метода коэффициента  $\beta$  в практических расчетах удобно вместо семейства  $\beta$ -кривых, построенных для разных эксцентриситетов, пользоваться простыми алгебраическими формулами, достаточно точно описывающими эти кривые. Автор предлагает пользоваться такими формулами, так как они

дают возможность быстро вычислить коэффициент  $\beta$ , не прибегая к сложному процессу двойного интегрирования. Для мягкой стали

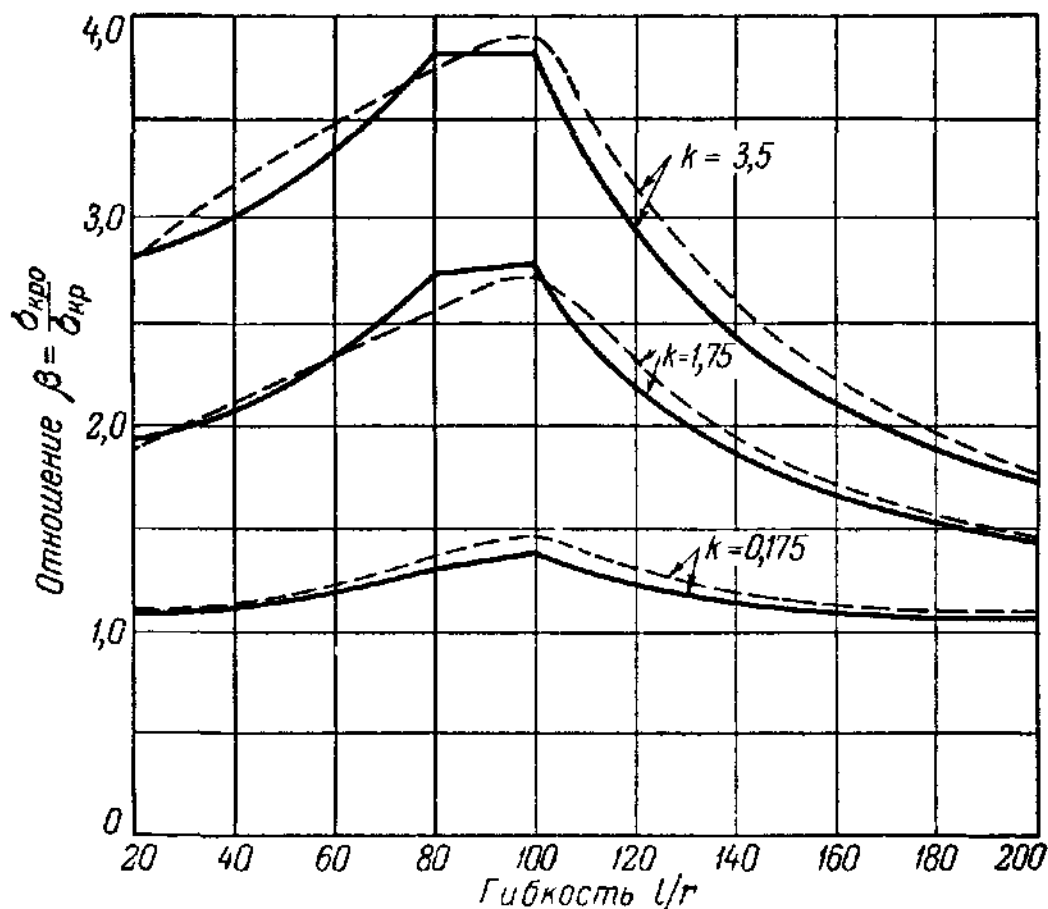


Рис. 23.

$\sigma_T = 2400$  и  $2824 \text{ кг/см}^2$ ) и высокопрочной углеродистой стали ( $\sigma_T = 3530 \text{ кг/см}^2$ ) установлены следующие формулы:

Строительная сталь ( $\sigma_T = 2400 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ ):

$$\left. \begin{aligned} \text{для } \frac{l}{r} = 20 \text{ до } 80 \quad \beta &= \left(1 + \frac{k}{r}\right) + \frac{\sqrt{k}}{10\,000} \left(\frac{l}{r}\right)^2; \\ \text{для } \frac{l}{r} = 100 \text{ до } 200 \quad \beta &= 1 + \frac{12\,200 \sqrt{k^3}}{(l/r)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

При значении  $80 < l/r < 100$  нужно линейно интерполировать значения  $\beta_{80}$  и  $\beta_{100}$ .

Строительная сталь ( $\sigma_T = 2824 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ ):

$$\left. \begin{aligned} \text{для } \frac{l}{r} = 20 \text{ до } 75 \quad \beta &= \left(1 + \frac{k}{r}\right) + \frac{\sqrt{k}}{9000} \left(\frac{l}{r}\right)^2; \\ \text{для } \frac{l}{r} = 95 \text{ до } 200 \quad \beta &= 1 + \frac{10\,600 \sqrt{k^3}}{(l/r)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

При значении  $75 < l/r < 95$  нужно линейно интерполировать значения  $\beta_{75}$  и  $\beta_{95}$ .

*Высокопрочная углеродистая сталь* ( $\sigma_T = 3530 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ ):

$$\left. \begin{aligned} \text{для } \frac{l}{r} = 20 \text{ до } 70 \quad \beta &= \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \frac{\sqrt{k}}{7000} \left(\frac{l}{r}\right)^3; \\ \text{для } \frac{l}{r} = 90 \text{ до } 200 \quad \beta &= 1 + \frac{8400 \sqrt{k^3}}{(l/r)^3}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

При значении  $70 < l/r < 90$  интерполируют значения  $\beta_{70}$  и  $\beta_{90}$ .

Из выражений (57) — (59) можно для заданных значений  $k$  и  $l/r$  непосредственно вычислить  $\beta$ . Затем из уравнений (55) и (56) получим значения критического напряжения и допускаемого напряжения для внецентренно сжатого стержня.

На рис. 23 показаны три  $\beta$ -кривые, построенные на основе уравнений (57) при значениях  $k = 0,175$ ; 1,75 и 3,5. Для сравнения пунктирной линией указаны точные значения  $\beta$ , взятые из рис. 16<sup>1)</sup>. Расхождение между двумя семействами кривых уменьшается при уменьшении  $k$ .

#### 14. Влияние формы поперечного сечения на прочность сжатых стержней

До сих пор мы рассматривали сжатые стержни с прямоугольными поперечными сечениями, поэтому теперь возникает вопрос, можно ли использовать уравнения (57) — (59) в случае других форм поперечного сечения, обычно применяющихся в стальных конструкциях. Тщательные аналитические исследования и сравнительные вычисления, проведенные Хвалла<sup>2)</sup>, Ежеком<sup>3)</sup> и Фричем<sup>4)</sup>, показывают, что прочность сжатого стержня существенно зависит от формы поперечного сечения. Как правило, поперечные сечения, у которых материал концентрируется около центра тяжести (например, крестовое сечение), показывают большую прочность, чем те сечения, где материал расположен на некотором расстоянии от центра (*H*-образные сечения при выпучивании в плоскости стенки). Прямоугольные поперечные сечения лежат между этими двумя крайними случаями. Следовательно, необходимо учитывать, по крайней мере приблизительно, влияние формы поперечного сечения. Это можно свести к умножению относительного эксцентриситета  $k$  на коэффициент  $\rho$ ,

1) Относительные эксцентриситеты на рис. 16 равны:  $e/r = 0,1$ ; 1,0 и 2,0 и почти точно совпадают со значениями  $k = e/s$ , приведенными выше.

2) Ch walla E., Der Einfluss der Querschnittsform auf das Tragvermögen aussermittig gedrückter Baustahlstäbe, Der Stahlbau, т. 8, стр. 193, 1935.

3) Jezek K., Die Festigkeit aussermittig gedrückter Stahlstäbe beliebiger Querschnittsform, Der Bauingenieur, т. 17, стр. 306, 1936.

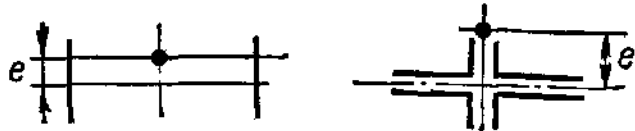
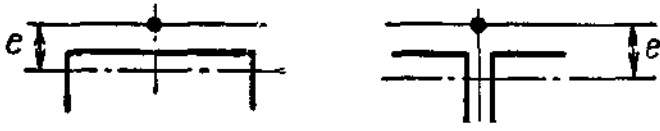
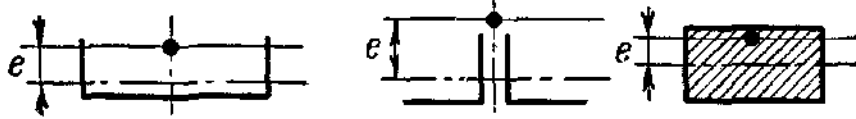
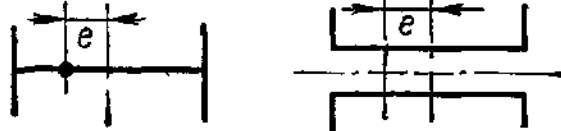
4) Fritsche J., Näherungsverfahren zur Berechnung der Tragfähigkeit aussermittig gedrückter Stäbe aus Baustahl, Der Stahlbau, т. 8, стр. 137, 1935.



зависящий от геометрической формы поперечного сечения, и при применении формул (57) — (59) подставить значения  $\mu k$  вместо  $k$ .

В таблице 2 приведены средние значения коэффициента  $\mu$  для различных поперечных сечений, заимствованные из исследований

Т а б л и ц а 2

Форма поперечного сечения	$\mu$
	0,75
	0,80
	1,0
	1,3

Хвалла и Фрича. Эти значения коэффициента  $\mu$  нужно рассматривать как грубо приближенные, так как влияние формы поперечного сечения на выпучивание внецентренно сжатых стержней в достаточной степени не выяснено.

### 15. Формула секанса

Было сделано много попыток трактовать задачу о внецентренно сжатых стержнях как задачу о напряжениях, считая, что разрушающей нагрузкой является нагрузка, вызывающая текучесть в наиболее сжатых волокнах. Предположим, что модуль упругости остается постоянным до достижения предела текучести. Тогда получаем следующее уравнение для прогиба упругой линии:

$$y = \left[ \frac{\cos \alpha \left( \frac{l}{2} - x \right)}{\cos \frac{\alpha l}{2}} - 1 \right] e \quad \text{и} \quad \alpha = \sqrt{\frac{P}{EJ}},$$

где  $e$  обозначает эксцентриситет приложения нагрузки  $P$ . Для наибольшего напряжения в среднем сечении сжатого стержня имеем следующую формулу:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P(y_m + e)}{J} c, \quad (60)$$

где  $y_m$  есть прогиб этого сечения;  $c$  — расстояние крайних волокон от осевой линии. Вводя выражение

$$y_m = \left( \frac{1}{\cos \frac{\alpha l}{2}} - 1 \right) e$$

в уравнение (60) и заменяя  $J$  через  $Ar^2$ , получаем так называемую формулу секанса:

$$\sigma = \frac{P}{A} \left( 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \frac{l}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right). \quad (61)$$

Предельная нагрузка сжатого стержня  $P_{кр}$ , т. е. нагрузка, вызывающая напряжение текучести  $\sigma = \sigma_T$ , определяется из уравнения (61). Тогда критическое среднее напряжение будет  $\sigma_{кр} = P_{кр}/A$ , а допускаемая нагрузка на сжатый стержень  $P_{кр}/n$ , где  $n$  представляет собой коэффициент безопасности.

Можно легко видеть взаимосвязь между значениями действительной критической силы и критической силы, данной уравнением (61),

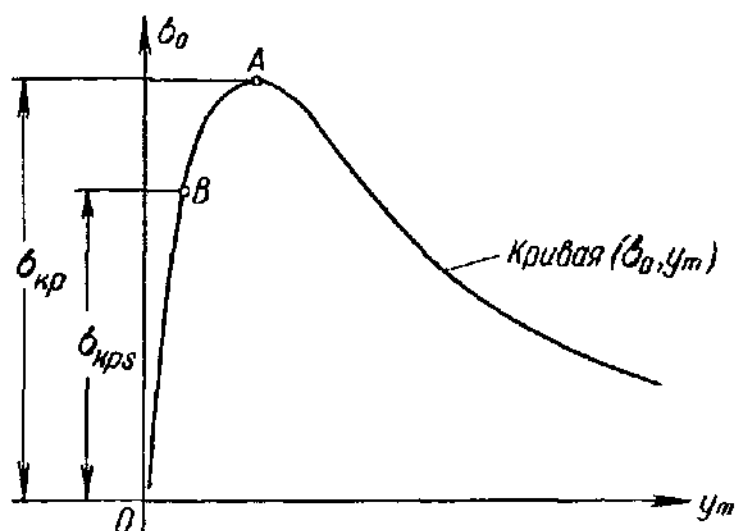


Рис. 24.

если снова рассмотреть кривые  $(\sigma_0, y_m)$ , полученные, например, методом, рассмотренным в § 12. На рис. 24 точка  $B$  соответствует значению  $P/A$ , при котором в наиболее напряженных волокнах сжатого изогнутого стержня достигается предел текучести. Следовательно, ордината  $\sigma_{крз}$  точки  $B$  дает критическое значение  $P_{кр}/A$  согласно формуле секанса, между тем как действительное значение

критического напряжения определяется ординатой наивысшей точки  $A$  кривой  $(\sigma_0, y_m)$ . Расхождение между двумя значениями  $\sigma_{крз}$  и  $\sigma_{кр}$  в большой степени зависит от формы поперечного сечения, гибкости  $l/r$  и относительного эксцентриситета  $ec/r^2$ . Различие становится значительным, когда выпучивание происходит так, что узкие края выступающих полок подвержены наибольшему напряжению сжатия. Расхождение становится сравнительно малым, когда наибольшее напряжение имеет место вдоль всей ширины полки  $H$ -образных сжатых стержней. Для коротких сжатых стержней и для некоторых форм поперечного сечения эта разница может составить 30—40% значения действительной критической силы (см. рис. 26).

Большое внимание, которое инженеры уделяли и до сих пор уделяют формуле секанса, можно объяснить тем, что при малых

значениях эксцентриситета эта формула для центрально сжатых стержней дает кривую критических напряжений, которая достаточно точно совпадает со значениями  $P/A$ , полученными из опытов над сжатыми стержнями при условии, если «эквивалентный эксцентриситет»  $e$  в уравнении (61) подобран произвольно, но в соответствии с этими опытами. Этот факт можно считать удачным совпадением, но он не способствует тому, чтобы концепцию, на которой основана формула секанса, можно было считать рациональной для решения задач о выпучивании стержней. В этой теории определение разрушающей нагрузки основывается на произвольно выбранном критерии, не имеющем никакого отношения к существу задачи, трактуемой как задача об устойчивости.

Это объясняет то большое расхождение, которое во многих случаях имеется между значениями, полученными по теории, основанной на понятии формулы секанса и значением действительной критической силы.

## 16. Опыты над внецентренно сжатыми стержнями

Как было отмечено в § 9, Рош и Бруннер для проверки своего метода расчета поставили серию опытов, исследуя двутавровые балки № P22 и P32 (стандартные балки с высотами 220 и 320 мм) для эксцентриситетов  $k=0, 1$  и 3. Плоскость нагружения была перпендикулярна к плоскости стенки: таким образом, выпучивание во всех случаях происходило в плоскости нагружения. Исследование было основано на диаграмме напряжения-деформации, полученной из опытов на растяжение, показавшей следующие механические характеристики:  $\sigma_{\pi} = 1765 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$  и  $\sigma_{\tau} = 2682 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ . Кривая критических напряжений, построенная по уравнению (58), и результаты опытов приведены на рис. 25. Наблюдаемые значения  $\sigma_{кр}$  в достаточной степени соответствуют построенным кривым.

Другая серия опытов была поставлена Грюнингом<sup>1)</sup>. Были проведены пять экспериментов с двутавровыми сжатыми стержнями крестообразного и ||-образного поперечного сечения со значениями гибкостей, лежащими между 52 и 75. Относительный эксцентриситет  $k$  в одном опыте составлял  $k=0,38$ , в других случаях  $k=1$ . Наблюдаемые значения прочности сжатого стержня находятся в хорошем соответствии со значениями  $\sigma_{кр}$ , вычисленными по теории Кармана—Хвалла с учетом действительной формы поперечного сечения.

Недавно проведенные опыты с 93 H-образными сжатыми стержнями представляют собой замечательный вклад в дело эксперимен-

---

<sup>1)</sup> Gr ü n i n g G., Der Stahlbau, т. 8, стр. 17, 1936.

тального изучения задачи о внецентренно сжатых стержнях<sup>1)</sup>. Опыты проводились с двутавровыми сжатыми стержнями (с высотой в сечении 76 мм и погонным весом 8,5 кг/м), с ножовыми опорами для различных значений гибкости от 26 до 126 и относительного

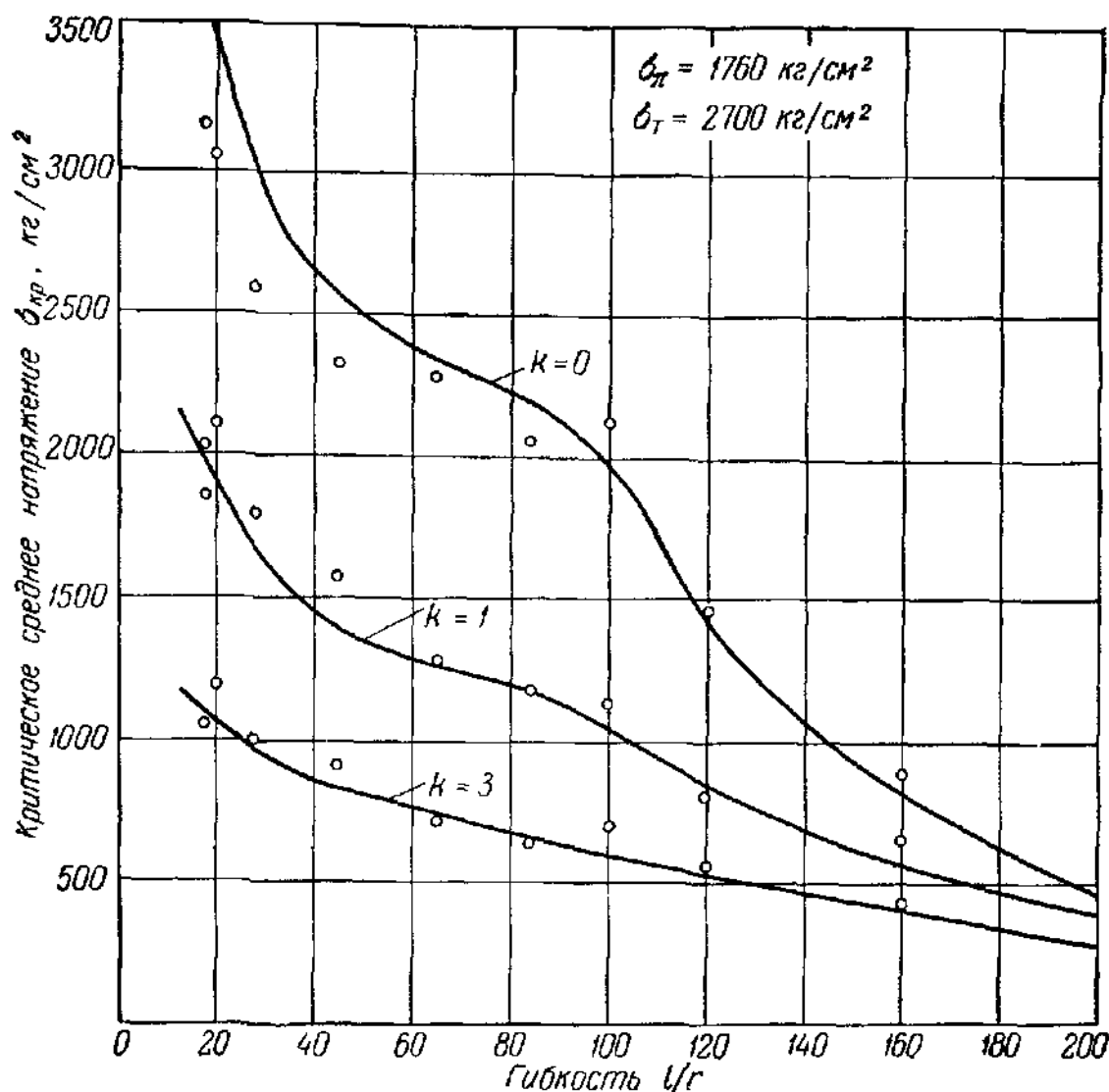


Рис. 25.

эксцентриситета  $k = 0, 0,5; 1; 1,5; 2; 3; 5; 7$ . Та же самая программа опытов была осуществлена в плоскостях наименьшей и наибольшей жесткости. В связи с тем, что стержни, которые внецентренно нагружались в плоскости стенки, обычно теряют устойчивость вследствие бокового крутильного выпучивания, в последующем изложении мы рассмотрим только те опыты, где момент эксцентриситета лежит в плоскости, перпендикулярной к плоскости стенки.

На рис. 26 представлены результаты 18 опытов с эксцентриситетами  $k = 0$  и 1. Результаты опытов с центрально нагруженными стержнями использовались для проведения гладкой кривой крити-

<sup>1)</sup> Johnston B. G., Cheney L., Steel Columns of Rolled Wide Flange Section, Committee on Tech. Research, Am. Inst. Steel Construction, Progress Rept. 2, 1942.

ческих напряжений (кривая А на рис. 26), аппроксимирующей наблюдаемые значения ( $\sigma_{кр}$ ,  $l/r$ ). Кривая А представляет собой значения

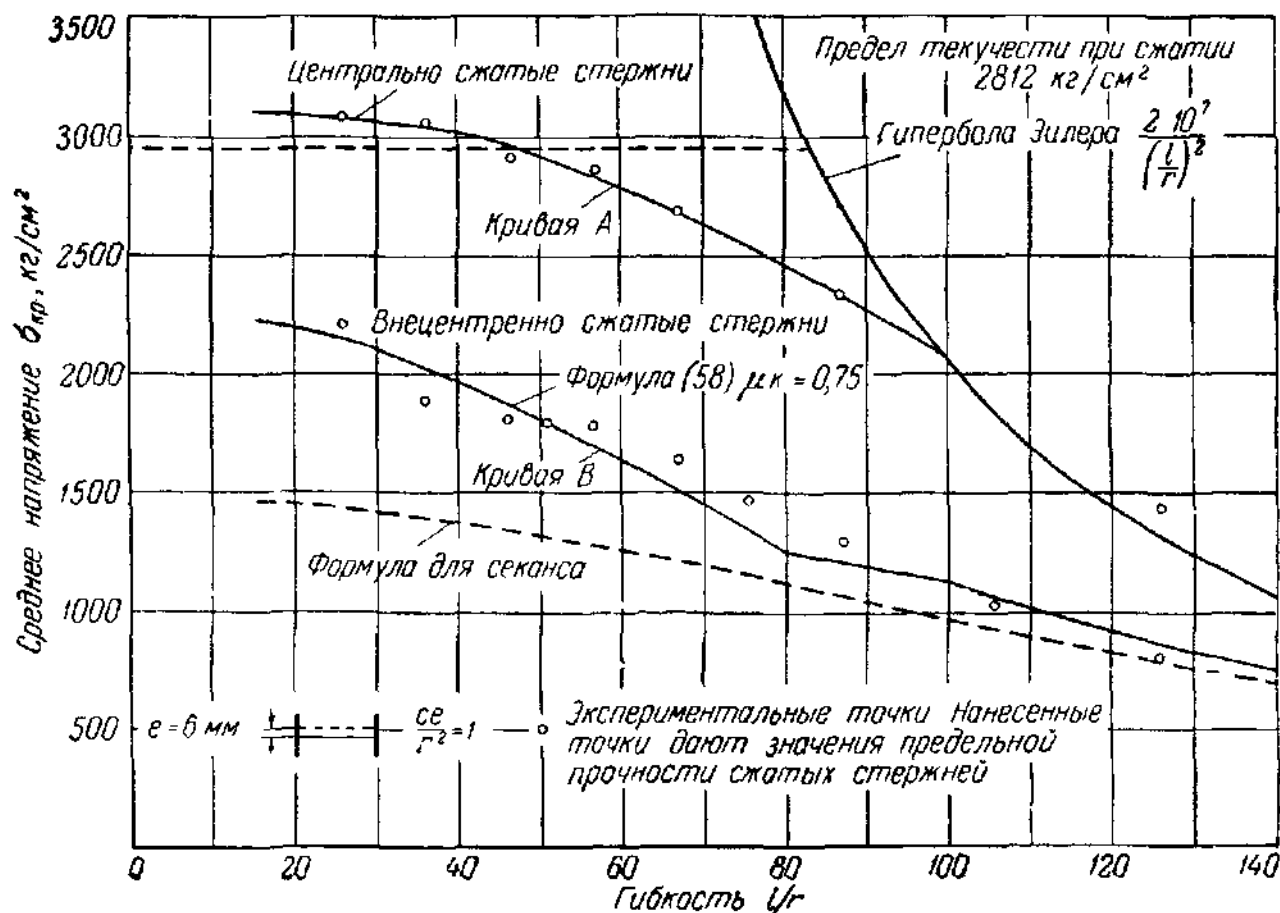


Рис. 26.

$\sigma_{кр 0}$  в уравнении (55). Применяя вышеизложенный метод коэффициента  $\beta$ , на основе уравнения  $\sigma_{кр 0}/\beta$ , получаем кривую В для  $k = 1$ , где значение  $\beta$  вычислено согласно уравнению (58). Предполагается, что коэффициент  $\mu$  равен 0,75. Принимая во внимание неизбежные отклонения в свойствах материала, можно предполагать, что кривая В, полученная на основе рациональной концепции § 13, вполне соответствует данным, полученным из опытов. Для сравнения на рис. 26 показана кривая критических напряжений, построенная на основе формулы для секанса при  $k = 1$ . На рис. 27 приведены кривые критических напряжений, построенные исходя из основной кривой А

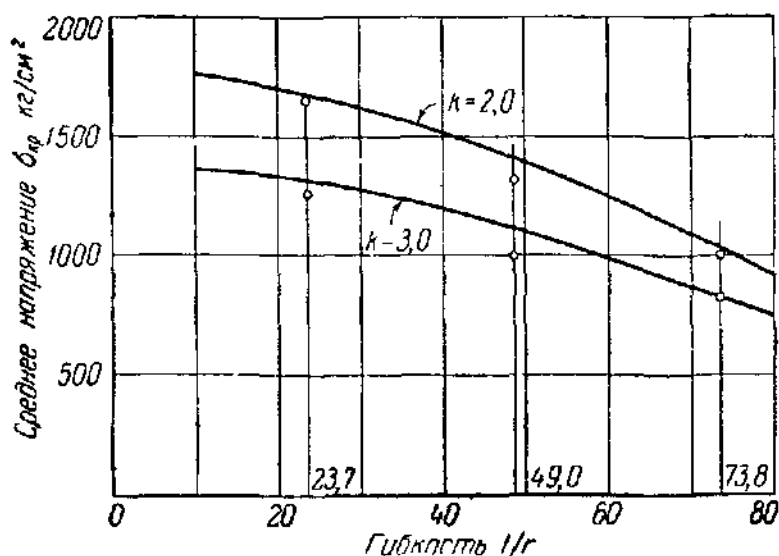


Рис. 27.

рис. 26 для значений  $k=2$  и  $k=3$ , а также наблюдаемые значения  $\sigma_{кр}$  при  $k=2$  и  $k=3$ . Экспериментальные точки лежат довольно близко к  $\sigma_{кр}$ -кривым.

### 17. Дальнейшее развитие теории внецентренно сжатых стержней

Обзор теории внецентренно или поперечно нагруженных сжатых элементов, изложенных в этой главе, показывает, что найдено рациональное решение задачи, рассматриваемой как задача устойчивости. Однако трудности при вычислениях, вытекающих из точной теории, делают почти невозможным практическое использование этой теории. Поэтому особое значение придавалось разработке приближенного метода, основанного на идеализированной диаграмме напряжения-деформации, который приводит к алгебраическому соотношению между средним критическим напряжением, гибкостью и эксцентриситетом, создавая основу для получения простых расчетных формул. Этот метод применяется к материалам, имеющим ясно выраженный предел текучести. Сравнение результатов приближенной теории с результатами, полученными на основе точной теории, и результатами опытов показывает, что лежащее в основе приближенной теории упрощение, введенное вследствие идеализации диаграммы зависимости между напряжением и деформацией, оправдано и что эта теория является совершенно надежной.

Однако в теории внецентренного выпучивания, рассмотренной в этой главе, исследуются только свободно опертые стержни. Действительные же сжатые стержни обычно соединены со смежными элементами конструкции, поэтому их нужно рассматривать как сжатые стержни с упруго заделанными концами. Хвалла был единственным, кто в некоторых своих работах рассматривал влияние концевых заделок на разрушающую нагрузку внецентренно нагруженных стержней. На основе его вычислений можно заключить, что концевые заделки существенно уменьшают влияние момента от эксцентриситета на критическую силу. Этот факт становится вполне понятным, если учесть, что значительная часть действующего момента от эксцентриситета может непосредственно передаваться смежным подкрепленным элементам. Величина передаваемого момента увеличивается с увеличением степени заделки. Необходимо дополнительное исследование в этой области, поскольку оно выяснило бы поведение внецентренно сжатых элементов при условиях, встречающихся в действительных металлических конструкциях. Приближенная теория Ежека может оказаться удобной для систематического изучения влияния упругих концевых заделок сжатых стержней. Всестороннее исследование внецентренно нагруженных стержней с заделанными концами является первым шагом в изучении поведения сжатых стержней как элемента жесткой рамы или в оценке

влияние вторичных напряжений на устойчивость сжатых элементов ферм. Результаты подобного исследования, вероятно, покажут, что влияние начального эксцентриситета осевой нагрузки или начальной кривизны на устойчивость сжатого стержня вследствие концевых условий, встречающихся в обычных металлических конструкциях, значительно переоценивается.

### **18. Сжатый стержень как элемент конструкции. Основы расчета сжатых стержней**

Сжатые стержни, использованные в металлических конструкциях, значительно отличаются от идеализированных сжатых стержней, которые до сих пор рассматривались в этой главе. Существует множество факторов, влияющих на предельную прочность сжатых стержней, которые являются неотъемлемыми частями инженерных сооружений:

1. Влияние на сжатый стержень условий непрерывности в рамных конструкциях.

2. Влияние эксцентриситета осевой нагрузки.

3. Влияние изгибающих моментов, передаваемых на концы сжатого стержня от смежных конструктивных элементов, вследствие жесткости узлов рамных конструкций.

В последующем изложении предполагается, что случайные несовершенства сжатого стержня, такие, как неоднородность материала, отклонение от предполагаемой геометрической формы (начальная кривизна), непредвиденные эксцентриситеты осевой нагрузки, обусловленные неизбежными неточностями при изготовлении и монтаже, учитываются соответствующим выбором коэффициента безопасности.

Каждый из перечисленных выше факторов изменяется в широких пределах и в каждом отдельном случае комбинируется с другими определенным образом. Следовательно, в каждом частном случае для определения действительной несущей способности сжатого элемента как части конструкции требуются: 1) установление приведенной длины сжатого стержня с учетом условий непрерывности на концах, зависящих от жесткостей смежных элементов и действующих на них нагрузок; 2) оценка любого возможного влияния эксцентриситета, возникающего вследствие наличия изгибающих моментов от жесткости узлов или внецентренной передачи сжимающей нагрузки от смежных элементов конструкции.

Очень удачно, что в большинстве практических случаев влияние вышеупомянутых факторов на поведение сжатого стержня можно определить эффективными методами и привести результаты исследования к простым правилам проектирования, формулам или численным таблицам для использования в практических расчетах. В этой главе мы рассмотрели основные задачи, связанные с влиянием эксцентриситета. Последующие главы посвящены

изложению теоретических и лабораторных исследований о поведении сжатых стержней в фермах и жестких рамах. Эти теории служат основой для получения упрощенных методов расчета.

Выше было указано, что каждый отдельно взятый сжатый элемент в металлической конструкции нужно рассматривать как частный случай и рассчитывать в соответствии с особенностями его нагружения и концевых условий, основывая этот расчет на идеальной кривой критических напряжений, рациональным образом установленной и рассмотренной в § 7. При таком методе расчета сжатых стержней идеальная кривая критических напряжений представляет собой не что иное, как графическое (или табулированное) выражение влияния упруго-пластических свойств материала на прочность сжатого стержня. Не существует никакой логической причины для того, чтобы учитывать в формуле для сжатых стержней любой из случайных факторов, влияющих на устойчивость, таких, как случайные эксцентриситеты или начальная кривизна. Эти отклонения более целесообразно учитывать при помощи коэффициента безопасности. Нужно помнить, что сама задача о сжатом стержне, как она рассматривалась нами ранее, является лишь частью ряда задач об устойчивости, возникающих при проектировании конструкции. Не только логично, но и удобно во всех случаях потери устойчивости основывать расчет на данных одной и той же кривой критических напряжений. Поэтому важно, чтобы эта основная характеристика, которая определяет поведение любого сжатого элемента конструкции, не искажалась каким-нибудь частным фактором, важным для одного типа элементов конструкции, но не имеющим никакого значения для другого типа.

Рассматривая взаимоотношение между критическим напряжением  $\sigma_{кр}$  и гибкостью  $l/r$  идеального сжатого стержня из строительной стали, представленной кривой на рис. 28, легко видеть, что вид этой кривой в основном определяется тремя параметрами: модулем упругости  $E$ , определяющим гиперболу Эйлера, пределом пропорциональности  $\sigma_{\pi}$  и пределом текучести  $\sigma_{\tau}$ , определяющими концевые точки  $A$  и  $B$  кривой в неупругой области. Для практических расчетов сжатых стержней кривую  $AB$ , полученную на основе концепции касательного модуля, можно удачно заменить квадратной параболой

$$\sigma_{кр} = \sigma_{\tau} - \frac{\sigma_{\tau} - \sigma_{\pi}}{(l'/r)^2} \left( \frac{l}{r} \right)^2. \quad (62)$$

Коэффициент при втором слагаемом этого выражения определяется двумя характеристиками материала  $\sigma_{\pi}$  и  $\sigma_{\tau}$ , а также значением гибкости  $l'/r$ , соответствующим критическому напряжению  $\sigma_{кр} = \sigma_{\pi}$ . Это значение гибкости равно

$$\left( \frac{l'}{r} \right)^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{\pi}}.$$



Подставляя это значение в уравнение (62), получим:

$$\sigma_{кр} = \sigma_T - \frac{\sigma_\pi (\sigma_T l - \sigma_\pi)}{\pi^2 E} \left( \frac{l}{r} \right)^2. \quad (63)$$

Таким образом, при данном материале, имеющем ясно выраженную зону текучести, легко установить основную формулу для расчета сжатых стержней в том случае, если известны три характеристики материала  $E$ ,  $\sigma_\pi$  и  $\sigma_T$ . Для практических целей нужно разделить значение предельного среднего напряжения  $\sigma_{кр}$ , определяемого формулой (63), на коэффициент безопасности  $n$ . Тогда значения  $\sigma_{кр}/n$

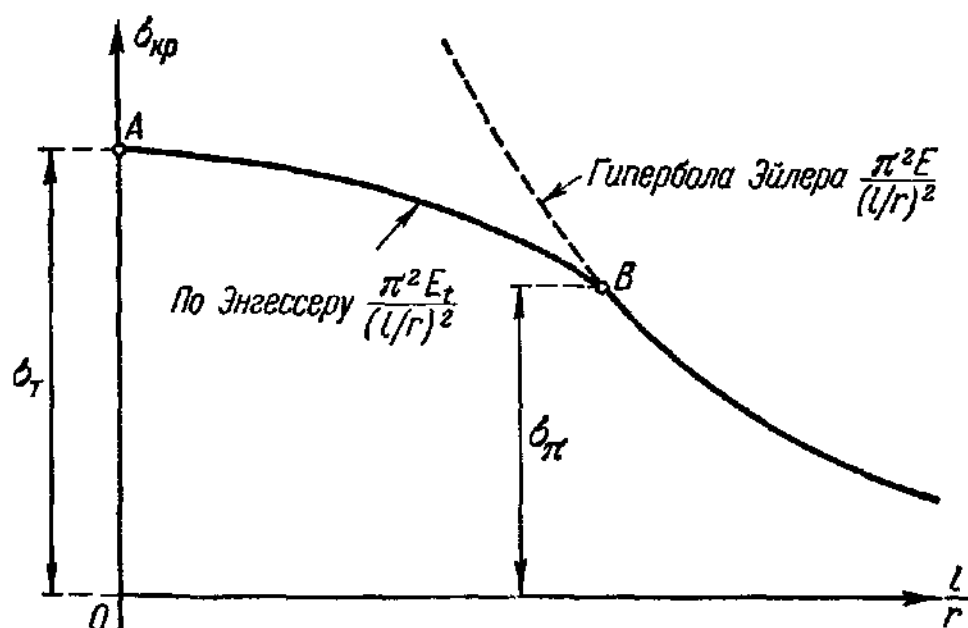


Рис. 28.

можно рассматривать как безопасные допускаемые напряжения в идеальном сжатом стержне и использовать при расчете сжатых стержней, принимая во внимание действительную допускаемую нагрузку.

Из последующих глав видно, что отношение  $\tau = E_t/E$  играет важную роль при исследовании различных задач устойчивости, поэтому целесообразно иметь простое аналитическое выражение для  $\tau$ , пригодное для предложенной выше аналитической формулы, применяемой при расчете сжатых стержней. Такое выражение легко вывести, если уравнение (62) написать в следующем сокращенном виде:

$$\sigma_{кр} = a - b \left( \frac{l}{r} \right)^2,$$

где  $a$  и  $b$  являются постоянными, зависящими от характеристических параметров  $\sigma_\pi$  и  $\sigma_T$ . С другой стороны,  $\sigma_{кр}$  можно выразить при помощи уравнения (20):

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \tau}{(l/r)^2}.$$

Исключая  $(l/r)^2$  из этих двух уравнений, получим следующее выражение для  $\tau$ :

$$\tau = \frac{\sigma_{кр} (a - \sigma_{кр})}{\pi^2 E b},$$

показывающее, что  $\tau$  является функцией критического среднего напряжения  $\sigma_{кр} = P_{кр}/A$ . Заменяя значение  $a$  на  $\sigma_T$  и  $\pi^2 E b$  на  $\sigma_\pi (\sigma_T - \sigma_\pi)$ , получим в результате следующую формулу:

$$\tau = \frac{(\sigma_T - \sigma_{кр}) \sigma_{кр}}{(\sigma_T - \sigma_\pi) \sigma_\pi}. \quad (64)$$

Значения  $\tau$  для стандартных расчетов удобно давать в виде таблицы, рассчитанной на основе уравнения (64). Пример такого табулирования приведен в таблице 3, составленной для строительной стали с предполагаемым пределом пропорциональности  $\sigma_\pi = 1765 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$  и пределом текучести  $\sigma_T = 2329 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ .

Т а б л и ц а 3. Значения отношения  $\tau = E_t/E$  для строительной стали

$\sigma_{кр}$	$\tau$	$\sigma_{кр}$	$\tau$	$\sigma_{кр}$	$\tau$	$\sigma_{кр}$	$\tau$
1765	1,000	1902	0,810	2030	0,580	2185	0,310
1779	0,983	1915	0,789	2044	0,555	2202	0,281
1793	0,965	1928	0,767	2058	0,529	2216	0,251
1807	0,947	1940	0,745	2073	0,503	2230	0,221
1821	0,929	1953	0,723	2086	0,477	2245	0,1908
1835	0,910	1966	0,700	2100	0,450	2259	0,1600
1849	0,891	1971	0,677	2114	0,423	2273	0,1288
1863	0,871	1991	0,652	2128	0,395	2287	0,0972
1877	0,851	2004	0,629	2142	0,367	2301	0,0652
1892	0,831	2016	0,605	2156	0,339	2315	0,0328
						2329	0

Производя расчет сжатых стержней на базе этих основных формул, следует обратить внимание на тот факт, что механические характеристики материала, полученные при обычных условиях, могут изменяться в некоторых пределах. Поэтому в формулу для сжатых стержней нужно подставить возможные минимальные значения  $\sigma_T$  и  $\sigma_\pi$ , учитывая, насколько часто они встречаются. Выбор минимальных значений механических характеристик материала должен быть основан на вероятностных соображениях, предполагая, что случайные отклонения от стандартных значений, которые встречаются довольно редко, включаются в соответствующее значение коэффициента безопасности.

### 19. Коэффициент безопасности

Принципы, на которых основан выбор значения коэффициента безопасности при расчете сжатых элементов, в основном те же, что и при расчете растягиваемых элементов. В значении коэффициента безопасности должны быть учтены все непредвиденные факторы, в частности некоторые неточности, допущенные в аналитических методах, применяемых для определения напряжений. Всегда при применении коэффициента безопасности необходимо выяснять, к какому условию он относится: если рассматриваются растягивающие напряжения, то коэффициент безопасности применяется для обеспечения безопасности по отношению к пределу текучести, а в случае действия переменных напряжений — по отношению к пределу усталости материала. Для сжатых строительных элементов коэффициент безопасности естественно должен обуславливаться устойчивостью элементов.

Однако к проблеме безопасной работы сжатых элементов следует подходить более осторожно, так как потеря устойчивости в некотором элементе может вести к разрушению всей конструкции, в то время как явление текучести в растягиваемом элементе не всегда опасно для конструкции, вызывая лишь большие прогибы. Следует также помнить, что при установлении значения коэффициента безопасности для сжатых элементов нужно дополнительно учитывать некоторые другие влияния (эксцентриситеты), играющие незначительную роль в работе растягиваемых элементов, но заметно воздействующие на устойчивость сжатых стержней.

Возникает также вопрос о том, считать ли коэффициент безопасности одинаковым для всех значений гибкостей или различным для коротких и гибких сжатых стержней. Соображения, на основе которых определяется значение коэффициента безопасности, можно разделить на две группы: *случайные изменения условия нагружения* (неэффективность расчетных методов, отклонение площади поперечного сечения элементов от предполагаемых значений и т. д., — эти факторы относятся ко всем частям конструкции и, следовательно, одинаково влияют на короткие и гибкие сжатые стержни); *случайные дефекты* (отклонение действительных свойств материала от предполагаемых стандартных, неправильное определение степени заделки концов, влияние вторичных напряжений и т. д., — представляют собой факторы очень тесно связанные с задачами о сжатых стержнях и имеющими различное влияние в зависимости от того, короткий или гибкий сжатый стержень).

Влияние случайного эксцентриситета осевой нагрузки и отклонения оси сжатого стержня от прямой имеют большое значение для коротких стержней и стержней средней длины. Изменения механических характеристик материала, особенно предела текучести, значительно влияют на прочность сжатого стержня в неупругой области,

в то время как гибкие сжатые стержни нечувствительны к этим изменениям в связи с тем, что несущая способность зависит от модуля упругости, значение которого обычно мало отличается от стандартного. С другой стороны, незначительная ошибка при определении свободной длины сжатого стержня существенно влияет на его прочность в упругой области, но имеет сравнительно малое значение в неупругой области.

В свете вышеизложенных фактов можно заключить, что нет оснований рассчитывать короткие сжатые стержни с меньшим, чем для гибких сжатых стержней, коэффициентом безопасности. Рассматривая далее те трудности, которые встречаются в процессе установления значения коэффициента безопасности, становится очевидной необходимость считать этот коэффициент постоянным для всех практических значений гибкостей.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

### К §§ 1—8

Basquin O. H., Tangent Modulus and the Strength of Steel Columns in Tests, Natl. Bur. Standards (U. S.), Technol. Paper 263, 1924.

Von Mises R., Ausbiegung eines auf Knicken beanspruchten Stabes, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. 4, стр. 435, 1924.

Zimmermann H., Der Begriff der Knickgrenze, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, т. 70, стр. 221, 1926.

Domke O., Die Ausbiegung eines Druckstabes bei Überschreitung der Knicklast, Die Bautechnik, т. 4, стр. 747, 1926.

Gehler W., Die Spannungs-Dehnungslinie im plastischen Druckbereich und die Knickspannungslinie, Proc. 2d Intern. Cong. Applied Mechanics, 1926, Zürich, 1927, стр. 364.

Lundquist E. E., A Method of Estimating the Critical Buckling Load for Structural Members, NACA, Tech. Note 717, 1939.

Wolford D. S., Significance of the Secant- and Tangent-Moduli of Elasticity in Structural Design, Jour. Aeronaut. Sci., т. 10, стр. 169, 1943.

Van den Broek J. A., Evaluation of Aeroplane Metals, Eng. Jour., т. 28, стр. 424, 1945.

Van den Broek J. A., Column Formula for Material of Variable Modulus, Eng. Journ., т. 28, стр. 772, 1945.

Jones J., Stability of 9×4 Steel Angle, Civil Eng., т. 15, стр. 377, 1945.

Van den Broek J. A., Euler's Classic Paper «On the Strength of Columns», Jour. Phys., т. 15, стр. 309, 1947.

Автор вкратце излагает историю изгиба и вклад Эйлера в эту задачу. Работа содержит перевод разделов I—XVIII работы Эйлера 1759 г., в которых содержится вывод Эйлером формулы  $P = \pi^2 EJ/l^2$  и показывается его ясное понимание задачи о выпучивании.

Ryder F. L., Column Behavior, Trans. ASCE, т. 113, стр. 40, 1948.

Lin Tung-Hua, Inelastic Column Buckling, Jour. Aeronaut. Sci., т. 17, стр. 159, 1950.

Duberg J. E., Wilder T. W., Column Behavior in the Plastic Stress Range, Jour. Aeronaut. Sci., т. 17, стр. 323, 1950; русский перевод: сб. «Механика», 1951, № 5, 67.

Pearson C. E., Bifurcation Criterion and Plastic Buckling of Plates and Columns, Jour. Aeronaut. Sci., т. 17, стр. 417, 1950; русский перевод: сб. «Механика», 1951, № 5.

Cicala P., Column Buckling in the Elastoplastic Range, Jour. Aeronaut. Sci., т. 17, стр. 508, 1950; русский перевод: сб. «Механика», 1951, № 4, 84.

### К §§ 9—15

Greene T. W., Strength of Steel Tubing under Combined Column and Transverse Loading, Including Tests of Columns and Beams, Natl. Bur. Standards (U. S.), Technol. Paper 258, т. 18, 1924.

Lee J. G., Tests on Duralumin Columns for Aircraft Construction, NACA Tech. Note 208, 1924.

Osgood W. R., Eccentric Loads on Column, Eng. News-Record, т. 101, стр. 30, 1928.

Tuckerman L. B., Petrenko S. N., Johnson J. D., Strength of Tubing under combined Axial and Transverse Load, NACA Tech. Note 307, 1929.

Young D. H., Stresses in Eccentrically Loaded Steel Columns, Pubs. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., т. 1, стр. 507, 1932.

Hartmann F., Der einseitige (excentrische) Druck bei Stäben aus Baustahl, Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architektenvereines, т. 85, стр. 65, 1933.

Young D. H., Rational Design of Steel Columns, Trans. ASCE, т. 98, стр. 1376, 1933.

Chwalla E., Theorie des aussermittig gedrückten Stabes aus Baustahl, Der Stahlbau, т. 7, стр. 161, 1934.

Chwalla E., Das Tragvermögen gedrückter Baustahlstäbe mit krummer Achse und zusätzlicher Querbelaugung, Der Stahlbau, т. 8, стр. 34, 1935.

Ratzersdorfer J., Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken, Julius Springer, Wien, 1936.

Hartmann F., Knickung Kippung Beulung, Franz Deuticke, Leipzig and Wien, 1937; русский перевод: Гартманн, Устойчивость инженерных сооружений, М. — Л., Стройиздат, 1939.

Ježek K., Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl, Julius Springer, Wien, 1937.

Schleussner A., Strenge Theorie der Knickung und Biegung, B. G. Teubner, Leipzig and Berlin, 1937.

Kollbrunner C. F., Zentrischer und exzentrischer Druck von an beiden Enden gelenkig gelagerten Rechteckstäben aus Avional M. und Baustahl, Der Stahlbau, т. 11, стр. 25, 1938.

Автор сравнивает результаты, полученные из теории Роша и Бруннера, Хартмана и Хвалла для различных значений эксцентриситета осевой нагрузки с результатами опытов (170 опытов). Критические напряжения, вычисленные на основе теории Роша и Бруннера и Хартмана, имеют максимальное отклонение 50% от значений, найденных Хвалла. Опыты, проведенные с эксцентриситетами 0; 0,25; 1; 3; 6 радиусов ядра, показали хорошее соответствие с результатами, полученными из теории Хвалла. Большинство экспериментальных точек лежит несколько ниже соответствующих кривых Хвалла.

Gottlieb R., Thompson T. M., Witt E. C., Combined Beam Column Stresses of Aluminum Alloy Channel Sections, NACA Tech. Note 726, 1939.

Gehler W., Vorschlag und Kritik einer Bemessungsformel bei aussermittig beanspruchten Knickstäben, Der Stahlbau, т. 13, стр. 57, 1940.

Von Kármán T., Dunn L. G., Tsien H. S., The Influence of Curvature on the Buckling Characteristics of Structures, Jour. Aeronaut. Sci., т. 7, стр. 276, 1940.

Hill H. N., Compression Tests of Some 17S-T Aluminum Alloy Specimens, of I-Cross Section, NACA Tech. Note 798, 1941.

Cassens J., Tables for Computing Various Cases of Beam Columns NACA Tech. Mem. 985, 1941.

Cassens J., Buckling Tests on Eccentrically Loaded Beam Columns NACA Tech. Mem. 989, 1941.

Van den Broeck J. A., Columns Subject to Uniformly Distributed Transverse Loads — Illustrating a New Method of Column Analysis, Eng. Jour., т. 24, стр. 115, 1941.

Merriam K. G., Eccentricity in Columns, Jour. Aeronaut. Sci., т. 9, стр. 135, 1942

Ramberg W., Osgood W. R., Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters, NACA Tech. Note 902, 1943.

Osgood W. R., Beam-Columns, Jour. Aeronaut. Sci., т. 14, стр. 167, 1947.

Holt M. A Study of the Beam Column Problem, Doctor's Thesis, University of Pittsburgh, Pittsburgh, Pa., 1947.

Brunner J., Knickstabilität, Schweizer Bauzeitung, т. 126, стр. 379, 1947.

## К §§ 16—19

Griffith J. G., Bragg J. G., Tests of Large Bridge Columns, Natl. Bur. Standards (U. S.), Technol. Papers, т. 10, стр. 3, 1918

Final Report of the Special Committee on Steel Columns and Struts, Trans. ASCE, т. 83, стр. 1583, 1919—1920

Детальное исследование результатов, полученных из нескольких сотен опытов над стальными сжатыми стержнями. Эта работа дает важные сведения относительно различных задач, связанных с изменением свойств материала и о поведении сжатых стержней в стальных конструкциях.

Tuckermann L. B., Stang A. H., Tests of Large Columns with H-shaped Sections, Natl. Bur. Standards (U. S.), Technol. Paper 328, 1926.

Southwell R. V., The Strength of Struts, A Review of Progress Made in Theory and Experiment during the War, Aeronaut Research Committee (Gt. Brit.) Repts. and Memoranda, N 918, 1924.

Mayer R., Über die Sicherheit gegen Knicken, Dia Bautechnik, т. 3, стр. 729, 1925.

Progress Report of the Special Committee on Steel Column Research, Trans. ASCE, т. 89, стр. 1485, 1926

Hunley J. B., A Simplified Column Formula of the Secant Type, Bull. AREA, т. 29, 300, стр. 197, 1927.

Johnston R. S., Tests of Large-size Columns of Three Grades of Structural Steel, Eng. News-Record, т. 103, стр. 999, 1929.

Pigeaud G., Note sur la flambement de certaines pièces droites ou courbes, Génie civil., т. 94, стр. 448, 1929.

Progress Report of the Special Committee on Steel Column Research, Trans. ASCE, т. 95, стр. 1152, 1931.

Aerflot M. G., A New Column Formula, Bull. Am. Soc. Swedish Engrs., т. 26, стр. 7, 1931.

Edwards J. H., Whittemore H. L., Stang A. H., Compressive Tests of Jointed H-Section Columns, Natl. Bur. Standards (U. S.), Jour. Research, т. 6, стр. 305, 1931.

Osgood W. R., Column Curves and Stress-Strain Diagrams, Natl. Bur. Standards (U. S.), Jour. Research., т. 9, стр. 571, 1932.

Timoshenko S., Working Stresses for Columns and Thin-walled Structures. Trans. ASME, т. 55, Paper APM-55-20, 1932.

Final Report of the Special Committee on Steel Column Research, Trans. ASME, т. 98, стр. 1376, 1933.

Комитет рекомендовал формулу секанса в качестве рабочей формулы, но вследствие затруднений, возникающих при ее использовании, предложил аппроксимировать ее параболой, принятой впоследствии AREA и AASHO. Эта формула позволяет учитывать случайные несовершенства, встречающиеся при расчете сжатых стержней, и влияние концевых заделок в сжатых стержнях как частей конструкции.

Slater W. A., Fuller M. O., Tests of Riveted and Welded Steel Columns, Trans. ASCE, т. 99, стр. 112, 1934.

Stang A. H., Whittemore H. L., Tests of Steel Tower Columns for the George Washington Bridge, Natl. Bur. Standards (U. S.), Jour. Research, т. 15, стр. 317, 1935.

Wilson M. W., Brown R. L., Effect of Residual Longitudinal Stresses upon Load-carrying Capacity of Steel Columns, Univ. Illinois Bull., т. 33, N. 13, 1935.

Hoff N. J., Elastically Encastered Struts, Jour. Roy. Aeronaut. Soc., т. 40, стр. 663, 1936.

Millet A., Essais de flambage exécutés sur des cornières en acier 54 au chromecuire et en acier 42 ordinaire, Annales des ponts et chaussées, т. 106, стр. 232, 1936.

Roark R. J., Voldrich C. B., Sollid E., Column Tests of Reinforced Channels, Welding Jour., т. 17, стр. 31, 1938.

Osgood W. R., Column Strength of Tubes Elastically Restrained against Rotation at the Ends, NACA Tech. Rept. 615, 1938.

Merriam K. G., Dimensionless Coefficients Applied to the Solution of Column Problems, Jour. Aeronaut. Sci., т. 7, стр. 478, 1940.

Stang A. H., Greenspan M., Perforated Cover Plates for Steel Columns, Natl. Bur. Standards (U. S.), Jour. Research, т. 28, стр. 669, 1942.

Stang A. H., Greenspan M., Perforated Cover Plates for Steel Columns, Compressive Properties of Plates Having Ovaloid Perforations and a Width to Thickness Ratio of 40, Natl. Bur. Standards (U. S.), Jour. Research, т. 28, стр. 687, 1942.

Stang A. H., Greenspan M., Perforated Cover Plates for Steel Columns Compressive Properties of Plates Having Ovaloid Perforations and a Width to Thickness Ratio of 68, Natl. Bur. Standards (U. S.), Jour. Research, т. 29, стр. 279, 1942.

Greenspan M., Axial Rigidity of Perforated Structural Members, Natl. Bur. Standards (U. S.), Jour. Research, т. 31, стр. 305, 1943.

Stang A. H., Greenspan M., Perforated Cover Plates for Steel Columns, Compressive Properties of Plates Having Ovaloid Perforations and a Width to Thickness Ratio of 53, Natl. Bur. Standards, Jour. Research, т. 30, стр. 15, 1943.

Stang A. H., Greenspan M., Perforated Cover Plates for Steel Columns, Compressive Properties of Plates Having Circular Perforations and a Width to Thickness Ratio of 53, Natl. Bur. Standards (U. S.), Jour. Research, т. 30, стр. 177, 1943.

Stang A. H., Greenspan M., Perforated Cover Plates for Steel Columns, Compressive Properties of Plates Having Net-to-Gross Cross-sectional-area Ratio of 0.33, Natl. Bur. Standards (U. S.), Jour. Research, т. 30, стр. 411, 1943.

Sergev S. I., The Theoretical Behavior and Design of Initially Curved Struts under an Intermediate Concentric Axial Load, Univ. Washington Eng. Expt. Sta. Bull. 113, 1945.

Osgood W. R., Column Formulas, Trans. ASCE, 1946, стр. 165.

Автор охарактеризовал главное требование к любой формуле о сжатом стержне; в работе обсуждаются формула Рэнкина, формула секанса, формула Арфлота и Илинена (Ylinen), его собственная формула, формула Крюгера (Kryger) и формулы параболического и гиперболического типа. Дискуссия, проведенная читателями работы, служит замечательным резюме общераспространенных мнений о различных особенностях задач о сжатом стержне при практическом проектировании.

Ruffner B. F., Stress Analysis of Columns and Beam Columns by the Photoelastic Method, NACA Tech. Note 1002, 1946.

## Г Л А В А II

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ И КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

### 20. Введение

Аналитическое исследование основной задачи о сжатом стержне в главе I основывалось на линейном дифференциальном уравнении теории изгиба призматических балок, которая определяет прогиб у балки при заданной внешней нагрузке, причем было установлено, что критическую силу можно получить в результате решения линейного однородного дифференциального уравнения. Действительно, такие дифференциальные уравнения являются основой для решения различных задач устойчивости, и мы увидим, что особенности решений этих уравнений тесно связаны с особенностями самой задачи о выпучивании. При решении задач о выпучивании в строительной механике очень полезно знать хорошо разработанную теорию линейных однородных дифференциальных уравнений, которые играют решающую роль в физике, особенно в теории малых колебаний. Между теорией малых колебаний и теорией упругой устойчивости можно провести полную аналогию, объясняемую наличием общей математической основы для обеих задач. Всесторонний анализ сущности различных задач динамики, полученный на основе разработанной многими поколениями ученых теории линейных однородных дифференциальных уравнений, нужно также использовать для изучения и лучшего понимания различных методов решения задач о выпучивании. В следующих параграфах 21 и 22 не содержится полного изложения математической теории, в них обсуждаются лишь те характерные особенности, которые имеют особое значение для рассмотренного здесь типа дифференциального уравнения. Эти особенности очень важны для понимания сущности задачи устойчивости, рассмотренной как математическая задача, и особенно для эффективного применения метода Ритца при приближенном решении задачи устойчивости.

Параграфы 23—26 этой главы посвящены анализу энергетических методов, где особое внимание уделено методу Ритца. В §§ 27 и 28 рассмотрены решения задач устойчивости соответственно с по-



мощью метода последовательных приближений и метода конечных разностей.

Для лучшего использования энергетических методов, изложенных в этой главе, необходимо знание вариационного исчисления; в связи с отсутствием подходящей литературы или учебников, доступных инженерам, мы считали необходимым посвятить §§ 29—33 введению в эту область математики.

## 21. Задача о выпучивании, рассматриваемая как задача о собственных значениях

В последующем кратком изложении математической теории мы ограничимся рассмотрением дифференциального уравнения задачи о сжатом стержне. Это считается достаточным для выявления тех сторон теории линейных дифференциальных уравнений, которые имеют большое значение при решении задач о выпучивании. Однородное дифференциальное уравнение, использованное в главе I для выявления главных свойств основной задачи об упругой устойчивости, не имеет достаточно общий характер, чтобы служить подходящей основой для исследования математических особенностей задачи о выпучивании прямых сжатых стержней. Общий вид дифференциального уравнения, на котором можно основывать решение задачи об устойчивости центрально сжатых прямых стержней при любых концевых условиях, следующий<sup>1)</sup>:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ_x \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0. \quad (65)$$

Предполагается, что момент инерции  $J_x$  меняется вдоль длины сжатого стержня согласно закону  $J_x = J\psi(x)$ , где  $J$  есть некоторый постоянный момент инерции, а  $\psi(x)$  — безразмерная функция абсциссы  $x$ .

Уравнение (65) является однородным линейным дифференциальным уравнением четвертого порядка, общее решение которого содержит четыре произвольные постоянные, соответствующие числу граничных условий некоторой частной задачи о сжатом стержне. После введения выражения  $J_x = J\psi(x)$  уравнение (65) целесообразно написать в следующем сокращенном виде:

$$[\psi(x) y'']'' + \lambda^2 y'' = 0, \quad (66)$$

где параметр  $\lambda$  определяется выражением

$$\lambda = \sqrt{\frac{P}{EJ}}. \quad (67)$$

<sup>1)</sup> Дифференциальное уравнение (6) в главе I применимо к шарнирно опертым, а не к зашечленным или упруго заделанным сжатым стержням. Для таких сжатых стержней нужно прибавлять добавочный член, вызванный концевыми моментами; дважды дифференцируя получающиеся в результате уравнения, придем к уравнению (65), в котором добавочный член больше не появляется вследствие равенства нулю его второй производной.

Общее решение дифференциального уравнения (66) имеет вид

$$y = C_1 \varphi_1(\lambda, x) + C_2 \varphi_2(\lambda, x) + C_3 \frac{x}{l} + C_4, \quad (68)$$

где  $\varphi_1(\lambda, x)$  и  $\varphi_2(\lambda, x)$  являются безразмерными трансцендентными функциями  $x$  и параметра  $\lambda$ . Постоянные  $C$  представляют собой длины и определяются граничным условием на обоих концах сжатого стержня. Эти граничные условия выражаются линейными однородными уравнениями; они будут названы однородными граничными условиями. Более конкретно, рассмотренные здесь и наиболее часто встречаемые концевые условия будут:

$$\left. \begin{aligned} &\text{для свободно опертого конца } y = 0 \text{ и } y'' = 0; \\ &\text{для защемленного конца } y = 0 \text{ и } y' = 0; \\ &\text{для свободного конца } y'' = 0 \text{ и } [\psi(x) y']' + \lambda^2 y' = 0^1). \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Подставляя в любом заданном случае решение (68) в четыре граничных условия, получим систему четырех линейных однородных уравнений следующего общего вида:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} C_1 + \alpha_{21} C_2 + \alpha_{31} C_3 + \alpha_{41} C_4 &= 0; \\ \alpha_{12} C_1 + \alpha_{22} C_2 + \alpha_{32} C_3 + \alpha_{42} C_4 &= 0; \\ \alpha_{13} C_1 + \alpha_{23} C_2 + \alpha_{33} C_3 + \alpha_{43} C_4 &= 0; \\ \alpha_{14} C_1 + \alpha_{24} C_2 + \alpha_{34} C_3 + \alpha_{44} C_4 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

где некоторые из коэффициентов  $\alpha$  являются трансцендентными функциями параметра  $\lambda$ , а другие — постоянными. Для произвольных значений параметра  $\lambda$  эти однородные уравнения удовлетворяются, когда только все постоянные  $C_1, \dots, C_4$  равны нулю. Это означает, что прогиб  $y$  равен нулю и сжатый стержень остается прямым. Однако уравнения (70) имеют отличные от нуля решения, если детерминант  $\Delta$ , составленный из коэффициентов этой системы уравнений, равен нулю, т. е. если

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{43} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (71)$$

Раскрывая детерминант  $\Delta$ , из условия (71) получим одно уравнение с одним неизвестным параметром  $\lambda$ . Вообще, уравнение (71) является трансцендентным уравнением с бесконечным числом корней  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), которые называются *характеристическими значениями* параметра  $\lambda$  и определяют бесконечное число критических сил  $P_i$ . Подставляя одно из этих характеристических значений  $\lambda_i$

<sup>1)</sup> Это уравнение выражает условие равенства нулю поперечной силы.

в систему (70), получим четыре уравнения для определения четырех постоянных  $C_{1i}$ ,  $C_{2i}$ ,  $C_{3i}$  и  $C_{4i}$ , соответствующих параметру  $\lambda_i$ . Однако вследствие равенства нулю детерминанта  $\Delta$ , составленного из коэффициентов этих уравнений, одно из уравнений является тождеством и может быть получено путем комбинации трех других уравнений; следовательно, остается три независимых уравнения для определения четырех неизвестных. Из этих уравнений можно определить только три отношения:  $\bar{C}_{2i} = C_{2i}/C_{1i}$ ,  $\bar{C}_{3i} = C_{3i}/C_{1i}$  и  $\bar{C}_{4i} = C_{4i}/C_{1i}$ , и решение (68) принимает следующий вид:

$$y_i = C_{1i} \left[ \varphi_1(\lambda_i, x) + \bar{C}_{2i} \varphi_2(\lambda_i, x) + \bar{C}_{3i} \frac{x}{l} + \bar{C}_{4i} \right], \quad (72)$$

где  $C_{1i}$  — произвольное постоянное.  $y_i$  являются так называемыми *характеристическими функциями* однородного дифференциального уравнения (66) и соответствующих граничных условий рассмотренного случая.

Из предыдущего исследования решения дифференциального уравнения (66) видно, что при некоторых значениях параметра  $\lambda$  существуют криволинейные формы равновесия центрально сжатых стержней с неопределенной амплитудой, вид которых определяется уравнением (72). Следовательно, характеристические значения  $\lambda_i$  и характеристические функции  $y_i$  определяют критические силы  $P_i$  и соответствующие формы выпучивания  $y_i$ . Уравнение (71), из которого получаются значения  $\lambda$ , представляет собой критерий устойчивости, а уравнение (67) — соотношение, связывающее наименьший корень  $\lambda_1$  с соответствующей критической силой  $P_{кр}$ , при которой сжатый стержень проходит от прямого и устойчивого в изогнутое и неустойчивое положение.

Целесообразно кратко остановиться на упомянутой в начале этого параграфа важной аналогии, существующей между математическим толкованием малых колебаний и явлением выпучивания. Характеристические функции  $y_i$  любой задачи о колебании представляют собой бесконечный ряд главных форм колебаний, а характеристические значения  $\lambda_i$  задачи связаны с частотами этих форм уравнением (71), которое называется уравнением частот. Взаимоотношение между двумя группами задач показано в следующей таблице.

	Уравнение $\Delta=0$	Характеристические значения	Характеристические функции
Выпучивание	Критерий устойчивости	Критические силы	Формы выпучивания
Колебания	Уравнения частот	Частоты	Главные формы колебания

Существование общей математической основы способствует более глубокому пониманию каждого из этих явлений и физических соотношений, существующих между критическими силами и частотами свободных колебаний, соотношений, которые могут представить интерес для экспериментальной работы в области выпучивания<sup>1)</sup>.

## 22. Условия ортогональности

Главная наша цель — определение критической силы сжатого стержня с заданными концевыми условиями — достигается, когда получено условие устойчивости (71) и определен его наименьший корень  $\lambda_1$ . Однако, как будет видно из этой главы, характеристические функции дифференциального уравнения (66) играют важную роль в энергетическом методе, описываемом в последующих параграфах. Поэтому вполне уместно выяснить некоторые важные и полезные соотношения между характеристическими функциями  $y_i$ , вытекающие из свойств, присущих данному дифференциальному уравнению.

Поскольку при  $\lambda = \lambda_i$  любая характеристическая функция  $y_i$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (66), можно написать:

$$[\psi(x) y_i'']' + \lambda_i^2 y_i'' = 0.$$

Умножая это уравнение на одну из остальных характеристических функций и интегрируя по всей длине  $l$  сжатого стержня, получим:

$$\int_0^l [\psi(x) y_i'']' y_k dx + \lambda_i^2 \int_0^l y_i'' y_k dx = 0. \quad (73)$$

Двойное интегрирование по частям первого члена дает

$$\int_0^l [\psi(x) y_i'']' y_k dx = [\psi(x) y_i''] y_k \Big|_0^l - [\psi(x) y_i'' y_k']_0^l + \int_0^l \psi(x) y_i'' y_k'' dx.$$

Интегрируя по частям второй член, имеем:

$$\lambda_i^2 \int_0^l y_i'' y_k dx = \lambda_i^2 [y_i' y_k]_0^l - \lambda_i^2 \int_0^l y_i' y_k' dx.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (73), получим:

$$\begin{aligned} & [ [\psi(x) y_i'']' + \lambda_i^2 y_i''] y_k \Big|_0^l - [\psi(x) y_i'' y_k']_0^l + \\ & + \int_0^l \psi(x) y_i'' y_k'' dx - \lambda_i^2 \int_0^l y_i' y_k' dx = 0. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Например, основная частота поперечных колебаний центрально нагруженной балки уменьшается при увеличении нагрузки и равняется нулю при достижении критической силы.

Члены, находящиеся в скобках, равняются нулю при любых комбинациях однородных граничных условий (69), поэтому имеем:

$$\int_0^l \psi(x) y_i'' y_k'' dx - \lambda_i^2 \int_0^l y_i' y_k' dx = 0. \quad (74)$$

Это уравнение верно для каждой комбинации двух различных характеристических функций, поэтому можно заменить  $y_i$  на  $y_k$  и написать:

$$\int_0^l \psi(x) y_k'' y_i'' dx - \lambda_k^2 \int_0^l y_k' y_i' dx = 0.$$

Вычитая одно уравнение из другого, получим:

$$(\lambda_i^2 - \lambda_k^2) \int_0^l y_i' y_k' dx = 0.$$

Если  $i$  не равно  $k$ , то  $\lambda_i^2 - \lambda_k^2$  будет отличным от нуля и, следовательно, получим:

$$\int_0^l y_i' y_k' dx = 0. \quad (75a)$$

Подставляя (75a) в уравнение (74), имеем:

$$\int_0^l \psi(x) y_i'' y_k'' dx = 0. \quad (75b)$$

Если  $i = k$ , то интеграл  $\int_0^l y_i'^2 dx$  не может быть равным нулю, так как подынтегральное выражение является квадратным и, следовательно, является положительным; так как  $\lambda_i^2$  также отлично от нуля, то из уравнения (74) получим:

$$\int_0^l \psi(x) y_i''^2 dx \neq 0 \quad \text{и} \quad \int_0^l y_i'^2 dx \neq 0. \quad (76)$$

Уравнения (75) выражают важные свойства характеристических решений дифференциального уравнения (66) и называются *условиями ортогональности* характеристических функций  $y_i$ . Семейство функций, состоящих из всех характеристических функций  $y_i$  уравнения (66) для частных граничных условий, назовем *полной системой* ортогональных функций.

Если  $J_\infty$  постоянно, то  $\psi(x) = 1$  и уравнения (75) упрощаются, принимая вид:

$$\int_0^l y_i' y_k' dx = \int_0^l y_i'' y_k'' dx = 0. \quad (77)$$

Наиболее известным примером полной системы ортогональных функций, удовлетворяющих условиям (77), является последовательность следующих функций:

$$y_i = \sin i \frac{\pi x}{l} \quad (i = 1, 2, \dots, \infty),$$

которые образуют члены ряда Фурье. Применение рядов Фурье для решения многочисленных задач механики и физики основывается главным образом на условии ортогональности (77), существующем между членами вышенаписанной последовательности функций. Так как

$$y_i' = \frac{\pi i}{l} \cos i \frac{\pi x}{l} \quad \text{и} \quad y_i'' = -\frac{\pi^2 i^2}{l^2} \sin i \frac{\pi x}{l},$$

то из уравнений (77) получим хорошо известные формулы

$$\int_0^l \cos i \frac{\pi x}{l} \cos k \frac{\pi x}{l} dx = \int_0^l \sin i \frac{\pi x}{l} \sin k \frac{\pi x}{l} dx = 0, \quad \text{если} \quad i \neq k,$$

поскольку интеграл

$$\int_0^l \sin^2 i \frac{\pi x}{l} dx = \int_0^l \cos^2 i \frac{\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}$$

отличен от нуля. Заметим, что функции  $y_i = \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$  являются характеристическими решениями дифференциального уравнения (66) при следующих граничных условиях:  $y = 0$ ,  $y'' = 0$  при  $x = 0$  и  $l$ , и были нами рассмотрены в главе I в связи с выводом формулы Эйлера.

Установленным является тот факт, что не всегда каждую полную систему характеристических функций, состоящую из решений некоторого однородного дифференциального уравнения с определенными граничными условиями, можно использовать для разложения в ряды, аналогичные рядам Фурье. Эти ряды обладают теми специфическими свойствами, которые делают ряды Фурье весьма полезными в математике; эти свойства тесно связаны с тем, что характеристические функции образуют ортогональную систему. Значение таких специальным образом составленных рядов для решения некоторых задач устойчивости будет показано в §§ 24—26.

До сих пор мы ограничивались рассмотрением задач об отдельных сжатых стержнях. Подобные соотношения ортогональности существуют также между формами выпучивания сжатых элементов,

образующих жестко соединенную систему сжатых стержней. Простой пример этого случая показан на рис. 29. Сжатый стержень оперт на концах и в двух промежуточных точках как неразрезная трехпролетная балка. Момент инерции сечения считается постоянным вдоль длины  $L$  балки. Уравнения прогибов форм выпучивания должны удовлетворять уравнению (66). Рассчитав интегралы по всей длине  $L$  сжатого элемента и рассуждая так же, как и раньше, получим следующие условия ортогональности:

$$\text{и } \left. \begin{aligned} \int_L y'_i y'_k dx &= 0 \\ \int_L y''_i y''_k dx &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

когда  $y_i$  и  $y_k$  представляют собой различные характеристические функции. Однако эти два интеграла отличны от нуля только при  $i = k$ <sup>1)</sup>. Для наглядности на рис. 29 показаны симметричные функции  $y_1$  и  $y_3$  и антисимметричная функция  $y_2$ .

Подобно случаю одномерных задач условия ортогональности существуют также, когда характеристические функции являются решениями дифференциальных уравнений в частных производных, как, например, в случае всех двумерных задач, где характеристические решения являются функциями  $u(x, y)$  двух независимых переменных  $x, y$ . Известным примером этого являются двойные ряды Фурье:

$$\sum_m \sum_n c_{mn} \sin m \frac{\pi x}{l} \sin n \frac{\pi y}{l} \quad (m = 1, 2, \dots \text{ и } n = 1, 2, \dots),$$

которые мы рассмотрим в теории устойчивости пластинок. В этом случае условие ортогональности будет

$$\int_0^a \int_0^b \sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b} \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b} dx dy = 0 \quad (79)$$

при  $m \neq p$  или  $n \neq q$ .

<sup>1)</sup> Следует особо заметить, что уравнения (78) верны только в случае, когда интегрирование распространяется по всей длине  $L$ .

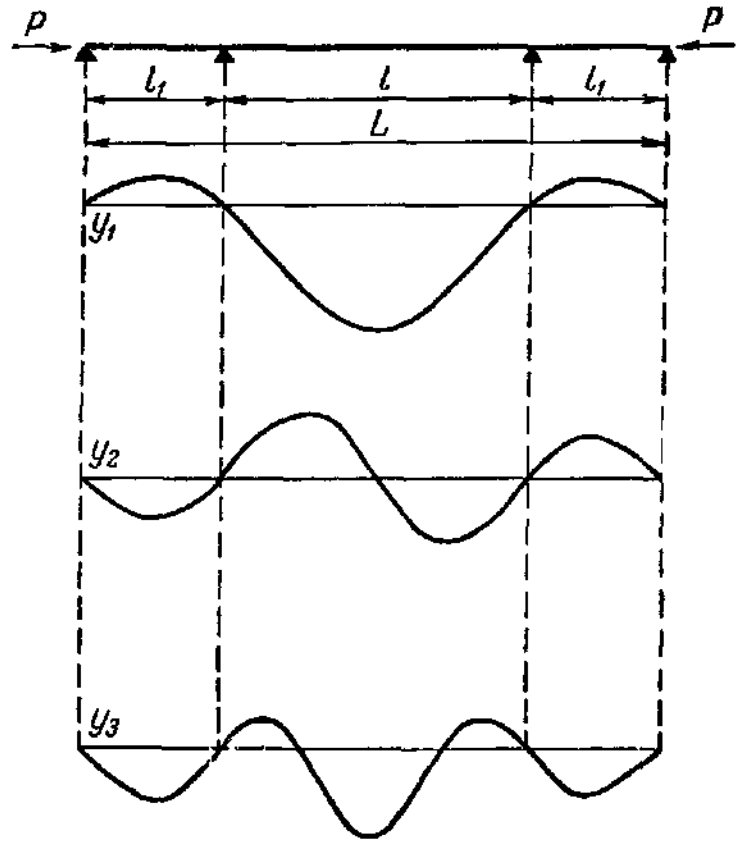


Рис. 29.

После изложения некоторых сведений из области математики вернемся к основной теме данной главы. Подводя итоги предыдущему, полезно было бы подчеркнуть главное положение, лежащее в основе метода определения критической силы  $P_{кр}$  сжатого стержня. Критическая сила определялась на основе критерия, согласно которому критическое состояние достигается, когда наряду с прямой формой равновесия сжатого стержня возможна бесконечно близкая криволинейная форма равновесия, указывающая на бифуркацию состояния равновесия. Исследование решения однородного дифференциального уравнения (66) показало, что в действительности такая бифуркация состояния равновесия происходит при определенном характеристическом значении  $\lambda = \sqrt{P/EI}$  и что значение  $\lambda$  является наименьшим корнем условия устойчивости  $\Delta = 0$ .

То же самое положение, конечно, используется и при решении различных других групп задач устойчивости, и в других главах этой книги будет применен этот метод вывода условия устойчивости из дифференциального уравнения любой частной задачи о выпучивании.

### 23. Энергетический метод и теорема о стационарном значении потенциальной энергии

Энергетический метод решения задач упругой устойчивости основывается на некотором экстремальном принципе механики, вытекающим из энергетического критерия, характеризующим условие равновесия упругой системы. В теорию упругости этот принцип был введен Кирхгофом <sup>1)</sup>, который на основе этого принципа получил дифференциальное уравнение поперечно нагруженных плоских пластинок. Брайан <sup>2)</sup> впервые применил этот принцип к решению задач о выпучивании, исходя из которого он получил дифференциальное уравнение, положенное в основу теории выпучивания плоских пластинок.

Тимошенко <sup>3)</sup> принадлежит заслуга в разработке энергетического метода для приближенного решения задач упругой устойчивости. Он превратил этот метод в мощное средство для исследования различных очень сложных задач о выпучивании. Примерно в то же

<sup>1)</sup> Kirchhoff G., Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, Zeitschrift für reine und angewandte Mathematik, т. 40, стр. 51, 1850.

<sup>2)</sup> Bryan G. H., On the Stability of a Plane Plate under Thrusts in Its Own Plane with Application on the «Buckling» of the Sides of a Ship, Proc. London Math. Soc., 1891, стр. 59.

<sup>3)</sup> Опубликована на русском языке в 1910 г.: Изв. Политехн. ин-та, Киев и позже на французском: Sur la stabilité des systèmes élastiques, Annales des ponts et chaussées, 1913.



время Ритц <sup>1)</sup> опубликовал классическую статью, в которой на широкой математической основе разработал общий метод для непосредственного решения так называемых задач о минимумах математической физики. Он применил этот метод к исследованию равновесия и колебаний прямоугольных пластинок, защемленных по четырем краям. Метод Ритца является достаточно общим и применяется ко всем тем задачам механики и физики, которые с точки зрения математики можно рассматривать как задачи вариационного исчисления. Метод Тимошенко был специально разработан для приближенного решения задач упругой устойчивости. Использование обоих методов Ритца и Тимошенко при решении данной задачи приводит, по существу, к одним и тем же математическим выкладкам и одинаковым математическим формам результата.

Сколько-нибудь существенных изменений в решение этой задачи не вносилось вплоть до 1935 г., когда Треффц <sup>2)</sup> в дополнение к методу Ритца разработал способ для определения нижней границы критической силы. Метод Ритца в его первоначальной форме дает приближенные значения критической силы бóльшие, чем точное значение, и, таким образом, определяет верхнюю границу критической силы. Следовательно, метод Треффца дает возможность ограничить решение задачи верхней и нижней границами, что очень важно при оценке точности решения. Недавно Будянский и Ху <sup>3)</sup> предложили видоизмененный метод Треффца, названный методом множителя Лагранжа, который они успешно применили к решению задач устойчивости пластинок.

Принцип энергетического метода можно непосредственно вывести, исходя из принципа виртуальной работы, следующим образом.

Рассмотрим упругую конструкцию, находящуюся под действием системы сил  $P_i$  в покое. Применяя принцип виртуальной работы, условие равновесия между внутренними и внешними силами можно выразить уравнением

$$\delta V - \sum P_i \delta \xi_i = 0, \quad (80)$$

где  $\delta \xi_i$  означает виртуальное перемещение точки приложения силы  $P_i$  в направлении линии действия  $P_i$ , а  $V$  — внутреннюю работу, т. е. энергию деформации, накопленной в конструкции в рассматриваемом положении равновесия. Следовательно,  $\delta V$  представляет собой изменение энергии деформации, когда конструкция переходит из

<sup>1)</sup> Ritz W., Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, Zeitschrift für reine und angewandte Mathematik, 1909, стр. 1.

<sup>2)</sup> Trefftz E., Die Bestimmung der knickst gedrückter, rechteckiger Platten, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. 15, стр. 339, 1935.

<sup>3)</sup> Budiansky B., Hu Pai C., The Lagrangian Multiplier Method of Finding Upper and Lower Limits to the Critical Stresses, NACA Tech. Note 1103, 1946.

положения равновесной конфигурации в положение смежной, определяемой бесконечно малыми виртуальными перемещениями  $\delta\xi_i$ .

Вводя, как в теоретической механике, понятие «потенциальной энергии», член  $-\sum P_i \delta\xi_i$  в уравнении (80) можно рассматривать как выражение изменения  $\delta U_w$  потенциальной энергии  $U_w$  внешних нагрузок; поэтому уравнение (80) можно написать в следующей форме:

$$\delta V + \delta U_w = \delta(V + U_w) = 0. \quad (81)$$

Словами это можно выразить так: величина полной потенциальной энергии  $U = V + U_w$  не меняется, если конструкция переходит от положения равновесия в бесконечно близкое смежное положение. Величина  $\delta(V + U_w)$  представляет собой изменение потенциальной энергии, а уравнение (81) можно рассматривать как математическое условие стационарности величины  $U = V + U_w$ <sup>1)</sup>. Следовательно, можно написать, что

$$U = V + U_w = \text{стационарному значению}. \quad (82)$$

При применении этого условия равновесия к особому положению равновесия, существующему непосредственно перед выпучиванием упругой системы, уравнение (82) даст энергетический критерий, на основе которого можно определить критическое состояние упругой устойчивости. Таким образом, с точки зрения математики задача о выпучивании становится задачей вариационного исчисления<sup>2)</sup>. Уравнение (82) назовем теоремой о стационарном значении потенциальной энергии.

При выводе значения потенциальной энергии  $U$  важно иметь в виду, что общее выражение  $U$  содержит произвольную аддитивную постоянную<sup>3)</sup>. Значение этой произвольной постоянной можно определить, приравнявая нулю потенциальную энергию для некото-

<sup>1)</sup> Конструкция находится в устойчивом равновесии, если только стационарное значение потенциальной энергии является минимумом; согласно математическому правилу,  $U$  является минимумом, когда вторая вариация  $\delta^2 U$  представляет собой положительную величину для любого виртуального перемещения. В практических расчетах этот математический критерий используется редко в связи с тем, что положение устойчивого равновесия, как правило, становится очевидным из конкретных физических условий.

<sup>2)</sup> Основная задача этой области математики заключается в определении вида функции  $y = f(x)$ , дающей экстремальное значение определенному

интегралу  $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \dots) dx$ . Функция  $F$  может быть заданной функцией от функции  $y$  и ее производных. В §§ 29—33 этой главы дается краткое введение в теорию вариационного исчисления.

<sup>3)</sup> Это обусловлено тем, что потенциальная энергия по существу определяется соотношениями  $P_i = -\frac{\partial U}{\partial \xi_i}$ . Поэтому при определении  $U$  получается произвольная постоянная.

рого подходящего положения системы отсчета; в задачах устойчивости удобно (но не обязательно) за такое положение принимать положение нагруженного сжатого стержня непосредственно перед выпучиванием. В этом случае часть потенциальной энергии  $V$ , накопленной в конструкции, равна приращению энергии деформаций в пределах от невыпученного до выпученного состояния, в то время как потенциальная энергия  $U_w$  внешних нагрузок равна отрицательному произведению внешних сил на перемещения (вызванные вследствие выпучивания) их точек приложения в направлении действия сил. Для того чтобы пояснить это на примере, исследуем устойчивость центрально нагруженного прямого сжатого стержня (рис. 30). Предполагается, что момент инерции  $J_x$  является переменным.

Рассматривая сжатый стержень под действием нагрузки  $P$  и принимая за положение системы отсчета (при котором  $U=0$ ) сжатое, но не изогнутое состояние стержня, получим, что дополнительная упругая энергия деформаций обусловлена только изгибом

$$V = \frac{E}{2} \int_0^l J_x y'^2 dx, \quad (83)$$

где  $y$  — прогиб сжатого стержня.

Потенциальная энергия  $U_w$  осевой нагрузки  $P$  равна (рис. 30)

$$U_w = -P \Delta l = -\frac{P}{2} \int_0^l y'^2 dx. \quad (84)$$

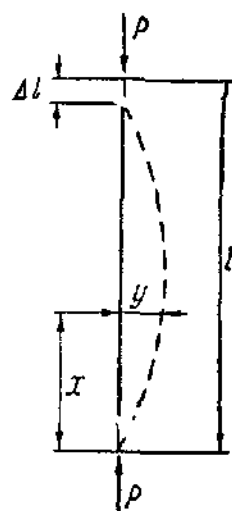


Рис. 30.

В рассмотренном здесь случае  $V$  и  $U_w$  являются интегралами от квадратичных функций неизвестного  $y$  и его производных. Применяя методы вариационного исчисления к условию (81)

$$\delta(V + U_w) = \delta \left( \frac{E}{2} \int_0^l J_x y'^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^l y'^2 dx \right) = 0, \quad (85)$$

получим функцию  $y$ . Математические выкладки приводят к дифференциальному уравнению Эйлера, которое в этом случае идентично уравнению (65). Это уравнение непосредственно можно получить, рассматривая равновесия между внешними и внутренними силами, действующими на элементы сжатого стержня. Несмотря на это, в некоторых случаях решение задач о выпучивании при помощи энергетического критерия тем способом, который был только что описан, имеет свои преимущества. Обычно гораздо проще установить выражения для энергий  $V$  и  $U_w$  и вывести дифференциальное уравнение (или уравнения) задачи методом вариационного исчисления,

чем выводить дифференциальные уравнения другими способами. Типичный пример этого можно найти в главе III, где методом вариационного исчисления решается задача об изгибе и кручении тонкостенных стержней.

## 24. Метод Ритца

Важность применения энергетического критерия для решения задач устойчивости становится очевидной в свете метода Ритца, который приводит к непосредственному решению экстремальной задачи, вытекающей из условия (82). Сущность метода будет показана на примере ранее рассмотренной задачи о сжатом стержне.

Представим прогиб  $y$  в выражениях (83) и (84) для энергий в виде конечного ряда

$$y = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots + a_n\varphi_n, \quad (86)$$

где множители  $\varphi$  являются произвольно выбранной совокупностью функции от  $x$ , удовлетворяющей тем же граничным условиям, что и прогиб  $y$ . Они называются *координатными функциями*. Коэффициенты  $a$  представляют собой соответствующий ряд параметров, пока еще не определенных. Подставляя уравнение (86) в уравнения энергии (83) и (84) и выполняя указанные интегрирования, получим следующее выражение для  $V + U_w$  как функцию от  $n$  параметров  $a$ :

$$V + U_w = F_1(a_1, \dots, a_n) - PF_2(a_1, \dots, a_n), \quad (87)$$

где  $F_1$  и  $F_2$  являются квадратичными формами параметров  $a$ . Если  $y$  рассматривается как решение экстремальной задачи, то оно должно удовлетворить экстремальному условию (82) и параметры  $a$  должны быть выбраны так, чтобы выражение  $V + U_w = F_1 - PF_2$  имело стационарное значение. Таким образом, задача свелась к обычной задаче о максимуме и минимуме, в которой параметры  $a_1, a_2, \dots, a_n$  являются аргументами и определяются из следующих  $n$  условий:

$$\frac{\partial (V + U_w)}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (88)$$

В связи с тем, что первые производные квадратичных форм являются линейными функциями, уравнение (88) представляет собой систему  $n$  однородных линейных уравнений, на основе которых можно определить параметры  $a$ . Эта система не может иметь решений, отличных от нуля, пока детерминант  $\Delta$ , составленный из коэффициентов уравнений, не равняется нулю. Таким образом,

$$\Delta = 0 \quad (89)$$

является уравнением  $n$ -й степени относительно неизвестного  $P$  и представляет собой условие устойчивости, из которого определяется  $P$ .

Наименьший из корней уравнения (89) даст значение критической силы  $P_{кр}$ .

Подставляя  $P = P_{кр}$  в уравнения (88), получим систему  $n$  линейных однородных уравнений, на основе которых, однако, можно вычислить  $n - 1$  отношений  $\alpha_i = a_i/a_1$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ), потому что детерминант  $\Delta$ , составленный из коэффициентов этих уравнений, равняется нулю. Следовательно, постоянная  $a_1 = C$  остается произвольной. Таким образом, из уравнения (86) получим первую форму выпучивания

$$y_1 = C(\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \dots + \alpha_n\varphi_n). \quad (90)$$

При удачном подборе совокупности функций  $\varphi$  метод Ритца даст ряд значений параметров  $a$ , которые во многих случаях убывают так быстро, что для определения критической силы  $P = P_{кр}$  с требуемой степенью точности достаточно удержать некоторые члены в сходящихся рядах (86).

Значение метода Ритца заключается в том, что он дает приближенное решение задач о выпучивании в тех случаях, когда решение основной задачи о собственных значениях, описанной в предыдущем параграфе, представляет значительные трудности или вообще невозможно. Метод Ритца с большим успехом можно применить также для решения математически менее сложных задач, так как усилия, необходимые для определения критической силы  $P_{кр}$  из детерминанта Ритца [уравнение (89)], часто бывают меньшими, чем усилия для вычисления  $P_{кр}$  при решении сложного трансцендентного уравнения.

Успешное или неудачное применение метода Ритца к решению любой задачи в значительной степени зависит от правильного выбора координатных функций  $\varphi$ . В том случае, если эти функции подобраны без должного внимания к особенностям задачи, расчет может оказаться излишне длинным и трудоемким. Что касается вида этих функций, то никаких теоретических ограничений на них не налагается. Они могут быть полиномами или трансцендентными функциями. Главным требованием, предъявленным им, является удовлетворение граничных условий данной задачи. Однако нужно подчеркнуть, что в большинстве случаев удовлетворительные результаты можно получить тогда, когда координатные функции образуют систему ортогональных функций, из которых выбирается последовательность функций для разложения в ряды (86). Соотношения ортогональности, которые существуют между членами такой последовательности, значительно упрощают дальнейшее исследование, а также само выражение энергии  $V + U_w$ . Вот почему ряды Фурье имеют первостепенное значение в многочисленных случаях применения метода Ритца в теории упругости. Однако очевидно, что применение этих рядов ограничивается задачами, граничные условия которых совпадают с граничными значениями координатных функций  $\varphi$  ряда Фурье.

Во многих случаях, когда граничные условия исключают возможность применения рядов Фурье, последовательные формы выпучивания (характеристические функции) родственной, но менее сложной задачи можно получить при помощи подходящей совокупности ортогональных координатных функций. Такая совокупность функций, удовлетворяющая граничным условиям данной задачи, быстро сходится в связи с тем, что эти функции отражают некоторые геометрические и упругие свойства системы, устойчивость которой рассматривается.

В качестве иллюстрации можно сделать краткий анализ следующей задачи о выпучивании. Сжатый стержень расположен на неподатливых опорах  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  (рис. 31) и, кроме того, упруго оперт

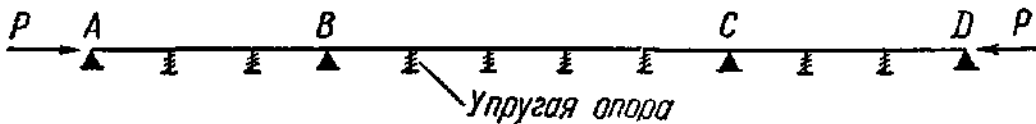


Рис. 31.

на равноудаленных промежуточных опорах. Пусть на сжатый стержень действует осевая нагрузка  $P$ ; предположив, что момент инерции  $J$  постоянен, выражению потенциальной энергии системы придаем следующий вид:

$$U = V + U_w = \frac{EJ}{2} \int_L y''^2 dx - \frac{P}{2} \int_L y'^2 dx + \frac{c}{2} \sum y_s^2. \quad (91)$$

Последний член этого выражения представляет собой потенциальную энергию упругой опоры, где  $c$  обозначает жесткость пружины, показывающую степень сопротивления опоры прогибу. Интегралы распространяются по всей длине сжатого стержня, а сумма — на все упругие опоры.

При выборе координатных функций  $\varphi$  для разложений в ряды (86) нужно иметь в виду, что эти функции, кроме условий на концах  $A$  и  $D$ , должны также удовлетворять особым условиям закрепления на опорах  $B$  и  $C$ . Формы выпучивания сжатого стержня  $ABCD$ , укрепленного без промежуточных упругих опор, которые сравнительно легко определяются, представляют собой подходящим образом выбранную совокупность ортогональных функций для решения рассматриваемой задачи о выпучивании. Конечно, эти формы удовлетворяют концевым, а также добавочным условиям закрепления в точках  $B$  и  $C$  задачи о выпучивании. Эти функции  $\varphi$  достаточно хорошо аппроксимируют форму кривой прогибов исследуемой системы, и можно полагать, что линейная комбинация только немногих последовательных функций<sup>1)</sup> даст приближенное решение с приемлемой степенью точности.

<sup>1)</sup> Не обязательно, чтобы используемые функции  $\varphi$  соответствовали нижним критическим значениям  $P$  сжатого стержня  $ABCD$ , укрепленного без промежуточных упругих опор.

Первые три формы показаны на рис. 29, а условия ортогональности [уравнение (78)] вкратце рассмотрены в § 22. Подставляя  $y = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots$  в выражение энергии (91), легко заметить, что определенные интегралы сводятся к сумме квадратов  $\sum a_i a_i^2$ , в которых вследствие условия ортогональности (78) смешанные произведения отсутствуют. Это обстоятельство значительно упрощает исследование: при минимизации выражения (91) находим, что диагональные члены детерминанта  $\Delta$  образованы только этими двумя интегралами, в связи с чем они приобретают преобладающее значение; в результате этого при расчетах учитывается только несколько последовательных функций для получения практически достаточно точного результата<sup>1)</sup>.

Аналогичные соображения относительно выбора координатных функций  $\varphi$  используются также при решении двумерных задач о выпучивании, связанных с устойчивостью пластинок.

Метод Ритца имеет один недостаток: при его использовании оценка точности результатов затруднена, тогда как точность явно возрастает с увеличением числа используемых членов; единственным способом для определения сходимости рядов (86) является сопоставление последовательных результатов, полученных с большим числом членов, — способ громоздкий и даже не всегда верный. Попытки преодоления этих трудностей будут описаны в § 26.

## 25. Метод Тимошенко решения задач о выпучивании

Свой метод Тимошенко<sup>2)</sup> излагает следующим образом. Прямой сжатый стержень под действием осевой нагрузки  $P$ , меньшей, чем критическая  $P_{кр}$ , находится в устойчивом положении, ибо при незначительном изгибании он возвращается к своему первоначальному положению в случае, если устраняется возмущение. Для того чтобы вызвать прогиб, необходимо затратить некоторое количество работы. Математически это можно выразить следующим неравенством:

$$V - W > 0, \quad (92)$$

где  $V$  обозначает энергию деформации изгиба, а  $W = P \Delta l$  — работу, затраченную внешней силой  $P$ . С увеличением  $P$  разность  $V - W$  уменьшается и стремится к нулю, когда  $P$  приближается к  $P_{кр}$ . Следовательно, условие

$$V - W = 0 \quad (93)$$

характеризует начальное состояние выпучивания, при котором прямая форма равновесия переходит в неустойчивую криволинейную

<sup>1)</sup> Эта задача подробно рассматривается в § 83 гл. VIII.

<sup>2)</sup> Timoshenko S., Theory of Elastic Stability, стр. 78, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1936; русский перевод: Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, 1955, стр. 91.

форму равновесия. Поступая так же, как Ритц, и подставляя в выражение для интегралов, входящих в  $V$  и  $W$ , ряды вида (86), Тимошенко выводит следующее уравнение<sup>1)</sup>:

$$F_1(a_1 \dots a_n) - PF_2(a_1 \dots a_n) = 0, \quad (94)$$

на основе которого получим:

$$P = \frac{F_1(a_1 \dots a_n)}{F_2(a_1 \dots a_n)}. \quad (95)$$

Отсюда Тимошенко заключает, что параметры  $a$  должны быть выбраны так, чтобы значение  $P$  явилось минимумом. Это условие приводит к  $n$  уравнениям

$$\frac{\partial P}{\partial a_i} = \frac{1}{F_2^2} \left( \frac{\partial F_1}{\partial a_i} F_2 - \frac{\partial F_2}{\partial a_i} F_1 \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

которые преобразуются в следующие:

$$\frac{1}{F_2} \left( \frac{\partial F_1}{\partial a_i} - \frac{\partial F_2}{\partial a_i} \frac{F_1}{F_2} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (96)$$

Так как  $P = F_1/F_2$  [уравнение (95)], то окончательно получим:

$$\frac{\partial F_1}{\partial a_i} - P \frac{\partial F_2}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (97)$$

Эти  $n$  уравнения идентичны уравнениям (88), которые определяют параметры  $a$  и критическую силу  $P_{кр}$ , так как  $V + U_w = F_1 - PF_2$ .

На основе теоремы, согласно которой рассчитанное из уравнения (95) выражение для  $P$  должно быть минимумом, можно заключить, что меньшие значения для  $P$  можно получить при условии, когда вычисленная форма кривой прогибов  $u$  лучше аппроксимирует точную кривую формы равновесия. Из этого следует, что приближенное значение  $P_{кр}$  независимо от того, определено ли оно методом Ритца или Тимошенко, должно быть всегда больше точного его значения.

Для некоторых задач о выпучивании можно получить хорошую аппроксимацию, используя только одну координатную функцию  $u = a_1 \varphi_1$ . В этих случаях из уравнения (93), выражающего условие равенства энергии деформации  $V$  и работы  $W$ , произведенной внешними силами, выводится значение критической силы безотносительно к любому минимальному принципу. Выражая  $V$  и  $W$  в уравнении (93)

<sup>1)</sup> Для того чтобы сравнить метод Тимошенко с методом Ритца, необходимо учесть, что рассмотренная в предыдущих параграфах потенциальная энергия внешних нагрузок  $U_w$  и работа  $W$  связаны уравнением  $U_w = -W$ . Следовательно, уравнение (93) можно написать в виде  $V + U_w = 0$ , в результате чего функции  $F_1$  и  $F_2$ , входящие в уравнение (87), встречаются опять в уравнении (94).



через  $a_1\varphi_1$ , находим, что в них обоих содержится множитель  $a_1^2$ , и после деления на  $a_1^2$  получим для  $P$  линейное уравнение <sup>1)</sup>. В главе V этот простой метод применяется для определения критической силы заделанных сжатых стержней.

## 26. Дальнейшее развитие метода Ритца

В первоначальном виде метод Ритца был основан на идее о том, что прогиб  $y$  рассмотренной упругой системы можно выразить в форме суммы координатных функций  $\varphi$ , где каждый член разложения удовлетворяет частным граничным условиям задачи. Естественно, что это условие несколько ограничивает выбор координатных функций; в случае же отказа от этого требования мы получаем больше свободы в выборе этих функций с тем преимуществом, что во многих случаях появляется возможность применить наиболее простые координатные функции, являющиеся членами ряда Фурье. Однако в случае, если функции  $\varphi$  нарушают некоторые граничные условия задачи, то необходимо добиться, чтобы выражение для  $y$  хотя бы в целом удовлетворяло всем граничным условиям. Для этого необходимо, чтобы решение  $y$ , кроме условия (82), удовлетворяло бы также некоторым дополнительным условиям, вытекающим из частных граничных условий данной задачи.

Способ нахождения критической силы, по существу, остается тот же, что описанный выше при изложении метода Ритца. Предполагается, что  $y$  выражается в виде  $y = a_1\varphi_1 + \dots + a_i\varphi_i + \dots + a_n\varphi_n$ , где  $\varphi_i$  являются подходящим образом выбранными координатными функциями, которые, однако, не удовлетворяют всем граничным условиям задачи; коэффициенты  $a_i$  можно определить из энергетического критерия:

$$V + U_w = \text{стационарному значению}, \quad (98)$$

где  $V$  и  $U_w$  являются квадратичными функциями параметров  $a_i$ . Наряду с этим коэффициенты  $a_i$  удовлетворяют также некоторым уравнениям вида

$$f_1(a_1 \dots a_n) = 0, f_2(a_1 \dots a_n) = 0, \dots f_r(a_1 \dots a_n) = 0, \quad (99)$$

выражающим граничные условия, которым выбранные нами функции  $\varphi_i$  не удовлетворяют; число этих уравнений составляет  $r$  и  $r < n$ .

Одновременное удовлетворение уравнениям (99) и выражению стационарности (98) достигается применением метода множителя Лагранжа, на основе которого значения параметров получаются из условия, что выражение

$$\bar{U} = V + U_w - \lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2 - \dots - \lambda_r f_r \quad (100)$$

<sup>1)</sup> Этот способ соответствует методу Рэлея нахождения собственных частот колеблющихся систем.

имеет стационарное значение, где  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  являются множителями, которые должны быть определены так, чтобы уравнения (99) удовлетворялись. Таким образом, получим  $n$  уравнений

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (101)$$

которые вместе с  $r$  уравнениями (99) определяют  $n$  значений  $a$  и  $r$  множителей  $\lambda$ .

На первый взгляд описанный выше способ может показаться более сложным, чем первоначальный метод Ритца, так как в отличие от детерминанта  $n$ -го порядка, полученного по методу Ритца, он дает детерминант  $n + r$ -го порядка. Однако при решении некоторых задач существует возможность выбора такой совокупности координатных функций  $\varphi_i$ , которые являются решениями задачи о выпучивании той же конструкции, но с другими граничными условиями <sup>1)</sup>. В этом случае условия ортогональности, значение которых подчеркивалось ранее, дают возможность привести окончательное условие устойчивости к детерминанту системы  $r$  уравнений, из которого определяются  $r$  множителей Лагранжа  $\lambda_1 \dots \lambda_r$ .

Основные особенности этого метода можно продемонстрировать при помощи элементарного примера, точное решение которого заведомо известно.

Рассмотрим сжатый стержень длиной  $l$ , защемленный на обоих концах, имеющий постоянный момент инерции  $J$  (рис. 32). Для потенциальной энергии имеем следующее выражение:

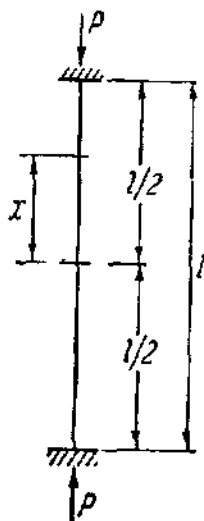


Рис. 32.

$$U = V + U_w = -\frac{EJ}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} y''^2 dx - \frac{P}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} y'^2 dx. \quad (102)$$

Кривая прогибов  $y$  определяется из условия стационарности  $U$ . Функция  $y$  удовлетворяет граничным условиям для зажатых концов

$$y = 0 \quad \text{и} \quad y' = 0 \quad (103)$$

при  $x = l/2$  и  $x = -l/2$ . Предположим, что функция  $y$  имеет следующий вид:

$$y = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i = \sum_{i=1}^n a_i \cos \frac{(2i-1)\pi x}{l}, \quad (104)$$

<sup>1)</sup> При исследовании зажатой пластинки можно использовать более простые решения свободно опертой пластинки.

где  $n > 2$ . Члены, входящие в эту сумму, представляют собой последовательные симметричные характеристические функции задачи о выпучивании того же сжатого стержня, но имеющего шарнирно опертые концы. Каждая из координатных функций  $\varphi_i = \cos \frac{(2i-1)\pi x}{l}$  удовлетворяет первому и не удовлетворяет второму граничному условию (103). Чтобы удовлетворить этому второму граничному условию, необходимо наложить следующее дополнительное условие:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i (2i-1) a_i = 0. \quad (105)$$

Согласно методу множителя Лагранжа выражение

$$\bar{U} = V + U_w - \lambda \sum_{i=1}^n (-1)^i (2i-1) a_i \quad (106)$$

должно иметь стационарное значение, где множитель  $\lambda$  определяется из уравнения (105). Используя уравнения (102) и (104), слагаемое  $V + U_w$  в уравнении (106) можно выразить через коэффициенты  $a_i$  следующим образом:

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{EJ\pi^4}{4i^3} (2i-1)^4 a_i^2 - \frac{P\pi^2}{4l} (2i-1)^2 a_i^2 - \lambda (-1)^i \frac{\pi}{l} (2i-1) a_i \right]. \quad (107)$$

Выражение для  $\bar{U}$  имеет стационарное значение, если

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial a_i} = \left[ \frac{EJ\pi^4}{2i^3} (2i-1)^4 - \frac{P\pi^2}{2l} (2i-1)^2 \right] a_i - \lambda (-1)^i \frac{\pi}{l} (2i-1) = 0, \quad (108)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Вследствие условия ортогональности в уравнении (107) смешанные числа  $a_i a_k$  не встречаются, поэтому каждое уравнение (108) содержит только один из коэффициентов  $a_i$ , который определяется в функции от  $\lambda$  следующим образом:

$$a_i = (-1)^i \frac{2}{(2i-1)\pi} \frac{\lambda}{(2i-1)^2 P_E - P}, \quad (109)$$

где  $P_E$  представляет собой эйлерову силу  $\pi^2 EJ/l^2$ . Подставляя эти значения  $a_i$  в уравнение (105), получим следующее выражение для определения множителя  $\lambda$ :

$$\frac{2\lambda}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)^2 P_E - P} = 0. \quad (110)$$

Значения  $\lambda$ , отличные от нуля, существуют только при условии, если сумма в уравнении (110) равняется нулю; следовательно, условие

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)^2 P_E - P} = 0 \quad (111)$$

является условием устойчивости. Решая уравнение (111) для  $n = 2, 3, 4$  и  $5$ , получим следующие приближенные значения критической силы  $P_{кр} = 5P_E, 4,63P_E, 4,45P_E, 4,35P_E$ , которые сходятся к точному значению  $P_{кр} = 4P_E$ .

В данном примере существенным является тот факт, что, несмотря на использование  $n$  координатных функций  $\varphi_i$ , мы вывели условие устойчивости из одного уравнения (110), а не из детерминанта системы  $(n+1)$  уравнений. Необходимо также отметить, что для большей точности требуется сравнительно большое число членов  $n$ , но это обстоятельство не является серьезным препятствием, так как порядок детерминанта не меняется, если число использованных членов увеличивается.



Рис. 33.

В вышеприведенном примере, так же как и в первоначальном методе Ритца, мы получили приближенные значения критической силы, которые оказались большими, чем ее точное значение.

Для того чтобы оценить степень полученного приближения с данным числом членов, весьма желательно было бы иметь также

меньшее приближенное значение критической силы по сравнению с ее точным значением. Для некоторых задач о выпучивании пластинок можно найти нижнюю границу значений критической силы с помощью видоизменения приведенного выше метода использования координатных функций, не удовлетворяющих граничным условиям. В качестве примера можно привести задачу выпучивания прямоугольной защемленной пластинки при сдвиге (рис. 33)<sup>1)</sup>.

Обозначая прогиб пластинки через  $w$ , мы аппроксимируем этот прогиб при помощи следующего двойного ряда Фурье:

$$w = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \sin \frac{2i\pi x}{a} \sin \frac{2k\pi y}{b} + \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n d_{ik} \cos \frac{2i\pi x}{a} \cos \frac{2k\pi y}{b}. \quad (112)$$

<sup>1)</sup> Эта частная задача подробно рассмотрена в работе: B u d i a n s k y B., P a i C. H u, C o n n o r R. W., Notes on the Lagrangian Multiplier Method, NASA Tech. Note 1558, 1948.

Это уравнение удобно для выражения симметричных деформаций пластинки. Граничные условия для защемленной пластинки имеют вид:

на сторонах

$$x = \pm \frac{a}{2} \quad \text{и} \quad y = \pm \frac{b}{2} \quad w = 0; \quad (113a)$$

на сторонах

$$x = \pm \frac{a}{2} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad (113b)$$

на сторонах

$$y = \pm \frac{b}{2} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (113c)$$

При рассмотрении координатных функций в уравнении (112) становится ясно, что члены, содержащие синусы, удовлетворяют граничным условиям (113a), но не удовлетворяют уравнениям (113b) и (113c), в то время как члены, содержащие косинусы, удовлетворяют условиям (113b) и (113c), но не удовлетворяют условию (113a). Для того чтобы прогиб  $w$  удовлетворял граничным условиям, которые нарушаются отдельными координатными функциями, необходимо удовлетворять дополнительным условиям между коэффициентами. Подставляя уравнение (112) в уравнения (113), получим следующие дополнительные граничные условия:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i d_{ik} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n); \quad (114a)$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k d_{ik} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n); \quad (114b)$$

$$\sum_{i=1}^n i (-1)^i a_{ik} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad (114c)$$

$$\sum_{k=0}^n k (-1)^k a_{ik} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (114d)$$

При условии использования, так же как и выше, метода множителя Лагранжа с целью определения стационарного значения потенциальной энергии, удовлетворяя всем условиям (114), мы снова получим значение критической силы, которое, очевидно, будет большим, чем значение действительной критической силы. Вместо этого мы обеспечим стационарное значение потенциальной энергии, игнорируя некоторые из граничных условий (114); возьмем уравнения (114a) и (114c) только при  $k = 0, 1, \dots, r$ , а уравнения (114b) и (114d) при  $i = 1, 2, \dots, r$ , где  $r < n$ . Поступая таким образом, мы рассчитываем критическую силу уже не полностью защемленной

пластинки, но лишь частично заделанной. Точное значение критической силы частично заделанной пластинки, очевидно, ниже, чем значение критической силы полностью защемленной пластинки, поэтому вычисленное приближенное значение будет меньше, чем критическая сила полностью защемленной пластинки при условии, если выбрано достаточно большое число  $n$  для обеспечения хорошей аппроксимации. Необходимо обратить внимание на тот факт, что вследствие условия ортогональности, установленного между использованными координатными функциями, порядок детерминанта, который нужно решить, зависит не от числа этих функций, а только от числа удерживаемых условий (114).

Мы не будем далее рассматривать эту частную задачу, так как привели ее лишь в качестве примера для демонстрации метода, который также можно применить и в других соответствующих случаях решения задачи о выпучивании пластинок. Этот метод был предложен Курантом, а его применимость доказана Треффцом<sup>1)</sup> для случая с квадратной пластинкой, защемленной на всех четырех сторонах и сжатой вдоль двух противоположных сторон. Дальнейшее развитие этого метода принадлежит Будянскому и Ху<sup>2)</sup>.

## 27. Решение задач о сжатом стержне методом последовательных приближений

Другим методом нахождения приближенного решения задачи устойчивости, применяемым, в частности, при рассмотрении проблем устойчивости сжатых стержней, является метод последовательных приближений, известный как метод Стодола — Вианелло. В сущности, этот метод является не чем иным, как численным или графическим способом интегрирования дифференциального уравнения устойчивости сжатого стержня при помощи ряда последовательных приближений. Вианелло<sup>3)</sup> использовал его в области прикладных наук, указав на возможность его применения для графического решения задач о сжатом стержне. Стодола<sup>4)</sup> впервые доказал его применимость при решении задач о колебании. Математическое доказательство сходимости метода было дано Кохом<sup>5)</sup>.

Исходя из дифференциального уравнения второго порядка шарнирно опертого сжатого стержня

$$EJ_{xx}y'' + Py = 0, \quad (115)$$

<sup>1)</sup> Треффц, цит. выше, стр. 85.

<sup>2)</sup> Будянский, Ху, цит. выше, стр. 85.

<sup>3)</sup> Vianello L., Graphische Untersuchung der Knickfestigkeit gerader Stäbe, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, т. 42, стр. 36, 1898.

<sup>4)</sup> Stodola A., Loewenstein L. C., «Steam Turbines», 2d rev. ed., стр. 185, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1905.

<sup>5)</sup> Koch J. J., Bestimmung höherer kritischer Drehzahlen schnelllaufender Wellen, Proc. 2d Intern. Congr. Applied Mechanics, Zürich, 1926, стр. 213.

предположим, что момент инерции  $J_\omega = J\psi(x)$  является непрерывной или разрывной функцией от  $x$ . Подставляя в уравнение (115)  $J\psi(x)$ , где  $J$  является моментом инерции в произвольном фиксированном сечении, а  $\psi(x)$  — заданной функцией от  $x$ , получим:

$$\psi(x) y'' + \lambda^2 y = 0, \quad (116)$$

где  $\lambda = \sqrt{P/EJ}$ . Для того чтобы решить дифференциальное уравнение (116) методом последовательных приближений, поступим следующим образом: рассмотрим ряд функций

$$z_0, z_1, z_2, \dots, \quad (117)$$

удовлетворяющих граничным условиям задачи и связанных между собой дифференциальными уравнениями

$$z_n'' = -\frac{z_{n-1}}{\psi(x)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (118)$$

Если выбрать  $z_0$  произвольно, то функции  $z_1, z_2, \dots$  можно последовательно определить непосредственным интегрированием уравнения (118). Как видно из последующего изложения, полученные таким образом функции  $z_n$  сходятся к характеристическому решению  $y_1$  (первая форма выпучивания) дифференциального уравнения (116), а соответствующее характеристическое значение  $\lambda$ , которое определяет критическое значение  $P$ , можно выразить уравнением

$$\lambda_1^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_{n-1}}{z_n}. \quad (119)$$

В случае удачного выбора функции  $z_0$ , с которой начинается процесс вычисления, значение дроби  $z_{n-1}/z_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) очень быстро приближается к точному значению параметра  $\lambda_1^2$ . В большинстве случаев, для того чтобы получить практически точное значение  $\lambda_1$ , достаточно вычислить два или три приближения. Однако в результате получения ограниченного числа приближений обе кривые  $z_{n-1}$  и  $z_n$  полностью не совпадают, поэтому значение  $\lambda_1^2 = z_{n-1}/z_n$  будет зависеть от частного значения абсциссы  $x$ , соответствующей ординатам  $z_{n-1}$  и  $z_n$ . Это затруднение можно преодолеть путем введения понятия о среднем значении  $z$ :

$$\lambda_1^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^l z_{n-1} dx}{\int_0^l z_n dx}. \quad (120)$$

Быстрая сходимость этого процесса, с одной стороны, и легкость интегрирования уравнения (118), с другой, делают вышеизложенный метод ценным средством для приближенного решения

задач о сжатом стержне. В соответствии с уравнением (118)  $z_n$  можно рассматривать как величину момента, вызванного нагрузкой  $z_{n-1}/\psi(x)$ , и следовательно, интегрирование уравнения (118), необходимое для получения функции  $z_1, z_2, \dots$ , сводится к численному определению ординат эпюры моментов.

В самом деле, в процессе вычисления распределенную нагрузку  $z_{n-1}/\psi(x)$  можно заменить эквивалентными сосредоточенными силами, действующими в равноудаленных друг от друга точках сжатого стержня. Если допустить, что  $z_0$  представляет собой заданное значение прогиба (рис. 34), то прежде всего рассчитывают ординаты

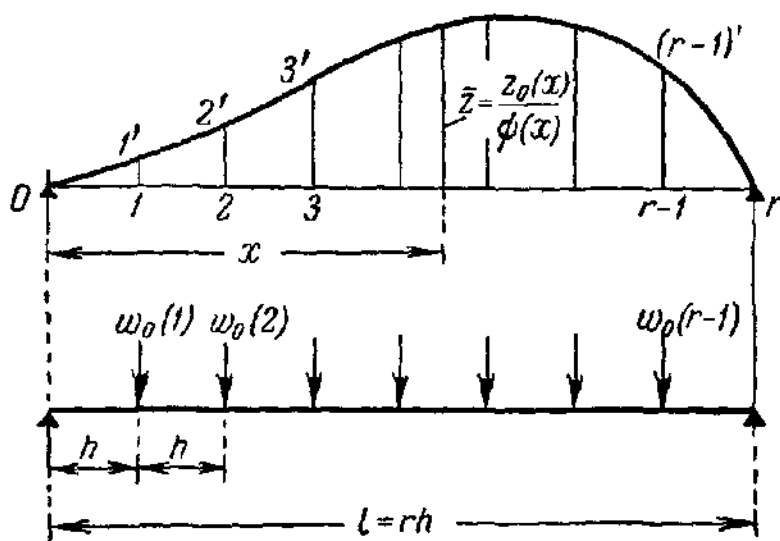


Рис. 34.

кривой  $\bar{z}_0(x) = z_0(x)/\psi(x)$  в точках  $1, 2, \dots, r-1$ . Это даст возможность определить эквивалентные сосредоточенные силы  $w_0(i)$ , действующие в точках  $i = 1, 2, \dots, r-1$ , на основании следующей приближенной формулы<sup>1)</sup>:

$$w_0(i) = \frac{h}{6} [\bar{z}_0(i-1) + 4\bar{z}_0(i) + \bar{z}_0(i+1)] \quad (i = 1, 2, \dots, r-1). \quad (121)$$

В случае, если кривая  $\bar{z}_0$  имеет разрыв в какой-то точке  $i$ , как это показано на рис. 35, нагрузку  $w_0(i)$  нужно вычислить из следующего уравнения:

$$w_0(i) = \frac{h}{6} [\bar{z}_0(i-1) + 2(\bar{z}_0'(i) + \bar{z}_0''(i)) + \bar{z}_0(i+1)]. \quad (122)$$

Теперь легко определить численно значение момента  $m_1(i)$ , вызванного действием сил  $w_0(i)$ , методом, известным каждому строительному инженеру; этот метод заключается в вычислении конечных реакций, нахождении поперечной силы в каждом интервале

<sup>1)</sup> Эта формула получена в результате замены кривой  $z_0/\psi(x)$  ломаной линией  $01'2'3'...$



путем добавления значений последовательных нагрузок к поперечной силе в предшествующем участке стержня и, наконец, в определении моментов при помощи добавления значений последовательных значений поперечных сил, умноженных на длину  $h$  интервалов<sup>1)</sup>. Результирующий момент  $m_1(i)$  является первым приближением кривой прогибов  $z_1(i) = m_1(i)$ .

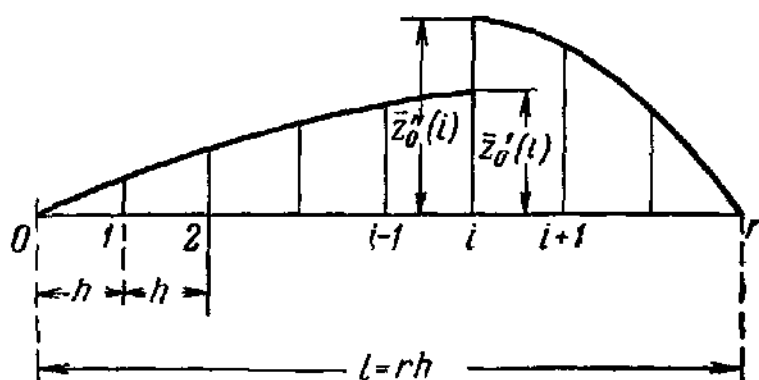


Рис. 35.

Повторяя вышеизложенный процесс вычисления, исходя из кривых  $m_1(i)/\psi$ ,  $m_2(i)/\psi$ , ..., получим более точные формы кривых прогибов:

$$z_n(i) = m_n(i).$$

Используя уравнение (120), параметр  $\lambda_1$  можно выразить следующим образом:

$$\lambda_1^2 = \frac{\int z_{n-1} dx}{\int z_n dx} = \frac{\sum_{i=0}^r m_{n-1}(i)}{\sum_{i=0}^r m_n(i)}; \quad (123)$$

в результате критическая сила будет равна

$$P_{кр} = EJ \frac{\sum_{i=0}^n m_{n-1}(i)}{\sum_{i=0}^r m_n(i)}. \quad (124)$$

До сих пор нагрузка  $P$  предполагалась постоянной. Вышеизложенный метод применим также и в случае, когда величина  $P$  изменяется вдоль длины сжатого стержня. В таком случае необхо-

<sup>1)</sup> Всестороннее изложение численных методов при определении значений моментов и их применения при вычислении прогибов и критических сил дано в работе: Newmark N. M., Numerical Procedure for Computing Deflections, Moments, and Buckling Loads, Trans. ASCE, т. 108, стр. 1161, 1943.

можно использовать более общую форму уравнения (115):

$$EJ_x y'' + M(x) = 0, \quad (125)$$

где  $M(x)$  обозначает момент в текущем сечении  $x$  изогнутой оси сжатого стержня. Рассмотрим, например, сжатый стержень длиной  $l$ ,

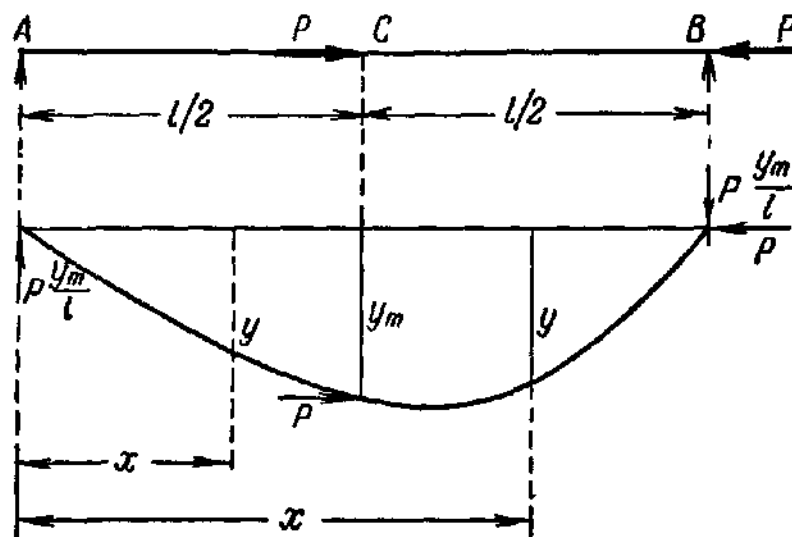


Рис. 36.

нагруженный в середине осевой силой  $P$  (рис. 36). Момент  $M(x)$  между точками A и C выражается в виде

$$M(x) = P y_m \frac{x}{l},$$

а между точками C и B будет равен

$$M(x) = P \left[ y_m \frac{x}{l} - (y_m - y) \right].$$

Предположим, что  $M(x) = P \mu(x)$ . Тогда уравнение (125) примет следующий вид:

$$\psi(x) y'' + \lambda^2 \mu(x) = 0, \quad (126)$$

где  $\lambda = \sqrt{P/EJ}$ , и вместо уравнения (118) получается следующее соотношение:

$$z_n'' = - \frac{\mu_{n-1}(x)}{\psi(x)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (127)$$

Так же как в случае с постоянным  $P$ , данную задачу можно решить последовательным интегрированием уравнения (127), если для  $n=1$  исходить из произвольной кривой  $\mu_0(x)$  и использовать вышеописанный численный метод.

Метод, рассмотренный в этом параграфе, полностью основан на теореме, выраженной уравнением (119), доказать которую было бы весьма интересно<sup>1)</sup>. Процесс последовательного прибли-

<sup>1)</sup> К о х, цит. выше, стр. 98.

жения начинается произвольной функцией  $z_0$ , которая удовлетворяет граничным условиям. Любую такую функцию можно разложить в ряд

$$z_0 = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3 + \dots \quad (128)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  представляют собой характеристические функции, соответствующие характеристическим значениям  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  дифференциального уравнения (116). Подставляя этот ряд в уравнение (118), для  $n=1$  получим:

$$z_1'' = - \left[ a_1 \frac{\varphi_1}{\psi(x)} + a_2 \frac{\varphi_2}{\psi(x)} + \dots \right]. \quad (129)$$

В связи с тем, что функция  $\varphi_i$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (116), если  $\lambda_i^2 = \lambda^2$ , имеем:

$$\frac{\varphi_i}{\psi(x)} = - \frac{\varphi_i''}{\lambda_i^2} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (129), получим:

$$z_1'' = a_1 \frac{\varphi_1''}{\lambda_1^2} + a_2 \frac{\varphi_2''}{\lambda_2^2} + \dots$$

Интегрируя дважды, приходим к следующему выражению:

$$z_1 = a_1 \frac{\varphi_1}{\lambda_1^2} + a_2 \frac{\varphi_2}{\lambda_2^2} + \dots \quad (130)$$

Рассуждая так же, как и в случае  $z_1$ , получим:

$$z_2 = \frac{a_1}{\lambda_1^4} \varphi_1 + \frac{a_2}{\lambda_2^4} \varphi_2 + \dots$$

и соответственно в результате  $n-1$  и  $n$  приближений имеем:

$$z_{n-1} = \frac{1}{\lambda_1^{2n-2}} \left( a_1 \varphi_1 + \frac{\lambda_1^{2n-2}}{\lambda_2^{2n-2}} a_2 \varphi_2 + \dots \right)$$

и

$$z_n = \frac{1}{\lambda_1^{2n}} \left( a_1 \varphi_1 + \frac{\lambda_1^{2n}}{\lambda_2^{2n}} a_2 \varphi_2 + \dots \right).$$

Так как  $\lambda_2, \lambda_3, \dots$  являются значительно большими величинами, чем  $\lambda_1$ , функции  $z_{n-1}$  и  $z_n$  при возрастании  $n$  сходятся к выражениям:

$$z_{n-1} \approx \frac{1}{\lambda_1^{2n-2}} a_1 \varphi_1 \quad \text{и} \quad z_n \approx \frac{1}{\lambda_1^{2n}} a_1 \varphi_1. \quad (131)$$

Таким образом, отношение  $z_{n-1}/z_n$  стремится к наименьшему характеристическому значению  $\lambda_1^2$ , когда  $n \rightarrow \infty$ .

## 28. Решение задач о выпучивании методом конечных разностей

Метод конечных разностей представляет собой приближенный численный метод для определения значений критических сил, основанный на использовании приближенных выражений производных,

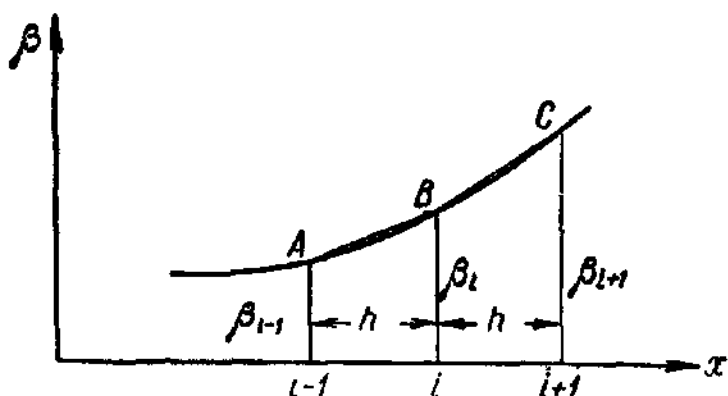


Рис. 37.

фигурирующих в дифференциальном уравнении и в граничных условиях задачи. Этот метод, введенный впервые Ричардсоном<sup>1)</sup> в 1911 г. и детально изученный Коллатцем<sup>2)</sup>, был рассмотрен Салвадори<sup>3)</sup> как метод последовательных приближений.

Сущность метода может быть раскрыта на примере решения задачи о боковом выпучивании свободно опертой двутавровой балки, основанного на дифференциальном уравнении<sup>4)</sup>

$$EI\beta^{IV} - GK\beta'' - \frac{M^2}{EJ_y}\beta = 0 \quad (132)$$

с граничными условиями на обоих концах балки

$$\beta = 0 \quad \text{и} \quad \beta'' = 0. \quad (133)$$

Разделим пролет  $L$  балки на  $n$  равных частей шириной  $h = L/n$  и обозначим значения  $\beta$  в точках деления через

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{i-1}, \beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n.$$

Когда расстояние  $h$  между точками  $i$  достаточно мало, наклон кривой  $\beta$  в точке  $i$  можно аппроксимировать наклоном одной из двух хорд  $AB$  или  $BC$  (рис. 37) и написать:

$$[\beta'_i]_{\text{лев}} = \frac{\beta_i - \beta_{i-1}}{h} \quad \text{и} \quad [\beta'_i]_{\text{пр}} = \frac{\beta_{i+1} - \beta_i}{h}. \quad (134)$$

Знак  $\approx$  обозначает приближенное равенство. Аналогичным образом

<sup>1)</sup> Richardson L. F., The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations with an Application to the Stresses in a Masonry Dam, Phil. Trans. Royal Soc. (London), т. 210, 1911.

<sup>2)</sup> Collatz L., «Eigenwert Probleme und ihre numerische Behandlung», Chelsea Publishing Company, New York, 1948.

<sup>3)</sup> Salvadori M. G., Numerical Computation of Buckling Loads by Finite Differences, Trans. ASCE, т. 116, 1951.

<sup>4)</sup> Это уравнение получено в главе IV [уравнение (315)]. Здесь рассматривается такое нагружение, при котором  $a = 0$ .

вторую производную от  $\beta$  в точке  $i$  можно аппроксимировать разностью между наклонами  $[\beta'_i]_{\text{пр}}$  и  $[\beta'_i]_{\text{лев}}$ , деленной на  $h$ :

$$\beta''_i = \frac{1}{h} \left( \frac{\beta_{i+1} - \beta_i}{h} - \frac{\beta_i - \beta_{i-1}}{h} \right) = \frac{\beta_{i+1} - 2\beta_i + \beta_{i-1}}{h^2}, \quad (135)$$

а производную четвертого порядка можно получить приближенно, используя уравнения (135), как вторую производную второй производной:

$$\beta^{IV}_i = \frac{\beta''_{i+1} - 2\beta''_i + \beta''_{i-1}}{h^2} = \frac{\beta_{i+2} - 4\beta_{i+1} + 6\beta_i - 4\beta_{i-1} + \beta_{i-2}}{h^4}. \quad (136)$$

Разделив уравнение (132) на  $E\Gamma$  и подставив приближенные значения  $\beta''$  и  $\beta^{IV}$ , данные при помощи уравнений (135) и (136), получим следующее разностное уравнение в каждой точке  $i$ :

$$\frac{\beta_{i+2} - 4\beta_{i+1} + 6\beta_i - 4\beta_{i-1} + \beta_{i-2}}{h^4} - \frac{GK}{E\Gamma} \frac{\beta_{i+1} - 2\beta_i + \beta_{i-1}}{h^2} - \frac{M^2}{E^2\Gamma J_y} \beta_i = 0,$$

которое после умножения на  $h^4 = L^4/n^4$  примет вид

$$\begin{aligned} \beta_{i+2} - \left(4 + \frac{GKL^2}{E\Gamma n^2}\right) \beta_{i+1} + \left(6 + 2\frac{GKL^2}{E\Gamma n^2} - \frac{M^2 L^4}{E^2\Gamma J_y n^4}\right) \beta_i - \\ - \left(4 + \frac{GKL^2}{E\Gamma n^2}\right) \beta_{i-1} + \beta_{i-2} = 0. \end{aligned} \quad (137)$$

На основе уравнения (135) граничные условия (133) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_0 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\beta_1 - 2\beta_0 + \beta_{-1}}{h^2} = 0; \\ \beta_n = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\beta_{n+1} - 2\beta_n + \beta_{n-1}}{h^2} = 0, \end{aligned}$$

или

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_{-1} = -\beta_1, \quad \beta_n = 0, \quad \beta_{n+1} = -\beta_{n-1}. \quad (138)$$

В то время как уравнения (138) определяют фиктивные значения  $\beta_{-1}$  и  $\beta_{n+1}$  для точек, находящихся вне опор балки, через неизвестные значения  $\beta_1$  и  $\beta_{n-1}$  между опорами, уравнения (137) имеют место в  $n-1$  точках  $i=1, 2, \dots, n-1$  и образуют систему совместных линейных уравнений от  $n-1$  неизвестных вращений  $\beta_i$ . Эти уравнения являются однородными; следовательно, они имеют тривиальное решение  $\beta_i = 0$ , соответствующее невыпученному состоянию балки, но в случае, если детерминант, составленный из коэффициентов этих уравнений, равен нулю, они имеют также отличное от нуля решение. Условие, налагаемое на критическую силу, полученное приравнением к нулю этого детерминанта, определяет

критические значения нагрузки с точностью, которая повышается по мере увеличения числа делений  $n$ .

Для наглядного представления этого процесса рассмотрим свободно опертую 76-фунтовую балку № 24 длиной 25 футов и нагруженную вертикальной силой  $P$ , действующей в центре тяжести среднего поперечного сечения. В этом случае

$$M = \begin{cases} \frac{P}{2} z, & \text{если } 0 \leq z \leq \frac{L}{2}; \\ \frac{P}{2} (L - z), & \text{если } \frac{L}{2} \leq z \leq L, \end{cases}$$

и уравнение (137) для  $0 \leq z \leq L/2$  примет следующий вид:

$$\beta_{i+2} - \left(4 + \frac{GKL^2}{EI n^2}\right) \beta_{i+1} + \left(6 + 2 \frac{GKL^2}{EI n^2} - \frac{P^2 z_i^3 L^4}{4E^2 I J_y n^4}\right) \beta_i - \\ - \left(4 + \frac{GKL^2}{EI n^2}\right) \beta_{i-1} + \beta_{i-2} = 0, \quad \text{если } 0 \leq z \leq \frac{L}{2}.$$

Вводя обозначения

$$A = \frac{GKL}{EI}, \quad B = \frac{P^2 L^6}{4E^2 I J_y}, \quad x_i = \frac{z_i}{L} \quad (139)$$

и умножая вышенаписанное на  $n^4$ , получим:

$$n^4 \beta_{i+2} - (4n^4 + An^2) \beta_{i+1} + (6n^4 + 2An^2 - Bx_i^3) \beta_i - (4n^4 + An^2) \beta_{i-1} + \\ + n^4 \beta_{i-2} = 0, \quad \text{если } 0 \leq x_i \leq \frac{1}{2}. \quad (140)$$

Соответствующее уравнение для левой части балки  $\left(\frac{1}{2} \leq x_i \leq 1\right)$  здесь не приводится, так как значение  $\beta$  симметрично относительно середины пролета и поэтому  $\beta_i = \beta_{n-i}$ .

Механические и геометрические постоянные рассмотренной балки имеют следующие значения:

$$E = 29,5 \cdot 10^6 \frac{\text{фунт}}{\text{дюйм}^2}; \quad G = \frac{5}{13} E; \quad K = 2,9 \text{ дюйма}^4; \\ J_y = 76,5 \text{ дюйма}^4; \quad d = 23,9 \text{ дюйма}; \quad L = 300 \text{ дюймов}; \\ A = \frac{GKL^2}{EI} = \frac{4GK}{E J_y d^2} = 9,19.$$

Используем уравнение (140), увеличивая число  $n$  участков балки. Наименьшее значение  $n$ , которое можно использовать, равно  $n = 2$ , но, имея целью раскрыть вышеуказанный метод, примем  $n = 4$ .

Приближение  $n=4$ . Применяя уравнение (140) в точках  $i=1$  и  $i=2$  (рис. 38), получим следующие два совместных уравнения:

$$\begin{aligned} -4^4\beta_1 - 0 + \left(6 \times 4^4 + 2A \times 4^2 - \frac{B_4}{4^2}\right)\beta_1 - \\ - (4 \times 4^4 + A \times 4^2)\beta_2 + 4^4\beta_1 = 0; \\ 0 - (4 \times 4^4 + A \times 4^2)\beta_1 + \left(6 \times 4^4 + 2A \times 4^2 - \frac{B_4}{2^2}\right)\beta_2 - \\ - (4 \times 4^4 + A \times 4^2)\beta_1 + 0 = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \left(6 \times 4^4 + 2A \times 4^2 - \frac{B_4}{16}\right)\beta_1 - (4 \times 4^4 + A \times 4^2)\beta_2 = 0; \\ - (8 \times 4^4 + 2A \times 4^2)\beta_1 + \left(6 \times 4^4 + 2A \times 4^2 - \frac{B_4}{4}\right)\beta_2 = 0, \end{aligned}$$

где  $B_4$  является приближенным значением  $B$  (для  $n=4$ ), определенным уравнением (139).

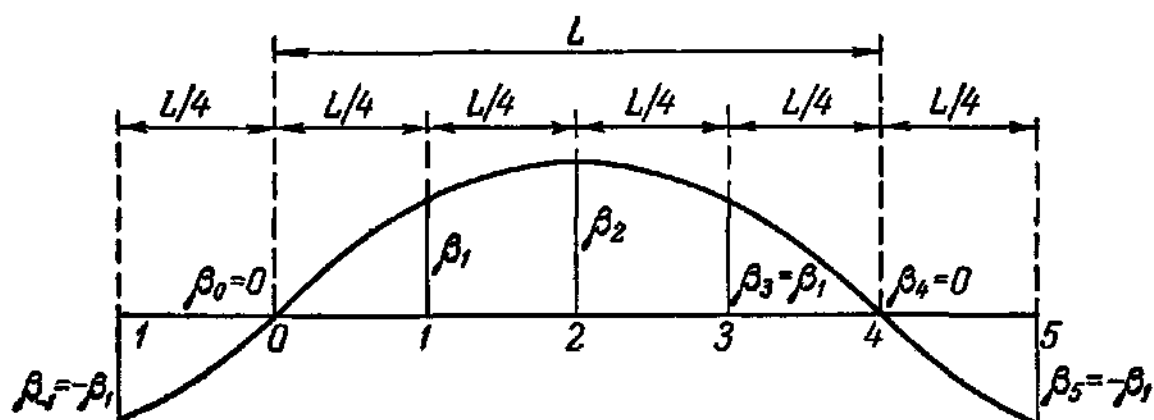


Рис. 38.

Приравняв нулю детерминант, составленный из коэффициентов этих уравнений, получим квадратное уравнение относительно величины  $B_4$ :

$$\begin{vmatrix} \left(1830 - \frac{B_4}{16}\right) & -1171 \\ -2342 & \left(1830 - \frac{B_4}{4}\right) \end{vmatrix} = B_4^2 - 36\,600B_4 + 38\,810\,752 = 0.$$

Наименьший корень этого уравнения, соответствующий наименьшему значению критической силы, равен  $B_4=1093$ , и следовательно, критическая сила  $P_4$  имеет следующее значение:

$$P_4 = \frac{EJ_y d}{L^3} \sqrt{B_4} = 1998 \sqrt{B_4} = 66\,054 \text{ фунта}$$

с ошибкой на 11,5% по сравнению со значением 74 670 фунтов, вычисленным по таблице 5 в главе IV.

В следующей таблице 4 приведены последовательные значения  $P_n$  с соответствующими ошибками, выраженными в процентах.

Результаты, полученные методом конечных разностей, могут быть существенно улучшены, если предположить, что ошибка в значении  $P_n$  обратно пропорциональна  $n^2$ .

Т а б л и ц а 4

$n$	$P_n$	Ошибка, %
2	46 860 (21 255 кг)	+ 37,2
3	76 690 (34 786 кг)	— 2,7
4	66 054 (29 962 кг)	+ 11,5
5	74 700 (33 884 кг)	0
6	70 980 (31 752 кг)	+ 5,2
7	74 680 (33 874 кг)	0

Это предположение пригодно только в случае уравнений с постоянными коэффициентами, однако оно приводит к хорошим результатам всякий раз, когда применяется к монотонно возрастающей или убывающей последовательности значений  $P_n$  (монотонная последовательность).

Например, обозначая через  $P$  действительное значение нагрузки и используя четные аппроксимации в таблице 4, получим:

$$P - P_2 = \frac{C}{2^2} \quad \text{и} \quad P - P_4 = \frac{C}{4^2},$$

где  $C$  — постоянная. Решая относительно  $P$ , получим:

$$P_{2,4} = \frac{4}{3} P_4 - \frac{1}{3} P_2 = 72 452,$$

при этом ошибка равна  $\pm 3\%$  по сравнению с ошибками в  $+37,2\%$  и  $11,5\%$  для  $P_2$  и  $P_4$ . Значение  $P_{2,4}$  рассчитывается довольно просто и является лучшим приближением, чем значение  $P_6$ , для нахождения которого требуются составление и решение детерминантного уравнения третьей степени.

Метод конечных разностей может быть успешно применен для определения значений критических сил сжатых стержней или балок с переменным моментом инерции, а также для решения двумерных задач устойчивости пластинок и оболочек.

## 29. Введение в вариационное исчисление

Вариационное исчисление было введено Бернулли, Эйлером и Лагранжем для решения определенной группы задач геометрии и физики. В настоящее время оно представляет собой глубоко разработанную область современной математики, тесно связанную с теорией линейных дифференциальных уравнений, вместе с которой они составляют основу математического исследования различных задач статики и динамики. Для всестороннего понимания сущности энергетического метода, математических расчетов, производимых в процессе его применения, и взаимоотношения его с другими



методами, используемыми для решения задач механики, необходимо знание вариационного исчисления.

Вариационное исчисление можно рассматривать как обобщение элементарной теории максимума и минимума. В этой области математического анализа разрешается вопрос о нахождении точки  $x_0, y_0, \dots$ , в которой функция  $f(x, y, \dots)$  от  $n$  переменных принимает экстремальное значение, т. е. наибольшее или наименьшее значение  $f$  по сравнению со значениями, находящимися в непосредственной окрестности точки  $x_0, y_0, \dots$ . Критерием, определяющим эту точку, является равенство нулю производных  $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \dots$  в точке  $x = x_0, y = y_0, \dots$ . Точки, в которых производные обращаются в нуль, называются точками стационарных значений функции  $f$ .

В случае, когда переменные  $x, y, \dots$  не зависят одна от другой, но связаны с  $r$  уравнениями

$$g_1(x, y, \dots) = 0, \quad g_2(x, y, \dots) = 0, \quad \dots$$

(уравнения связи), можно соответствующим образом сформулировать критерий экстремума, используя метод *множителей Лагранжа*. После составления новой функции  $\bar{f}$ , содержащей параметры  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  (множители Лагранжа):

$$\bar{f} = f(x, y, \dots) - \lambda_1 g_1(x, y, \dots) - \lambda_2 g_2(x, y, \dots) + \dots, \quad (141)$$

определяются координаты  $x_0, y_0, \dots$  стационарных значений функции  $\bar{f}$ . Значения  $x_0, y_0, \dots$  являются функциями от  $r$  параметров  $\lambda$ , поэтому значения  $\lambda$  можно выбрать так, чтобы удовлетворить  $r$  уравнениям  $g_1 = 0, g_2 = 0, \dots$ . Таким образом, получим  $n + r$  уравнений

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = 0, \quad \dots, \quad g_1 = 0, \quad g_2 = 0, \quad \dots, \quad (142)$$

из которых определяются значения  $n + r$  неизвестных  $x_0, y_0, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ .

Вариационное исчисление также имеет дело с нахождением экстремума. Однако принципиальное различие в том, что в этом случае проблема состоит не в отыскании экстремального значения заданной функции  $f$  от нескольких переменных, а в определении экстремума функции  $F$  от функций. В качестве иллюстрации к задаче рассмотрим определенный интеграл

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \dots) dx, \quad (143)$$

где сама функция  $y$  и ее производные по  $y', y'', \dots$  являются функциями от  $x$ . Следовательно,  $I$  является функцией от функции

$y$ , которая представляет теперь независимую переменную и может принимать любую форму в пределах значений  $x_0$  и  $x_1$ . Основная задача вариационного исчисления состоит в определении аналитической формы функции  $y = y(x)$  таким образом, чтобы интеграл  $I$  принимал экстремальное значение или, как принято говорить, чтобы  $I$  имел стационарное значение.

Мы предполагаем, что подынтегральное выражение в уравнении (143) зависит только от одной функции  $y$ . Однако метод решения задачи об экстремуме, полученный на основе вариационного исчисления, можно также распространить на задачи, в которых подынтегральное выражение зависит от нескольких функций  $y, z, \dots$  и их производных любого порядка по  $x$ .

Кроме того, если  $F$  является функцией от функции  $u(x, y)$  двух независимых переменных  $x, y$ , то соответствующая задача, решаемая вариационным исчислением, заключается в нахождении функции  $u(x, y)$  таким образом, чтобы двойной интеграл, распространенный по площади  $A$ :

$$I = \int_A \int F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, \dots) dx dy, \quad (144)$$

принимал экстремальное значение. Переменные  $u_x, u_y, \dots$  обозначают частные производные

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \quad (145)$$

В следующих параграфах доказывается, что неизвестные функции, которые дают интегральным выражениям типа (143) и (144) стационарные значения, можно найти из линейных дифференциальных уравнений, вид которых зависит от функции  $F$ . Этот метод является классическим способом решения задачи вариационного исчисления. Получаемые дифференциальные уравнения называются уравнениями Эйлера. Изложенный в § 24 метод Ритца является другим методом, выработанным для приближенного решения той же задачи.

### 30. Интегралы, содержащие только одну функцию от одного независимого переменного

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'') dx \quad (146)$$

и найдем функцию  $y = y(x)$ , которая придает выражению  $I$  стационарное значение. Величины  $y(x_0)$  и  $y(x_1)$  являются заданными граничными значениями функции  $y$ , которую можно представить

геометрически в виде кривой  $AB$  в прямоугольной системе координат  $x, y$  (рис. 39). Предполагается, что функция  $y = y(x)$  удовлетворяет условию экстремума. Рассмотрим произвольную, но непрерывную функцию  $\eta(x)$ , определяемую в интервале  $x_0 < x < x_1$  таким образом, чтобы сама функция и ее первые производные по  $x$  на границах  $A$  и  $B$  равнялись нулю. Обозначая через  $\varepsilon$  малое число, составим теперь новую функцию

$$\bar{y} = y + \varepsilon \eta(x) \quad (147)$$

и величину  $\delta y = \varepsilon \eta(x)$  назовем вариацией функции  $y = y(x)$ . Если  $\varepsilon$  выбрано настолько малым, что для всех значений  $x$

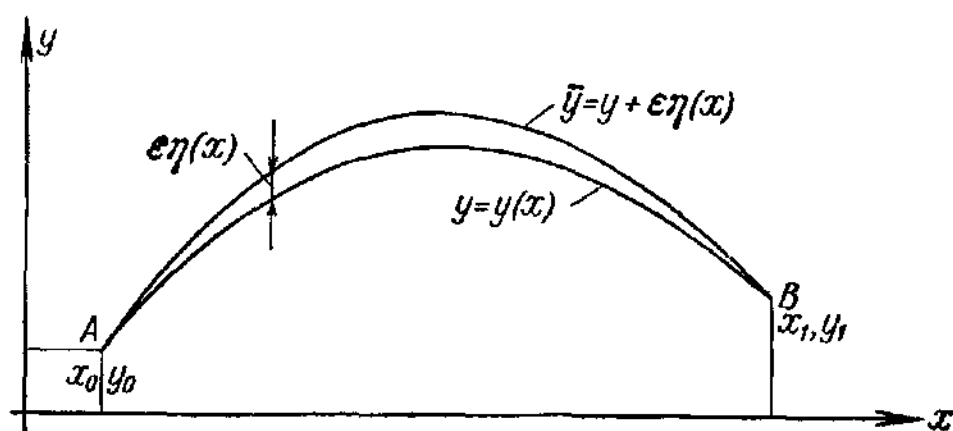


Рис. 39.

величина  $\varepsilon \eta(x)$  остается ниже некоторой, заранее выбранной величины  $\Delta$ , функция  $\bar{y}$  будет лежать в непосредственной окрестности решения  $y$ . Определенный интеграл

$$I(\bar{y}) = I[y + \varepsilon \eta(x)]$$

будет функцией  $\Phi(\varepsilon)$  от параметра  $\varepsilon$ , которая должна иметь стационарное значение при  $\varepsilon = 0$ . Используя уравнение (146), можно написать:

$$I(\bar{y}) = \Phi(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta', y'' + \varepsilon \eta'') dx. \quad (148)$$

Необходимым условием для того, чтобы функция  $\Phi(\varepsilon)$  принимала стационарное значение, является равенство

$$[\Phi'(\varepsilon)]_{\varepsilon=0} = 0, \quad (149)$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $\varepsilon$ . Далее, в соответствии с общеизвестными правилами дифференциального исчисления произведем указанное в уравнении (149) дифференцирование в интеграле уравнения (148). Учитывая, что производная от определенного интеграла тождественна интегралу от производной

подынтегрального выражения, в результате дифференцирования и предположения, что  $\varepsilon = 0$ , получим следующее условие:

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \eta + F_{y'} \eta' + F_{y''} \eta'') dx = 0, \quad (150)$$

где

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad F_{y''} = \frac{\partial F}{\partial y''}.$$

Здесь  $\delta y = \varepsilon \eta(x)$  является вариацией функции  $y(x)$  при переходе от  $y$  к соседней кривой  $\bar{y} = y + \varepsilon \eta(x)$ . Обозначая соответствующую вариацию  $y'$ , т. е.  $\varepsilon \eta'(x)$ , через  $\delta y'$ , а вариацию  $y''$ , т. е.  $\varepsilon \eta''(x)$ , через  $\delta y''$  и умножая уравнение (150) на  $\varepsilon$ , получим:

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'') dx = 0. \quad (151)$$

Это уравнение ясно показывает, что подынтегральное выражение может быть получено при помощи формального действия, идентичного с операцией дифференцирования подынтегрального выражения в уравнении (146) с заменой дифференциалов  $dy, dy', \dots$  вариациями  $\delta y, \delta y', \dots$ <sup>1)</sup>.

Левая часть уравнения (151) называется первой вариацией  $\delta I$  интеграла  $I$ , определяемого уравнением (146), а уравнение

$$\delta I = 0 \quad (152)$$

является необходимым условием стационарности выражения  $I$ .

Уравнения (150) или (151) применимы для любой произвольной функции  $\eta(x)$ , имеющей на границах  $x_0$  и  $x_1$ , как это было сказано в начале параграфа, значения  $\eta = \eta' = 0$ .

Для того чтобы исключить вариации  $\delta y'$  и  $\delta y''$  из уравнения (151), при помощи интегрирования по частям преобразуем второй и третий члены левой части следующим образом:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \delta y' dx = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'} \delta y dx = - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'} \delta y dx.$$

1) Согласно дифференциальному исчислению имеем:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial y'} dy' + \dots,$$

где  $dy, dy', \dots$  обозначают приращения, обусловленные увеличением значения  $x$  на  $dx$ , в то время как  $\delta y, \delta y', \dots$  представляют собой приращения (обусловленные возрастанием параметра  $\varepsilon$ ), которые, таким образом, меняют вид функции  $y, y', \dots$

При заданных граничных условиях для  $\eta(x)$  первый член правой части вышенаписанного уравнения, содержащий вариацию  $\delta y = \epsilon \eta(x)$ , равен нулю. Дважды интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} F_{y''} \delta y'' dx &= [F_{y''} \delta y']_{x_0}^{x_1} - \left[ \frac{d}{dx} F_{y''} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \delta y dx = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \delta y dx. \end{aligned}$$

Первый и второй члены правой части также равны нулю вследствие заданных граничных условий для функции  $\eta(x)$ . Подставляя это выражение в уравнение (151), получим:

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \right) \delta y dx = 0. \quad (153)$$

Вариация  $\delta y$  является функцией от  $x$  и может принимать любое произвольное, отличное от нуля значение. Интеграл (153) равняется нулю для любого значения  $\delta y$  при условии, если выражение, находящееся в скобках, равняется нулю для всех значений  $x$ . Это условие даст нам следующее уравнение:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 0, \quad (154)$$

из которого можно определить функцию  $y$ . Уравнение (154) известно как *дифференциальное уравнение Эйлера*<sup>1)</sup>. Решение задачи об экстремуме сводится к решению дифференциального уравнения (154), которое нужно решить с учетом особых граничных условий рассмотренного случая.

Для пояснения процесса получения дифференциального уравнения, связанного с данной задачей об экстремуме, рассмотрим интеграл

$$U = \int_0^l \left( \frac{EJ}{2} y''^2 - \frac{P}{2} y'^2 - wy \right) dx, \quad (155)$$

выражающий потенциальную энергию балки длиной  $l$  с постоянным моментом инерции  $J$ , подверженной действию равномерно распределенной вдоль длины  $l$  поперечной нагрузки  $w$  и осевой силы  $P$ . Уравнением равновесия, из которого определяется прогиб  $y$ , является условие минимума выражения  $U$ :

$$\delta U = 0. \quad (156)$$

<sup>1)</sup> Уравнение (154) было впервые получено Эйлером.

Условие (156) будет удовлетворено, если  $y$  является решением уравнения Эйлера (154). Применяя его для выражения энергии (155), имеем:

$$F = \frac{EJ}{2} y''^2 - \frac{P}{2} y'^2 - \omega y$$

и

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{\partial F}{\partial y} = -\omega; \\ F_{y'} &= \frac{\partial F}{\partial y'} = -Py' \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = -Py''; \\ F_{y''} &= \frac{\partial F}{\partial y''} = EJy'' \quad \text{и} \quad \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} = EJy^{IV}. \end{aligned}$$

Таким образом, получим следующее уравнение:

$$EJy^{IV} + Py'' = \omega, \quad (157)$$

которое представляет собой хорошо известное дифференциальное уравнение четвертого порядка для балки, нагруженной осевой силой  $P$  и равномерно распределенной поперечной нагрузкой  $\omega$ .

### 31. Интегралы, содержащие несколько функций, зависящих от одного независимого переменного

В случае, если нужно определить  $r$  функций  $y(x)$ ,  $z(x)$ , ... от  $x$  так, чтобы интеграл

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, \dots, y', z', \dots, y'', z'') dx \quad (158)$$

имел стационарное значение, процесс получения  $r$  уравнений Эйлера, определяющих функции  $y, z, \dots$ , в основном тот же, что и в предыдущем параграфе. Вводя снова произвольные функции  $\eta(x)$ ,  $\zeta(x)$ , ..., которые обращаются в нуль вместе с их первыми производными на границах  $x = x_0$  и  $x = x_1$ , заключаем, что функция

$$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) &= \\ &= \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon_1 \eta, z + \varepsilon_2 \zeta, \dots, y' + \varepsilon_1 \eta', z' + \varepsilon_2 \zeta', \dots) dx \end{aligned}$$

от переменных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  должна иметь стационарное значение при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 0$ . Это даст нам  $r$  условий

$$\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} \right]_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} = 0, \quad \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2} \right]_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} = 0, \quad \dots,$$



эквивалентному уравнению (151) § 30. Интегрируя по частям только по  $x$ , получаем:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial F}{\partial w_x} \delta w_x dx dy = \\ = \left[ \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial F}{\partial w_x} \delta w dy \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_x} \delta w dx dy. \end{aligned} \quad (163)$$

Интегрируя по частям только по  $y$ , находим:

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial F}{\partial w_y} \delta w_y dx dy = \left[ \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial w_y} \delta w dx \right]_{y_0}^{y_1} - \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_y} \delta w dx dy. \quad (164)$$

Так как на всех четырех границах  $\eta = 0$ ,  $\delta w = \varepsilon \eta$  также равняется нулю на границах; в связи с этим простые интегралы в уравнениях (163) и (164) обращаются в нуль. Следовательно, уравнение (162) можно написать в следующем виде:

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \left( \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_y} \right) \delta w dx dy = 0$$

и заключить, что функция  $w$  должна удовлетворять уравнению Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_y} = 0. \quad (165)$$

Если подынтегральное выражение содержит члены, зависящие от вторых производных функции  $w$ , уравнение Эйлера имеет следующий вид:

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} = 0. \quad (166)$$

Как пример рассмотрим задачу о выпучивании свободно опертой плоской прямоугольной пластинки при сдвиге. Полная потенциальная энергия  $U$ , которая должна иметь стационарное значение, равна <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} U = \int_0^a \int_0^b \left[ \frac{D}{2} (w_{xx} + w_{yy})^2 - \right. \\ \left. - D(1 - \nu) (w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2) - t \tau_{xy} w_x w_y \right] dx dy. \end{aligned} \quad (167)$$

<sup>1)</sup> Уравнения (723) и (725) главы XI.



При использовании уравнения (167) нужно иметь в виду, что член  $w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2$ , который появляется во всех задачах о пластинках, не связан с уравнением Эйлера. Этот неожиданный результат является следствием того, что значение двойного интеграла

$$\int_0^a \int_0^b (w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2) dx dy \quad (168)$$

можно выразить через линейный интеграл, распространенный вдоль границ пластинки; отсюда значение интеграла является постоянным, зависящим не от функции  $w$ , а лишь от граничных условий.

Следовательно, вместо выражения (167) мы имеем более простой интеграл:

$$I = \int_0^a \int_0^b \left[ \frac{D}{2} (w_{xx} + w_{yy})^2 - t\tau_{xy} w_x w_y \right] dx dy, \quad (169)$$

для которого получим уравнение Эйлера (166). Значения членов уравнения (166) следующие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial w} &= 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_x} = -t\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_y} = -t\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} &= D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right); \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} &= D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right); \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} = 0. \end{aligned}$$

В результате получим уравнение Эйлера:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + 2t\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad (170)$$

которое представляет собой хорошо известное дифференциальное уравнение для пластинки, находящейся под действием касательных сил.

### 33. Граничные условия

В заключение краткого введения в теорию вариационного исчисления остается рассмотреть еще одну особенность вариационного метода. В предшествующем изложении молчаливо предполагалось, что неизвестная функция  $u$  или ее производные на границах системы принимают заведомо определенные значения. Однако во многих случаях не существует особых ограничений относительно свободного перемещения на границе (свободный край). Кроме того, в различных случаях функция  $u$  вдоль границы удовлетворяет линейным

соотношениям, выражающим имеющиеся на границе условия закрепления, вызванные взаимодействием между системой и поддерживающей конструкцией.

При выводе выражения (153) для первой вариации  $\delta I$  было отмечено, что некоторые получаемые члены, зависящие от граничных значений, равны нулю как результат того, что по предположению граничные значения  $y$  и ее производных определены заранее и не подлежат вариации; из этого следует, что  $\delta y, \delta y', \dots$  равняются нулю на границе. Однако в тех случаях, когда подобное допущение не имеет места, из условия  $\delta I = 0$  выводится не только дифференциальное уравнение Эйлера, но и добавочные условия на границе, которые принимаются за естественные граничные условия рассмотренной задачи. Эти граничные соотношения по существу являются механическими соотношениями, содержащими поперечную силу, изгибающие или крутящие моменты даже в случае свободного края. Они имеют совершенно другой характер по сравнению с геометрическими соотношениями рассмотренных выше фиксированных граничных значений.

Важным является тот факт, что механические граничные условия, которые вместе с геометрическими условиями на границе влияют на решение дифференциального уравнения, могут быть получены как естественные граничные условия соответствующей вариационной задачи. Однако фиксированные граничные значения, представляющие собой особые геометрические условия, должны быть наложены отдельно в связи с тем, что их нельзя получить в результате вариации.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу устойчивости. Опертый на обоих концах сжатый стержень  $AB$ , находящийся под

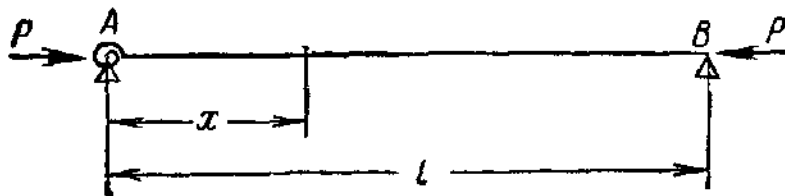


Рис. 40.

действием осевой силы  $P$ , упруго заделан против вращения на левой опоре  $A$  и свободно вращается на правой опоре  $B$  (рис. 40). Для потенциальной энергии имеем следующее выражение:

$$U = \int_0^l \left( \frac{EJ}{2} y''^2 - \frac{P}{2} y'^2 \right) dx + \frac{C}{2} y_0'^2, \quad (171)$$

где  $C$  есть крутильная жесткость пружины, определяющая степень заделки на левой опоре, а  $y_0'$  — угол вращения поперечного сечения в точке  $x = 0$ . Выражение  $U$  имеет стационарное значение, если

вариации  $\delta U = 0$ , поэтому, применяя тот же способ, что и в § 30, получим:

$$\delta U = \int_0^l (EJy'' \delta y'' - Py' \delta y') dx + Cy'_0 \delta y'_0 = 0. \quad (172)$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$\int_0^l EJy'' \delta y'' dx = [EJy'' \delta y']_0^l - [EJy''' \delta y]_0^l + \int_0^l EJy^{IV} \delta y dx; \quad (173a)$$

$$- \int_0^l Py' \delta y' dx = -[Py' \delta y]_0^l + \int_0^l Py'' \delta y dx. \quad (173b)$$

Вследствие несмещаемости опор на концах  $x=0$  и  $x=l$  прогиб  $y$ , а также и вариация прогиба  $\delta y$  в этих точках равны нулю ( $y=0$ ,  $\delta y=0$ ). Следовательно, в уравнениях (173) члены, зависящие от граничных значений и содержащие  $\delta y$ , равны нулю. Первый член уравнения (173a) можно записать в виде

$$[EJy'' \delta y']_0^l = EJy''_l \delta y'_l - EJy''_0 \delta y'_0,$$

где индексы 0 и  $l$  обозначают соответственно значения в точках  $x=0$  и  $l$ .

Отсюда уравнение (172) можно преобразовать к следующему виду:

$$\delta U = EJy''_l \delta y'_l + (Cy'_0 - EJy''_0) \delta y'_0 + \int_0^l (EJy^{IV} + Py'') \delta y dx. \quad (174)$$

Так как  $\delta y'_0$  и  $\delta y'_l$  не равны нулю, из уравнения (174) вытекает, что  $y$  удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера

$$EJy^{IV} + Py'' = 0 \quad (175)$$

и двум добавочным условиям:

$$Cy'_0 - EJy''_0 = 0; \quad (176)$$

$$EJy''_l = 0. \quad (177)$$

Уравнения (176) и (177) представляют собой естественные граничные условия задачи. В сумме с двумя геометрическими условиями  $y_0 = y_l = 0$  мы имеем четыре граничных условия, необходимых для решения дифференциального уравнения четвертого порядка.

Легко понять физический смысл уравнений (176) и (177). Уравнение (176) выражает равновесие между изгибающим моментом в точке  $x=0$  и моментом сопротивления упругой опоры. Уравнение (177) показывает, что момент в точке  $x=l$  равен нулю; это

соответствует предположению о том, что сжатый стержень свободно вращается на опоре  $B$ .

Идея использования естественных граничных условий, изложенная выше, позволяет сделать важное заключение относительно применения метода Ритца к вариационным задачам, содержащим механические граничные условия. Из вариации выражения потенциальной энергии  $U$  можно получить как дифференциальное уравнение Эйлера, так и естественные граничные условия. Следовательно, функция  $y$ , удовлетворяющая условию  $\delta U = 0$ , будет удовлетворять уравнению Эйлера, а также естественным граничным условиям. Подразумевается, что при выборе разложения  $\sum a_i \cdot \varphi_i$ , необходимого для непосредственного решения вариационной задачи, координатные функции должны удовлетворять только геометрическим граничным условиям задачи, естественные же граничные условия механически аппроксимируются при применении метода Ритца. В случае, если координатные функции  $\varphi_i$  составляют часть полной совокупности ортогональных функций<sup>1)</sup>, ряд

$$y = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \dots + a_n \varphi_n, \quad (178)$$

состоящий из  $n$  членов, по мере увеличения  $n$  сходится к решению, которое также удовлетворяет естественным граничным условиям задачи<sup>2)</sup>.

При применении описанного выше метода можно обнаружить, что в некоторых случаях ряды (178) сходятся медленно, и для определения формы выпученной кривой  $y$  с достаточной точностью требуется большое число координатных функций, но, несмотря на это, критическая сила может быть определена при помощи малого числа координатных функций. Это осложнение имеет место в том случае, если функции  $\varphi_i$  неудачно подобраны по отношению к естественным граничным условиям, как это можно видеть из следующего примера.

Рассмотрим снова сжатый стержень  $AB$ , показанный на рис. 40. Его потенциальная энергия дана уравнением (171), а естественные граничные условия — уравнениями (175) и (176). Если выразить  $y$  в виде ряда Фурье

$$y = \sum_{i=1}^n a_i \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (179)$$

и вычислить значения  $y''$  для  $x=0$  и  $x=l$ , то мы найдем, что для любого значения коэффициентов  $a_i$   $y''_0 = y''_l = 0$ . Этот результат совпадает со вторым граничным условием (177), но в то же время

<sup>1)</sup> В смысле, приведенном на стр. 81.

<sup>2)</sup> Применение этого метода можно найти в работе: Bleich F., Bleich H., Beitrag zur Stabilitäts Untersuchung des punktwise elastisch gestützten Stabes, Der Stahlbau, т. 18, стр. 17, 1937,

он расходится с точным значением  $y_0''$ . Вследствие того что в точке  $x=0$  существует упругая заделка, значение  $y_0''$  должно быть отличным от нуля, — результат, который невозможно вывести из уравнения (179). Несмотря на это, ряд (179) будет аппроксимировать точное значение  $y$ , однако вторая производная ряда (179) не может аппроксимировать  $y''$ , поэтому  $y$  будет представлять собой расходящийся ряд.

Подобные затруднения не влияют на значения критической силы, определенные данным методом. Для того чтобы показать степень аппроксимации, вычислялась величина  $P_{кр}$  для жесткости пружины  $C=3EJ/l$ . Найденные приближенные значения для  $n=1, 2, 3$  были следующими:  $P_{кр}=1,61P_E$ ,  $P_{кр}=1,48P_E$ ,  $P_{кр}=1,41P_E$ , где  $P_E$  обозначает эйлерову силу сжатого стержня, в то время как полученное другим методом точное решение дает  $P_{кр}=1,40P_E$ .

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

### К §§ 20—27

Marguerre K., Über die Behandlung von Stabilitätsproblemen mit Hilfe der energetischen Methode, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. 18, стр. 57, 1938.

Grammel R., Ein neues Verfahren zur Lösung technischer Eigenwertprobleme, Ingenieur — Archiv, т. 10, стр. 35, 1939.

Hoff N. J., Stable and Unstable Equilibrium of Plane Frameworks, Jour. Aeronaut. Sci., т. 8, стр. 115, 1941.

Westergaard H. M., On the Method of Complementary Energy, Trans. ASCE, т. 107, стр. 765, 1942.

Courant R., Problems of Equilibrium and Vibrations, Bull. Am. Math. Soc., т. 49, стр. 1, 1943.

Prager W., The General Variational Principle of the Theory of Structural Stability, Quart. Applied Math., т. 4, стр. 378, 1947.

Higgins T. J., A Survey of the Approximate Solution of Two dimensional Physical Problems by Variational Methods and Finite Difference Procedures, глава 10 в книге «Numerical Methods of Analysis in Engineering, in Honor of Hardy Cross», The Macmillan Company, New York, 1949.

### К §§ 29—33

Courant R., Hilbert D., Methoden der mathematischen Physik 1 главы 4 и 6, Springer, Berlin, 1924.

Margenau H., Murphy G. M., The Mathematics of Physics and Chemistry, т. 6, Calculus of Variations, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1943.

---

### ГЛАВА III

## ВЫПУЧИВАНИЕ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ, ВСЛЕДСТВИЕ КРУЧЕНИЯ И ИЗГИБА

### 34. Введение

В главе I был рассмотрен основной случай выпучивания центрально сжатых стержней при молчаливом предположении, что сжатый стержень выпучивается в плоскости, проходящей через главную ось без вращения поперечных сечений. Это предположение естественно для стержней, поперечные сечения которых имеют две оси симметрии, но весьма спорно для случаев, когда только одна главная ось является осью симметрии или когда поперечные сечения не являются симметричными. Возможность появления крутильной формы потери устойчивости сжатого стержня впервые была установлена после того, как в авиационных конструкциях были применены тонкостенные открытые сечения и на практике было показано, что стержни открытого поперечного сечения при осевом сжатии обнаруживали тенденцию к одновременному изгибу и кручению. Важность установления этой формы потери устойчивости заключается в том, что действительная величина критической силы таких сжатых стержней вследствие их малой крутильной жесткости может оказаться меньшей, чем величина критической силы, данная обобщенной формулой Эйлера.

Вагнер<sup>1)</sup> впервые исследовал крутильную форму выпучивания стержней с открытыми поперечными сечениями; он ввел в своем исследовании понятие «единичного искажения». Однако Вагнер основывал свою теорию на произвольном предположении о том, что центр вращения во время выпучивания совпадает с центром сдвига — явление, которое в общем случае не имеет места, как это было доказано последующими исследователями. Следовательно, результаты исследования Вагнера не являются точными. Остенфельд<sup>2)</sup> изучал явление выпучивания вследствие изгиба и кручения некоторых про-

---

<sup>1)</sup> Wagner H., Verdrehung und Knickung von offenen Profilen, 25 Anniversary Publication, Technische Hochschule Danzig, 1904—1929. Перевод в NACA Tech. Mem., стр. 807, 1936.

<sup>2)</sup> Ostenfeld A., Politeknisk Laereanstalts Laboratorium for Bygningsstatik, Meddelelse, № 5, Kopenhagen, 1931.

катных стержней и первым дал точные решения для случая стержней, поперечное сечение которых представляет собой швеллер, уголок и тавр. Его метод являлся довольно сложным и не привлек большого внимания.

Задача изгиба, кручения и выпучивания тонкостенных стержней полигонального поперечного сечения была рассмотрена Ф. Блейхом и Г. Блейхом<sup>1)</sup>. Эти исследователи вывели основные дифференциальные уравнения задачи, исходя из теоремы о стационарном значении потенциальной энергии, и установили, что обычные дифференциальные уравнения изгиба остаются верными для сечений, не имеющих двух осей симметрии, при условии, если вместо перемещений центра тяжести в качестве координаты используются перемещения центра сдвига. Этот метод решения задачи существенно отличался от метода Вагнера тем, что основные дифференциальные уравнения были выведены без учета понятия о единичном искажении. В их работе дан краткий анализ применения этого метода к задачам крутильного выпучивания центрально сжатых стержней и бокового выпучивания поперечно нагруженных балок. При рассмотрении задачи о сжатом стержне они в выражении для потенциальной энергии пренебрегали членом, важным для сечений, имеющих очень малую крутильную жесткость, уменьшая, таким образом, точность решения. В дальнейшем на эту неточность указал Каппус<sup>2)</sup>, который в 1937 г. дал усовершенствованную теорию, применяемую для любой формы тонкостенного поперечного сечения. Он также обратил внимание на неверное предположение Вагнера относительно расположения центра вращения. Так же как Ф. Блейх и Г. Блейх, Каппус пришел к своему решению, исходя из теоремы о стационарном значении потенциальной энергии. Независимо от Каппуса Лундквист и Флигг<sup>3)</sup> опубликовали в том же году точную теорию, дополняя гипотезу Вагнера теоремой, согласно которой центр вращения находится в том положении, где критическая сила будет наименьшей. Теория Каппуса, так же как теорема Лундквиста и Флигга, основывается на идее о единичном искажении Вагнера. В своей недавно опубликованной статье Гудьер<sup>4)</sup> детально исследует значение гипотез, выдвинутых Вагнером и последующими учеными. Гудьеру удалось привести уравнения выпучивания вследствие

1) Bleich F., Bleich H., Bending Torsion and Buckling of Bars Composed of Thin Walls, Prelim. Publ. 2d Cong. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., English edition, стр. 871, Berlin, 1936.

2) Kappus R., Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich, Luftfahrt-Forschung, 1937. Перевод в NACA Tech. Mem. 851, 1938.

3) Lundquist E. E., Fligg C. M., A Theory for Primary Failure of Straight Centrally Loaded Columns, NACA Tech. Rept. 582, 1937; Lundquist, E. E., On the Strength of Columns That Fail by Twisting, Jour. Aeronaut. Sci., т. 4, стр. 249, 1937.

4) Goodier J. N., The Buckling of Compressed Bars by Torsion and Flexure, Cornell Univ. Eng. Expt. Sta. Bull. 27, December, 1941.

кручения и изгиба к наиболее простой форме, используя в качестве начала координатной системы центр сдвига. Исчерпывающий обзор проблемы изгиба и кручения стержней с открытыми поперечными сечениями, включающими вопросы выпучивания, содержится в статье Тимошенко<sup>1)</sup>.

Во всех упомянутых статьях выдвигается предположение о том, что плоские поперечные сечения сжатого стержня депланируются, но при выпучивании их геометрическая форма не меняется; таким образом, в этих теориях рассматривается основной<sup>2)</sup> вид потери устойчивости стержня в противоположность местной потере устойчивости, характеризующейся искривлением поперечных сечений. При исследовании местной потери устойчивости сжатых элементов тонкие стенки, как правило, нужно рассмотреть как пластинки или оболочки. Однако не всегда можно точно определить линию раздела между основным и местным выпучиванием. Крутильное выпучивание равнобоких уголков было, например, исследовано сначала Тимошенко в предположении местной потери устойчивости, тогда как другие авторы решали эту задачу, основываясь на гипотезе о недеформируемости поперечного сечения уголка.

Раздельное исследование основного и местного выпучивания неизбежно приводит только к приближенным результатам в связи с тем, что в действительности основное и местное выпучивание происходит одновременно. Не было предпринято попыток оценить точность теории основного изгибно-крутильного выпучивания путем совместного исследования основного и местного выпучивания, так как это было бы чрезвычайно сложно. Однако в теории изгибно-крутильного выпучивания до некоторой степени иногда можно учитывать местную неустойчивость при условии, если отказаться от допущений о недеформируемости поперечных сечений стержня. Нюландер<sup>3)</sup> исследовал влияние деформаций стенки на боковое выпучивание двутавровых балок. Гудьер и Бартон<sup>4)</sup> изучали то же самое влияние на крутильную жесткость двутавровых балок, не распространяя достигнутых результатов на задачу о выпучивании.

Нижеследующее изложение теории крутильного выпучивания основывается на дифференциальных уравнениях изгиба и кручения стержней с открытыми полигональными тонкостенными поперечными сечениями под действием произвольной внешней нагрузки. В этой

---

<sup>1)</sup> Timoshenko S., Theory of Bending, Torsion and Buckling of Thin-walled Members of Open Cross Section, Jour. Franklin Inst., 1945; русский перевод: Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, 1955, стр. 502.

<sup>2)</sup> То есть выпучивание в целом. (Прим. ред.).

<sup>3)</sup> Nylander H., Drehungsvorgänge und gebundene Kippung bei geraden doppelsymmetrischen I — Trägern, Ingeniörs Vetenskaps Akademiens Handlingar 174, Stockholm, 1943.

<sup>4)</sup> Goodier J. N., Barton M. V., The Effect of Web Deformation on the Torsion of I — Beams, Journ. Applied. Mechanics, т. 2, стр. A-35, 1944.



главе эта теория, описанная в §§ 35—38, явится общей основой для изучения выпучивания центрально сжатых стержней, а в следующей главе — для исследования устойчивости балок под действием осевых и поперечных нагрузок (боковое выпучивание). Метод получения формулы для энергии деформаций балки с открытым поперечным сечением аналогичен методу, изложенному в статье Ф. Блейха и Г. Блейха. В отличие от работ, основанных на гипотезе Вагнера, этот метод позволяет под другим углом зрения рассматривать поведение элемента при изгибе и кручении и проливает новый свет на вопрос о взаимодействии пластинок, из которых составлен сжатый стержень. Этот метод применяется только к элементам, составленным из плоских пластинок, что, однако, не является недостатком, так как в строительных конструкциях обычно используются сжатые элементы этого типа<sup>1)</sup>. Этот метод имеет то преимущество, что его можно применить к закрытым поперечным сечениям и легко приспособлять для учета влияния искривления поперечного сечения. Последний вопрос будет затронут в § 44 в связи с вылучиванием тавровых ребер жесткости. Результаты, достигнутые при применении изложенного метода, совпадают с результатами, полученными Лундкуистом, Каппусом и Гудьером. В дальнейшем будет выяснено взаимоотношение между основными предположениями изложенной в этой главе теории и предположениями, лежащими в основе теорий Лундкуиста, Каппуса и Гудьера.

### 35. Потенциальная энергия изгибаемых и закрученных стержней открытого тонкостенного поперечного сечения

Рассмотрим стержень постоянного, но вообще произвольного открытого поперечного сечения, составленного из  $n$  тонких плоских пластин (рис. 41). Пластины могут иметь переменную толщину, но должны быть достаточно тонкими для того, чтобы можно было пренебречь их поперечной жесткостью по сравнению с жесткостью в их собственной плоскости, а длина стержня велика по сравнению с размерами поперечного сечения. Выберем систему координат  $x, y, z$  с началом  $O$  в центре тяжести сечения;  $x$  и  $y$  являются главными осями сечения, а  $z$  — продольной осевой линией. Наряду с системой координат  $x, y$  и  $z$  в каждом поперечном сечении проводим проходящие через центр тяжести первоначально параллельные главным осям, связанные с сечением оси  $\xi$  и  $\eta$ . Вследствие перемещения поперечных сечений оси  $\xi$  и  $\eta$  будут двигаться вместе с ними, а составляющие перемещения центра тяжести, параллельные к этим осям, будут соответственно  $u$  и  $v$ .

<sup>1)</sup> Вагнер, Каппус, Лундкуист и Гудьер разработали методы, применяемые к криволинейным или полигональным поперечным сечениям,

Под действием внешних нагрузок стержень будет деформироваться; предположим, что деформация не вызывает искривления поперечных сечений стержня. Следовательно, составляющие перемещения любой точки, находящейся в плоскости поперечного сечения, будут определены координатами  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  центра тяжести и углом закручивания  $\beta$ . С другой стороны, эти перемещения определяются компонентами  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  перемещения центра тяжести и углом  $\beta$ . Переменные  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  и  $\beta$  являются функциями координаты  $z$ .

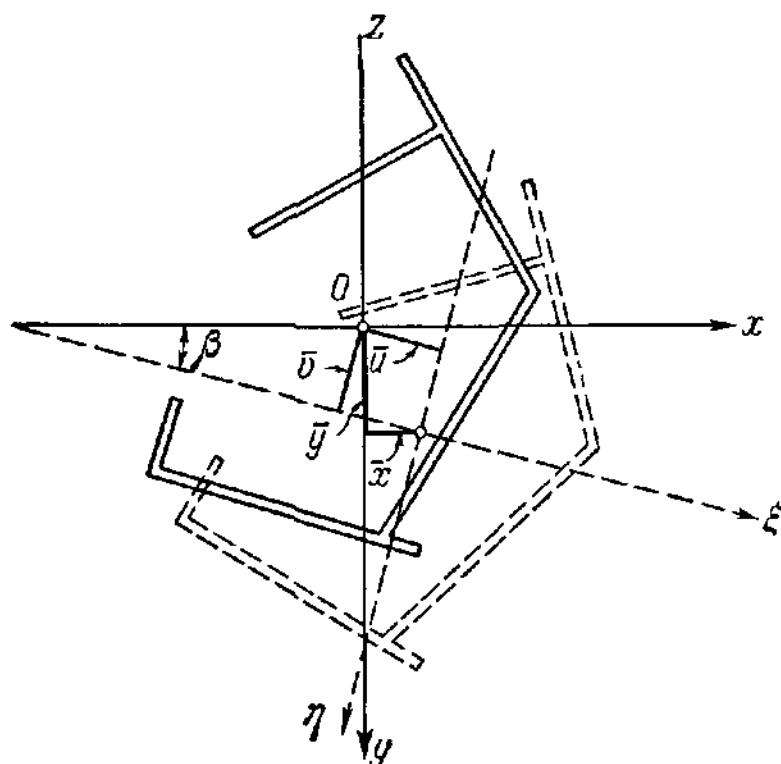


Рис. 41.

В обычной теории изгиба стержней продольные деформации, т. е. параллельные оси  $z$ , рассчитывают на основе гипотезы Навье, согласно которой при изгибе плоские поперечные сечения остаются плоскими. От этой гипотезы приходится отказаться, так как при кручении стержня поперечные сечения деформируются. Однако предположим, что гипотеза Навье имеет силу для каждой плоской пластинки, из которой составлен стержень. Такое предположение оказывается оправ-

данным, ибо, как это было доказано теорией кручения Сен-Венана, продольная осевая линия поперечного сечения тонкой плоской пластинки при кручении остается в одной плоскости. В пластинке в результате ее малой толщины деформация может меняться весьма незначительно, и поэтому полное поперечное сечение должно остаться плоским. Этот вопрос обсуждается подробнее на стр. 136. Как результат выдвинутого предположения поперечное сечение каждой пластинки, находящейся между двумя смежными углами, будет оставаться плоским, несмотря на то, что эти плоскости могут быть разными для двух смежных пластин и поперечное сечение всего стержня деформируется.

Учитывая вышеизложенное, выведем теперь основное дифференциальное уравнение кручения и изгиба на основе теоремы о стационарном значении потенциальной энергии, приведенной в главе II. Потенциальная энергия  $U$  состоит из двух частей: из потенциальной энергии внешних нагрузок и энергии деформации  $V$  деформирован-

ного стержня<sup>1)</sup>. В рассмотренном случае  $V$  можно разделить на две части:  $V_1$ , обусловленная продольными, нормальными напряжениями, и  $V_2$ , обусловленная напряжениями сдвига. Найдем прежде всего выражение для  $V_1$ .

Каждой плоской пластинке, составляющей стержень, припишем некоторое число; если имеется  $n$  таких пластинок, то эти числа будут  $1, 2, \dots, n$ . На рис. 42, а показана  $i$ -я и смежные с ней пластинки; центр тяжести  $i$ -й пластинки обозначен через  $O_i$ , а расстояния от  $O_i$  до точек пересечения осевых линий последовательных пластинок —

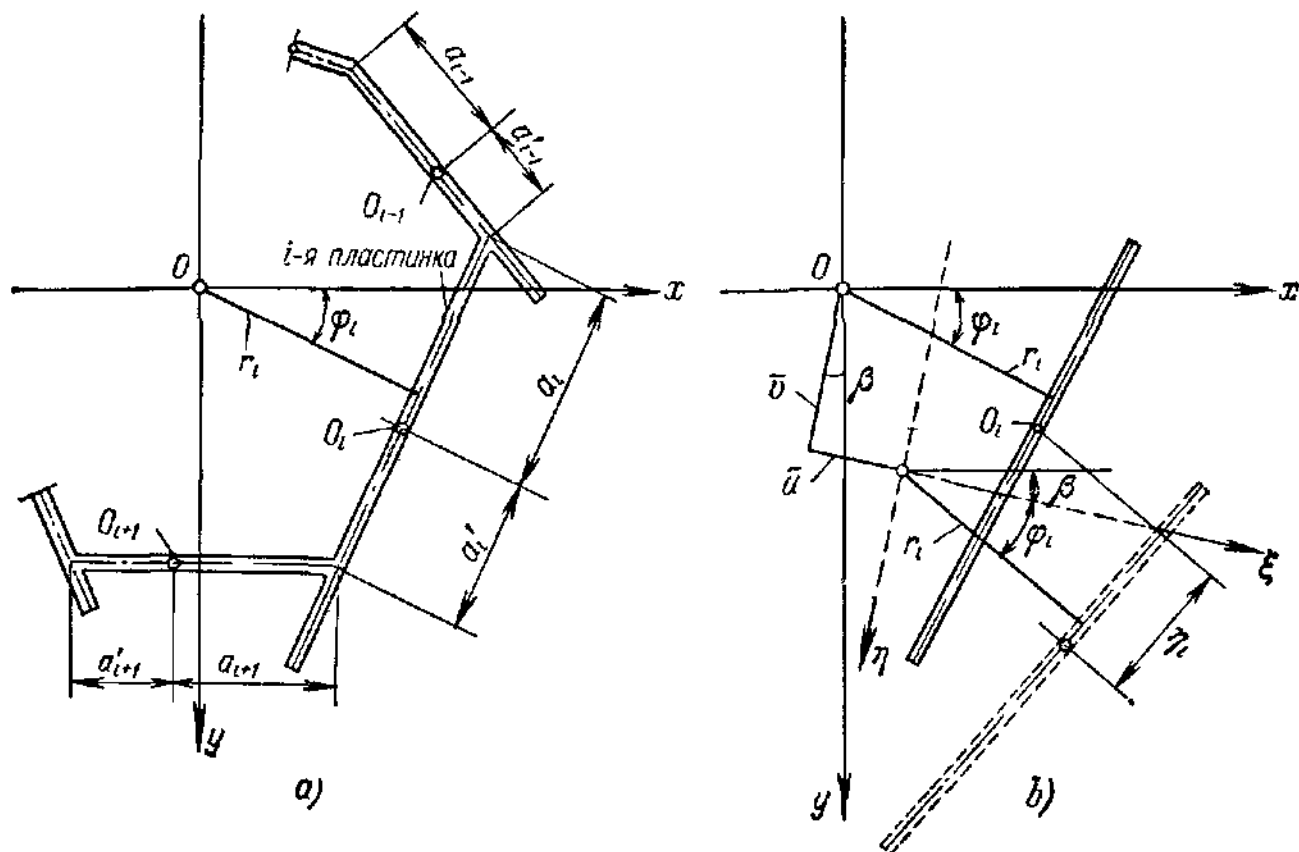


Рис. 42.

через  $a_i$  и  $a'_i$ . Перпендикуляр, опущенный из начала координат  $O$  на осевую линию пластинки, обозначим через  $r_i$ , а угол между этим перпендикуляром и осью  $x$  — через  $\varphi_i$ . Площадь поперечного сечения пластинки и ее момент инерции относительно оси, проходящей через  $O_i$  под прямым углом к пластинке, обозначим соответственно через  $A_i$  и  $J_i$ .

На рис. 42 показана  $i$ -я пластинка в ее первоначальном и деформированном положениях. Значение составляющей  $\eta_i$  прогиба этой пластинки в ее собственной плоскости можно получить, проектируя точку  $O_i$  из ее первоначального положения на осевую линию деформированной пластинки. Ввиду малости угла  $\beta$  можно считать

<sup>1)</sup> Любое выражение для потенциальной энергии содержит произвольную добавочную постоянную, которая в данном случае определяется условием  $U = 0$  для ненагруженного и недеформированного состояния стержня.

$\cos \beta = 1$ ,  $\sin \beta = \beta$ , отсюда

$$\eta_i = -\bar{u} \sin \varphi_i + \bar{v} \cos \varphi_i + \beta r_i. \quad (180)$$

Исходя из предположений о том, что гипотеза Навье применима для каждой отдельной пластинки, можно выразить значение части энергии деформации  $V_1$ , накопленной в  $i$ -й пластинке, через кривизну  $\frac{d^2 \eta_i}{dz^2} = \eta_i''$  и продольную деформацию  $\bar{\epsilon}_i$ , вычисленную для центра тяжести  $O_i$  пластинки:

$$\frac{1}{2} \int (E J_i \eta_i''^2 + E A_i \bar{\epsilon}_i^2) dz. \quad (181)$$

Полная энергия деформации для всех  $n$  пластинок будет

$$V_1 = \frac{1}{2} \int \sum_{i=1}^n (E J_i \eta_i''^2 + E A_i \bar{\epsilon}_i^2) dz, \quad (182)$$

где интеграл распространен вдоль всей длины стержня.

Кривизны  $\eta_i''$  и деформации  $\bar{\epsilon}_i$  не являются независимыми величинами вследствие того, что в местах сопряжения двух пластинок деформации обеих пластинок должны быть равны. При условии, когда положительное значение  $\bar{\epsilon}_i$  означает удлинение, в соответствии с рис. 42, а для сопряжения  $(i-1)$ -й и  $i$ -й пластинок получим следующее условие:

$$\bar{\epsilon}_{i-1} + a'_{i-1} \eta_{i-1}'' = \bar{\epsilon}_i - a_i \eta_i''. \quad (183)$$

Для  $n$  пластинок будем иметь  $n-1$  таких уравнений, по одному для каждого угла поперечного сечения. Для полного поперечного сечения величину средней деформации определим при помощи следующего соотношения:

$$A \bar{\epsilon} = \sum_{i=1}^n A_i \bar{\epsilon}_i, \quad (184)$$

где  $A$  представляет собой всю площадь поперечного сечения:  $A = \sum_{i=1}^n A_i$ . Обозначая через  $\epsilon_i$  разность деформации  $\bar{\epsilon}_i$  и средней деформации  $\bar{\epsilon}$ , имеем:

$$\epsilon_i = \bar{\epsilon}_i - \bar{\epsilon}. \quad (185)$$

Подставляя значение  $\bar{\epsilon}_i$  из уравнения (185) в уравнения (183) и (184), находим, что члены, содержащие величину средней деформации, исчезают и остается

$$\epsilon_{i-1} + a'_{i-1} \eta_{i-1}'' = \epsilon_i - a_i \eta_i''; \quad (186)$$

$$\sum_{i=1}^n A_i \epsilon_i = 0. \quad (187)$$

Получаем в результате  $n - 1$  уравнений (186) и одно уравнение (187); из этих  $n$  независимых, линейных уравнений можно определить  $n$  значения  $\varepsilon_i$  и выразить их через кривизны  $\eta_i''$ .

Подставляя  $\bar{\varepsilon}_i$  из уравнения (185) в уравнение (182), получим:

$$V_1 = \frac{E}{2} \int \left[ \sum_{i=1}^n (J_i \eta_i''^2 + A_i \varepsilon_i^2) + A \varepsilon^2 \right] dz, \quad (188)$$

где вследствие уравнения (187) члены, содержащие произведения  $\varepsilon_i$  на  $\varepsilon$ , равны нулю.

Уравнения (186) и (187) определяют значение  $\varepsilon_i$  в функции от  $\eta_i''$ . В результате дифференцирования из уравнений (180) получаем:

$$\eta_i'' = -\bar{u}'' \sin \varphi + \bar{v}'' \cos \varphi + r_i \beta''; \quad (189)$$

отсюда, следовательно, все кривизны  $\eta_i''$  и деформации  $\varepsilon_i$  выражаются в виде функций от  $\bar{u}''$ ,  $\bar{v}''$  и  $\beta''$ . Если подставить значения  $\eta_i''$  и  $\varepsilon_i$  в уравнение (188), подинтегральное выражение будет квадратичным относительно трех переменных  $\bar{u}''$ ,  $\bar{v}''$  и  $\beta''$ . Наиболее общий вид такой квадратичной формы будет

$$V_1 = \frac{E}{2} \int (\alpha_1 \bar{u}''^2 + \alpha_2 \bar{v}''^2 + \alpha_3 \beta''^2 + \alpha_4 \bar{u}'' \bar{v}'' + \alpha_5 \bar{u}'' \beta'' + \alpha_6 \bar{v}'' \beta'' + A \varepsilon^2) dz, \quad (190)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$  зависят только от геометрических свойств поперечных сечений. Можно показать, что  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $\alpha_4$  равны осевым и центробежному моменту инерции полного поперечного сечения:

$$\alpha_1 = J_y, \quad \alpha_2 = J_x, \quad \alpha_4 = J_{xy} = 0, \quad (191)$$

где  $J_x$  и  $J_y$  соответственно вычислены относительно осей  $x$  и  $y$ ;  $J_{xy}$  равен нулю, так как оси  $x$  и  $y$  являются главными. В обычной теории изгиба стержней не встречаются коэффициенты  $\alpha_3, \alpha_5$  и  $\alpha_6$ . Используя обозначения

$$\alpha_5 = 2R_y, \quad \alpha_6 = 2R_x, \quad \alpha_3 = R_\beta, \quad (192)$$

можно выразить уравнение (190) в следующем виде:

$$V_1 = \frac{1}{2} \int (E J_y \bar{u}''^2 + E J_x \bar{v}''^2 + 2 E R_y \bar{u}'' \beta'' + 2 E R_x \bar{v}'' \beta'' + E R_\beta \beta''^2 + E A \varepsilon^2) dz. \quad (193)$$

Коэффициенты  $R_x, R_y$  и  $R_\beta$  можно определить из уравнений (186) — (189). В случае, когда поперечное сечение симметрично относительно

оси  $x$  или  $y$ ,  $R_y$  или  $R_x$  соответственно равны нулю. При двойной симметрии  $R_x$  и  $R_y$ , но не  $R_\beta$  равны нулю.

Определим теперь значение энергии деформации  $V_2$  от действия касательных напряжений. Эти напряжения могут возникать по двум причинам: во-первых, в результате того, что внешние поперечные силы должны быть уравновешены касательными напряжениями в каждом поперечном сечении, и, во-вторых, в-результате закручивания стержня  $\frac{d\beta}{dz}$ . Для стержней, длина которых велика по сравнению с размерами поперечного сечения, величина энергии деформаций касательных напряжений, обусловленных внешней поперечной нагрузкой, мала, и, как это установлено теорией выпучивания, не сопровождающегося кручением, она не имеет какого-нибудь практического значения<sup>1)</sup>. Следовательно, мы вправе пренебречь этой частью энергии деформаций.

Предполагается, что касательные напряжения, обусловленные кручением, такие же, как и рассчитанные по теории кручения Сен-Венана<sup>2)</sup>. Равнодействующая этих касательных сил даст крутящий момент  $T$ , а из соотношения

$$T = GK \frac{d\beta}{dz} = GK\beta'^2 \quad (194)$$

определяется постоянная кручения  $K$ . Здесь  $G$  — модуль сдвига. Энергия деформаций этих касательных напряжений для элемента стержня длиной  $dz$  равна работе, произведенной крутящим моментом  $T$ . Следовательно, энергия деформации  $V_2$  для всего стержня будет

$$V_2 = \frac{1}{2} \int T \frac{d\beta}{dz} dz = \frac{1}{2} \int GK\beta'^2 dz. \quad (195)$$

Для узкого прямоугольника с высотой  $d$  и толщиной  $t$  значение постоянной кручения равно  $K = \frac{1}{3} dt^3$ . Для открытых поперечных сечений, составленных из узких прямоугольников,  $K$  приблизительно равно сумме значений  $K$  составляющих частей. В статьях Лайса и Джонстона<sup>3)</sup> можно найти более точные значения  $K$ , позволяющие учитывать наклон отдельных элементов и закругленные переходы прокатных балок. В некоторых учебниках<sup>4)</sup> имеются численные значения  $K$  для прокатной балки. Суммируя уравнения (193) и (195),

<sup>1)</sup> Глава I, § 8.

<sup>2)</sup> Timoshenko S., Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1934, стр. 229, русский перевод: Тимошенко С., Теория упругости, М. — Л., Гостехиздат, 1934, стр. 256.

<sup>3)</sup> Lysé I., Johnston B. O., Structural Beams in Torsion, Trans. ASCE, 1936, стр. 857—944.

<sup>4)</sup> «Torsional Stresses in Structural Beams», Booklet S-57, Bethlehem Steel Co., 1950.

получим выражение для полной энергии деформации деформированного стержня

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} \int (EJ_y \bar{u}''^2 + EJ_x \bar{v}''^2 + 2ER_y \bar{u}'' \beta'' + 2ER_x \bar{v}'' \beta'' + ER_\beta \beta''^2 + GK \beta'^2 + AE \varepsilon^2) dz. \quad (196)$$

Вернемся теперь к определению потенциальной энергии внешних нагрузок. В целях исследования поведения стержня при изгибе и кручении рассмотрим стержень под действием распределенной поперечной нагрузки  $w$ , которая в общем случае не проходит через центр тяжести поперечного сечения (рис. 43). Нагрузка, действующая на элемент стержня длиной  $dz$ , будет  $w dz$ ; эту нагрузку можно заменить ее соответствующими  $w_x dz$ ,  $w_y dz$ , действующими в центре тяжести, и крутящим моментом  $\bar{m}_t dz = \bar{e} w dz$ . Перемещение поперечного сечения определяется компонентами  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  прогиба осевой линии и углом закручивания  $\beta$ . Для элемента стержня длиной  $dz$  потенциальная энергия сил  $w$ , которая в недеформированном положении стержня предполагается равной нулю, будет

$$dU_w = -(\bar{x} w_x + \bar{y} w_y + \beta \bar{m}_t) dz. \quad (197)$$

Если стержень оперт таким образом, что внешние силы реакции не производят никакой работы, то эти силы не дают составляющих в выражении потенциальной энергии и полную потенциальную энергию нагрузок можно получить, интегрируя уравнение (197) вдоль всей длины стержня:

$$U_w = - \int (\bar{x} w_x + \bar{y} w_y + \beta \bar{m}_t) dz. \quad (198)$$

Уравнение (196) выражает потенциальную энергию деформированного стержня в функции от  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$ , в то время как уравнение (198) содержит значения  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ . Можно легко выразить  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  в функции от  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$ . Из рис. 41 имеем:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \bar{u} \cos \beta - \bar{v} \sin \beta; \\ \bar{y} &= \bar{u} \sin \beta + \bar{v} \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (199)$$

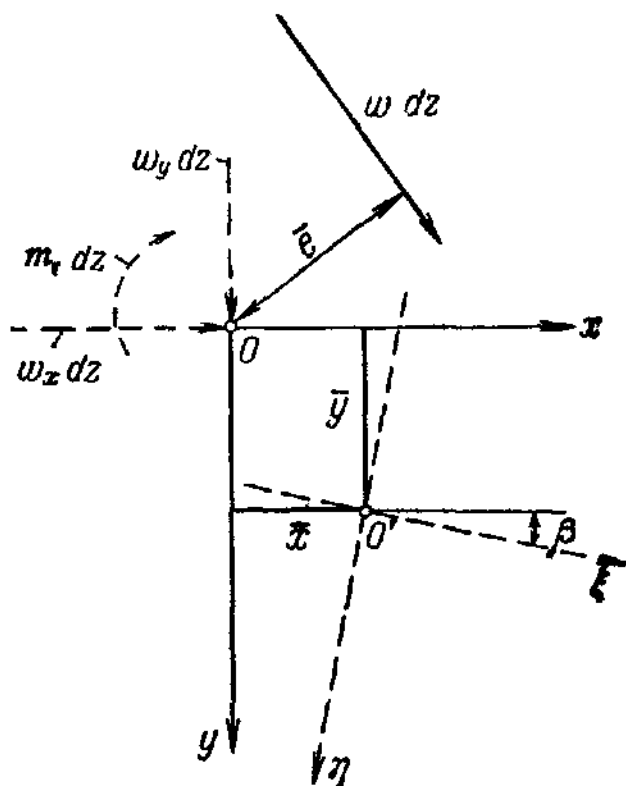


Рис. 43.

Вследствие того что рассматриваются только малые перемещения  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  и  $\beta$ , можно считать  $\cos \beta = 1$  и  $\sin \beta = \beta$ ; можно также пренебречь произведениями  $\bar{u}\beta$  и  $\bar{v}\beta$  как малыми величинами второго порядка <sup>1)</sup> и записать:

$$\bar{x} = \bar{u}; \quad \bar{y} = \bar{v}; \quad (200)$$

$$U_w = - \int (\bar{u}w_x + \bar{v}w_y + \beta \bar{m}_t) dz. \quad (201)$$

Выражение для полной потенциальной энергии будет

$$U = V + U_w = \frac{1}{2} \int (EJ_y \bar{u}''^2 + EJ_x \bar{v}''^2 + 2ER_y \bar{u}''\beta'' + 2ER_x \bar{v}''\beta'' + \\ + ER_\beta \beta''^2 + GK\beta'^2 + EA\varepsilon^2 - 2\bar{u}w_x - 2\bar{v}w_y - 2p\bar{m}_t) dz. \quad (202)$$

### 36. Дифференциальные уравнения изгиба и кручения

Согласно теореме о стационарном значении потенциальной энергии величины деформации  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\beta$  и  $\varepsilon$  должны быть такими, чтобы интеграл в уравнении (202) принимал минимальное значение. Такую задачу можно решить с помощью вариационного исчисления;  $U$  принимает стационарное значение, если удовлетворены уравнения Эйлера <sup>2)</sup>. Имеются четыре неизвестных  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\beta$  и  $\varepsilon$  и четыре уравнения Эйлера:

$$EJ_y \bar{u}^{IV} + ER_y \beta^{IV} = w_x; \quad (203a)$$

$$EJ_x \bar{v}^{IV} + ER_x \beta^{IV} = w_y; \quad (203b)$$

$$ER_y \bar{u}^{IV} + ER_x \bar{v}^{IV} + ER_\beta \beta^{IV} - GK\beta'' = \bar{m}_t; \quad (203c)$$

$$EA\varepsilon = 0. \quad (203d)$$

Согласно обычной теории изгиба имеем следующие уравнения:

$$EJ_y \bar{u}'' = -M_y; \quad EJ_x \bar{v}'' = -M_x;$$

дифференцируя дважды, получим:

$$EJ_y \bar{u}^{IV} = w_x; \quad EJ_x \bar{v}^{IV} = w_y. \quad (204a)$$

Эти уравнения отличаются от уравнений (203a) и (203b), которые содержат добавочные члены, зависящие от  $R_x$  и  $R_y$ .

<sup>1)</sup> В задачах устойчивости этими членами нельзя пренебрегать, так как в этих задачах выражение потенциальной энергии внешних сил не содержит членов первого порядка, по крайней мере, по нескольким переменным.

<sup>2)</sup> Глава II, § 31.



Исследуя кручение двутавровых балок, Тимошенко получил следующее уравнение <sup>1)</sup>:

$$C\beta' - \frac{Dh^2}{2}\beta = M_z,$$

где  $M_z$  — действующий крутящий момент, а  $C$  идентичен  $GK$  в уравнении (203с). Дифференцируя это уравнение и принимая во внимание, что  $\frac{dM_z}{dz} = -\bar{m}_t$ , получим:

$$\frac{Dh^2}{2}\beta^{IV} - GK\beta'' = \bar{m}_t. \quad (204b)$$

Если отождествлять  $ER_\beta$  с членом  $Dh^2/2$ , то уравнение (203с) совпадает с (204b), за исключением опять членов, содержащих  $R_x$  и  $R_y$ .

Уравнение (203d) нет необходимости обсуждать; оно просто отражает тот достаточно очевидный факт, что средняя продольная деформация равна нулю, что очевидно, так как продольная сила отсутствует.

Выбором соответствующих координатных осей можно упростить уравнения (203a), (203b) и (203с). Рассмотрим точку  $S$  в каждом поперечном сечении с координатами  $x_0, y_0$ ; в результате изгиба балки эта точка будет двигаться к точке  $S'$  (рис. 44). Координаты  $u$  и  $v$  определим как компоненты перемещения точки  $S$ , параллельные подвижным координатным осям  $\xi$  и  $\eta$ . При малых значениях  $\beta$ ,  $\cos\beta = 1$  и  $\sin\beta = \beta$  из рис. 44 получим следующие соотношения:

$$\bar{u} = u + y_0\beta; \quad \bar{v} = v - x_0\beta. \quad (205)$$

Можно использовать любые значения  $x_0$  и  $y_0$ . Если положить

$$y_0 = -\frac{R_y}{J_y}; \quad x_0 = \frac{R_x}{J_x}, \quad (206)$$

то уравнение (205) примет вид

$$\bar{u} = u - \frac{R_y}{J_y}\beta; \quad \bar{v} = v - \frac{R_x}{J_x}\beta. \quad (207)$$

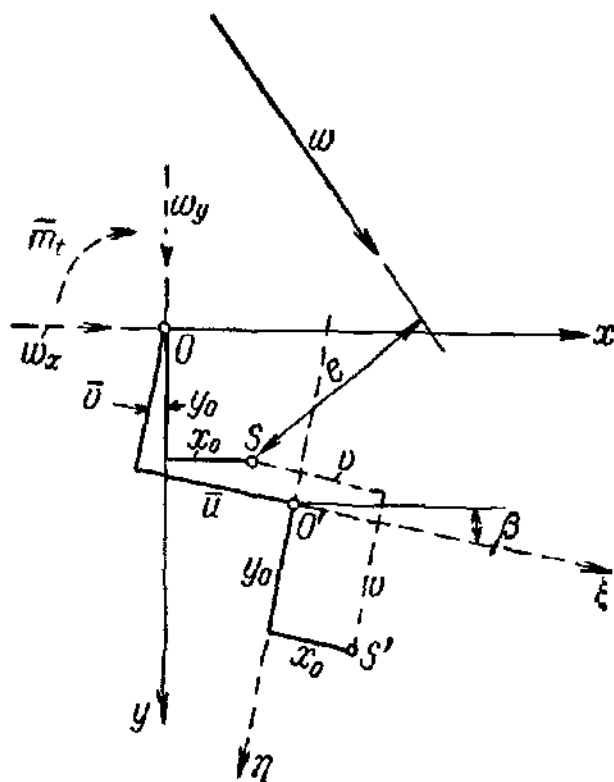


Рис. 44.

<sup>1)</sup> Timoschenko S., Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1936, стр. 257; русский перевод: Тимошенко С., Устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, 1935, стр. 267.

Подставляя эти уравнения в уравнения (203a), (203b) и (203c), получим:

$$EJ_y u^{IV} = w_x; \quad (208a)$$

$$EJ_x v^{IV} = w_y; \quad (208b)$$

$$ER_y u^{IV} + ER_x v^{IV} + E \left( R_\beta - \frac{R_y^2}{J_y} - \frac{R_x^2}{J_x} \right) \beta^{IV} - GK\beta'' = \bar{m}_t. \quad (208c)$$

Первые два уравнения можно использовать для того, чтобы исключить  $u^{IV}$  и  $v^{IV}$  из третьего уравнения; используя также уравнение (206), найдем:

$$E \left( R_\beta - \frac{R_y^2}{J_y} - \frac{R_x^2}{J_x} \right) \beta^{IV} - GK\beta'' = \bar{m}_t + y_0 w_x - x_0 w_y. \quad (209)$$

На рис. 44 показаны компоненты внешних сил  $w_x$ ,  $w_y$  и  $\bar{m}_t$ . Если заменить их силами, действующими в точке  $S$ , значения  $w_x$  и  $w_y$  останутся неизменными, но крутящий момент составит  $m_t = e w$ . На основании рис. 44 легко убедиться, что

$$m_t = \bar{m}_t + y_0 w_x - x_0 w_y, \quad (210)$$

которое идентично выражению правой части уравнения (209). Кроме того, если определить постоянную  $\Gamma$  с помощью выражения

$$\Gamma = R_\beta - \frac{R_y^2}{J_y} - \frac{R_x^2}{J_x}, \quad (211)$$

получим уравнения (208a), (208b) и (209) в простом виде

$$EJ_y u^{IV} = w_x; \quad (212a)$$

$$EJ_x v^{IV} = w_y; \quad (212b)$$

$$E\Gamma\beta^{IV} - GK\beta'' = m_t. \quad (212c)$$

Эти уравнения идентичны по форме с уравнениями (204a) и (204b) обычной теории изгиба и кручения, но координаты  $u$ ,  $v$ ,  $\beta$  необходимо отсчитывать от начала  $S$ , а крутящий момент  $m_t$  определять относительно той же точки. На основании уравнения (212c) можно заключить, что в случае, если стержень не закручен ( $\beta = 0$ ),  $m_t$  должно равняться нулю; это означает, что равнодействующая внешних сил  $w$  должна проходить через точку  $S$ . Это обстоятельство служит основой для определения центра сдвига поперечного сечения, а точка  $S$  должна являться центром сдвига. В случае, когда стержень закручивается, но не изгибается,  $u = v = 0$  и из уравнений (212a) и (212b) получим  $w_x = w_y = 0$ ; это показывает, что центр сдвига  $S$  в случае чистого кручения представляет собой центр кручения поперечного сечения.

Дифференциальные уравнения изгиба значительно упростятся, если использовать перемещения  $u$  и  $v$  центра сдвига. Выражение (196) для потенциальной энергии деформированного стержня также упрощается, если в качестве координат использовать перемещения  $u$  и  $v$ .

Подставляя значения  $u$  и  $v$  из уравнений (207) и используя уравнение (211), получим выражение для  $V$  в его окончательной форме:

$$V = \frac{1}{2} \int (EJ_y u''^2 + EJ_x v''^2 + EI \beta''^2 + GK \beta'^2 + BA \epsilon^2) dz. \quad (213)$$

В предшествующем изложении подразумевалось, что центр сдвига  $S$  определяется единственным образом при условии, если стержень не закручивается, когда равнодействующая внешних сил проходит через точку  $S$ . Осгуд<sup>1)</sup> показал, что граничные условия на торцах стержня влияют на положение центра сдвига. Допущение, что геометрическая форма поперечных сечений стержня не меняется, распространяется также на концевые сечения, и определение центра сдвига обусловлено единственно этим граничным условием. Из этого допущения следует, что коэффициент Пуассона равен нулю. Совершенно очевидно, что без предположения о недеформируемости поперечных сечений стержня возникнут затруднения при определении центра сдвига. Если поперечные сечения искривляются, то каждая часть поперечного сечения будет иметь свой собственный центр кручения, и возможность определения центра сдвига как общего центра кручения всего поперечного сечения исчезает; однако его можно рассчитать другим способом — так, как это предложено Осгудом.

### 37. Сравнение с теорией Гудьера

Основываясь на гипотезе Вагнера, Каппус и Гудьер получили выражения для энергии деформации. В связи с тем, что результаты их исследований эквивалентны, достаточно сравнить уравнение (213) с выражением, полученным в одной из этих работ. Удобно выбрать работу Гудьера.

Выражение (213) совпадает с выражением Гудьера<sup>2)</sup>, выведенным для энергии деформации, при условии, если значение  $\Gamma$  для них одинаково, что и требуется доказать. Уравнение (29), имеющееся в его статье, содержит добавочный член  $u''v''$  вследствие того, что выбранные им координаты не параллельны главным осям. Последний член вышенаписанного уравнения (213), который выражает работу, произведенную сжимающими напряжениями, действующими

<sup>1)</sup> Osgood W. R., The Center of Shear Again, Trans. ASME, 1943, стр. А — 62.

<sup>2)</sup> Гудьер, цит. выше, стр. 123.

на стержень, отсутствует в работе Гудьера, так как он вычисляет потенциальную энергию от сжатого состояния стержня. Однако здесь не наблюдается расхождения; необходимым условием является только то, что потенциальную энергию внешних нагрузок нужно рассчитывать одним и тем же образом.

Вместо того чтобы численно доказывать равенство значений  $\Gamma$  в уравнении (213) и в выражении, использованном Гудьером, покажем, что теория, из которой вытекает уравнение (213), эквивалентна теории Гудьера при наличии незначительной разницы, которая легко обнаруживается. В связи с тем, что сомнение вызывает только член, содержащий  $\Gamma$ , можно упростить изложение, рассматривая стержень, закрученный относительно оси, проходящей через центр сдвига поперечного сечения. В этом случае  $u$  и  $v$  равны нулю, а член

$$\frac{1}{2} E \Gamma \beta'^2 dz \quad (214)$$

представляет собой энергию деформации продольных напряжений элемента стержня. При выводе этого выражения были использованы два допущения: первое, состоящее в том, что форма поперечного сечения сохраняется, учитывается также Гудьером; второе, согласно которому гипотеза Навье применима для каждой плоской пластинки, составляющей стержень, не используется Гудьером; он в своей теории основывается на гипотезе, впервые введенной Вагнером<sup>1)</sup>. Необходимо показать, что эти два допущения эквивалентны.

Рассмотрим равномерно закрученный стержень с относительным углом закручивания  $\frac{d\beta}{dz} = \theta$ , у которого центр кручения и центр сдвига совпадают. В случае, когда деформация поперечных сечений не стеснена, крутящий момент должен быть постоянным, а закручивание стержня представляет собой чистое кручение, называемое также кручением Сен-Венана. В поперечных сечениях, которые деформируются, действуют только касательные напряжения, продольные напряжения в них равны нулю. Обозначим перемещение, обусловленное искажением<sup>2)</sup> и параллельное оси  $z$ , через  $w$ .

На рис. 45, а даны поперечное сечение стержня и его средняя линия. Через точку  $A$  средней линии проходит система координат  $s$  и  $n$  соответственно в направлениях касательной и нормали средней линии. На рисунке показана также деформированная средняя линия сечения, находящегося на расстоянии  $dz$  от первого сечения. Смещенную среднюю линию можно найти, вращая сечение вокруг точки  $S$  под углом  $\theta dz$ .

Рассмотрим теперь продольные волокна стержня, проходящие через две смежные точки  $A$  и  $B$  на расстоянии  $ds$  одна от другой.

<sup>1)</sup> Вагнер, цит. выше, стр. 122.

<sup>2)</sup> В дальнейшем равным образом будут использованы термины деформация и искажение. (Прим. ред.)

В результате деформации эти волокна будут перемещаться в положения  $AA'$  и  $BB'$ . Если проектировать эти волокна на продольную плоскость, проходящую через ось  $s$ , то получим рис. 45, *b*. Относительное перемещение  $A'$  в направлении  $z$  равно  $\theta r_s dz$ , где  $r_s$  обозначает расстояние точек  $S$  от оси  $s$ .

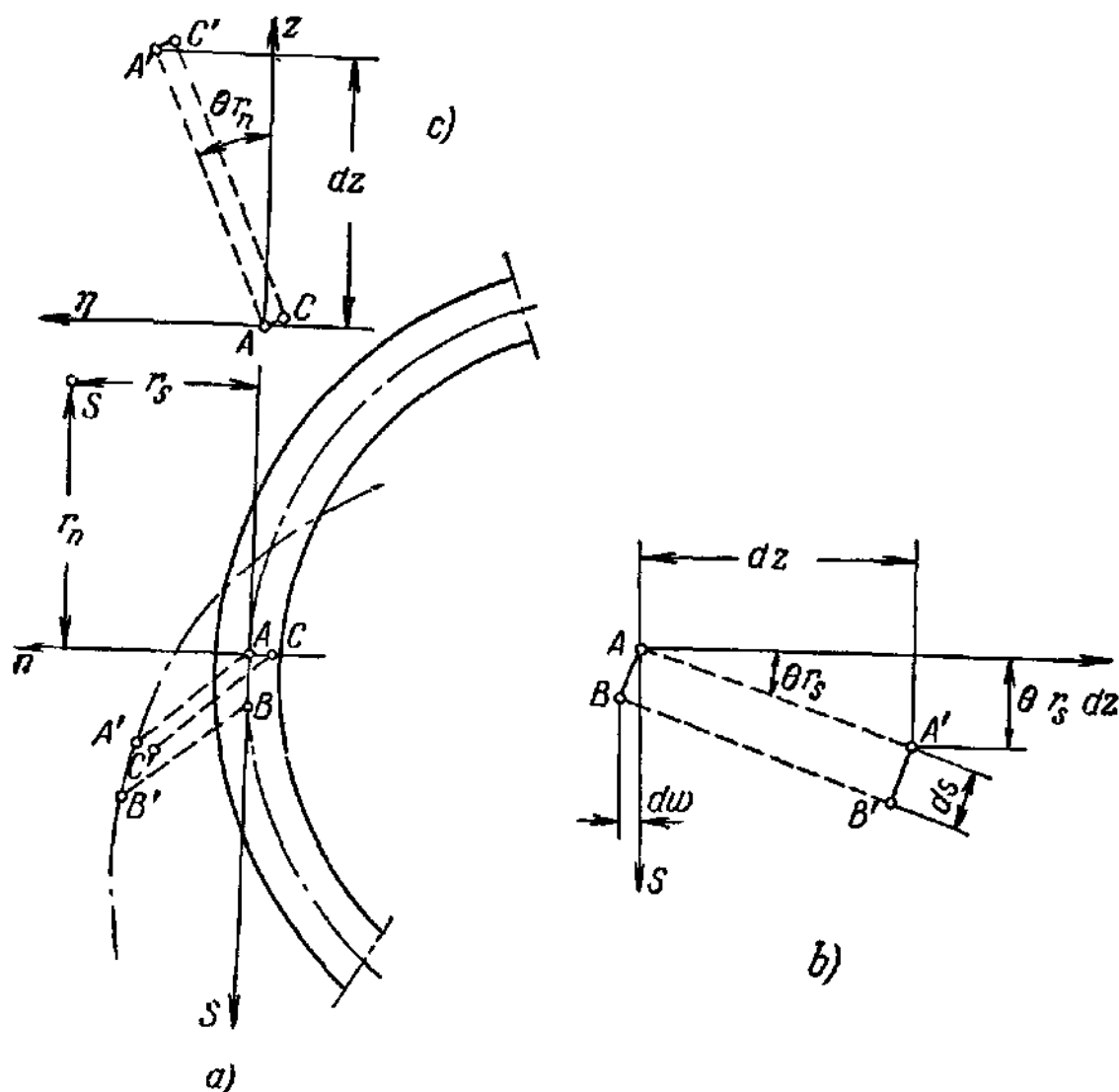


Рис. 45.

Из теории кручения тонкостенных стержней Сен-Венана известно, что направленная по касательной к средней линии составляющая напряжений сдвига должна равняться нулю. Следовательно, точки  $A$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $B$ , образующие прямоугольник до кручения стержня, должны по-прежнему образовывать прямоугольник, как это показано на рис. 45, *b*. Относительное перемещение точки  $B$  по отношению к  $A$  вдоль направления  $z$ , указывающее на изменение депланации, будет  $d\omega = \theta r_s ds$ . Интегрируя вдоль средней линии, получим значение  $\omega$  для любой точки, расположенной на средней линии:

$$\omega = \omega_0 + \theta \int_0^s r_s ds.$$

Аналогичное рассуждение применено для двух смежных волокон, прсходящих через смежные точки  $C$  и  $A$ , лежащие на нормали  $n$  (рис. 45, с). Составляющая касательных напряжений в направлении  $n$  не равна нулю, однако она должна быть очень малой, так как обращается в нуль на обеих поверхностях стержня. Прямоугольник  $CC'A'A$  останется прямоугольником, по крайней мере, в первом приближении; отсюда  $d\omega = \theta r_n dn$ . В результате значение  $\omega$  в любой точке поперечного сечения будет

$$\omega = \omega_0 + \theta \left( \int_0^s r_s ds + \int_0^n r_n dn \right) = \omega_0 + \theta \left( \int_0^s r_s ds + nr_n \right). \quad (215)$$

Выражение, заключенное в скобках, отражает геометрическое свойство сечения, которое обозначим через  $\omega_1$ <sup>1)</sup>:

$$\omega_1 = \int_0^s r_s ds + nr_n; \quad (216)$$

$$\omega = \omega_0 + \theta \omega_1. \quad (217)$$

До сих пор мы считали величину  $\theta$  постоянной, из чего вытекает, что смежные сечения имеют одну и ту же депланацию. Далее Гудьер вводит предположение, высказанное ранее Вагнером, согласно которому уравнения (217) остаются в силе даже тогда, когда  $\theta$  меняется; это означает, что изменение депланации в двух смежных сечениях, расположенных на расстоянии  $dz$  друг от друга, равно

$$d\omega = d\omega_0 + d(\theta \omega_1).$$

Изменение депланации показывает, что элемент продольного волокна длиной  $dz$  будет удлиняться на  $d\omega$ , что вызывает продольное напряжение в волокне

$$\sigma_z = E \frac{d\omega}{dz} = E \left[ \frac{d\omega_0}{dz} + \frac{d(\theta \omega_1)}{dz} \right].$$

Так как  $\omega$  не зависит от  $z$  и  $\frac{d\theta}{dz} = \beta''$ , можно написать:

$$\sigma_z = E \left( \frac{d\omega_0}{dz} + \omega_1 \beta'' \right). \quad (218)$$

Затем Гудьер использует условия равновесия. В связи с тем, что исследуется чистое кручение, равнодействующая напряжений  $\sigma_z$  должна быть равной нулю и моменты этих напряжений относительно осей  $x$  и  $y$  должны равняться нулю. Первое из этих условий используется для определения  $\omega_0$ , которое является функцией от  $z$ :

<sup>1)</sup> Следует обратить внимание на то, что  $\omega_1$  не обладает той же размерностью, что и  $\omega$  и  $\omega_0$ .

$w_0 = -\bar{w}_1 \beta'$ , где  $\bar{w}_1$  — среднее значение функции деформации  $w_1$ . В результате имеем:

$$\sigma_z = E\beta''(w_1 - \bar{w}_1). \quad (219)$$

Далее показано, что моменты напряжений  $\sigma_z$  относительно осей  $x$  и  $y$  равны нулю при условии, если центр кручения  $S$  совпадает с центром сдвига. В результате, интегрируя по поперечному сечению, получим выражение для энергии деформации продольных напряжений  $\sigma_z$ :

$$dV = \frac{dz}{2E} \int \sigma_z dA = \frac{E dz}{2} \beta''^2 \int (w_1 - \bar{w}_1)^2 dA = \frac{1}{2} E \Gamma \beta''^2 dz, \quad (220)$$

где

$$\Gamma = \int (w_1 - \bar{w}_1)^2 dA. \quad (221)$$

Для определения  $\Gamma$  нужно подставить сюда выражение функции деформации  $w_1$  согласно уравнению (216). Деформация  $w_1$  представляет собой сумму двух членов, из которых второй обычно пренебрежим по сравнению с первым вследствие того, что максимальное значение  $n$  равно половине толщины сечения. Каппус<sup>1)</sup> полностью пренебрегает этим членом и приводит значение  $w_1$  в упрощенном виде:

$$w_1 = \int_0^s r_s ds. \quad (222)$$

Необходимо отметить, что вообще уравнение (222) является достаточно точным и может заменить уравнение (216), если речь не идет о поперечных сечениях в форме уголка или тавра. Для этих сечений центр сдвига находится на пересечении средних линий плоских элементов, составляющих сечение, откуда следует, что  $r_s = 0$  для всего поперечного сечения, в результате чего  $\Gamma = 0$ , в то время как уравнение (216) дает малое, но конечное значение для  $\Gamma$ . Тем не менее влияние второго члена в уравнении (216) незначительно, если только элементы не очень короткие.

Используя уравнения (222) и (217) в задаче о стержне, состоящем из плоских пластин (рис. 46), получим для точки  $A$ , лежащей на плоской пластинке  $BC$ :

$$w = w_0 + \theta w_1 = w_0 + \theta \int_0^s r_s ds.$$

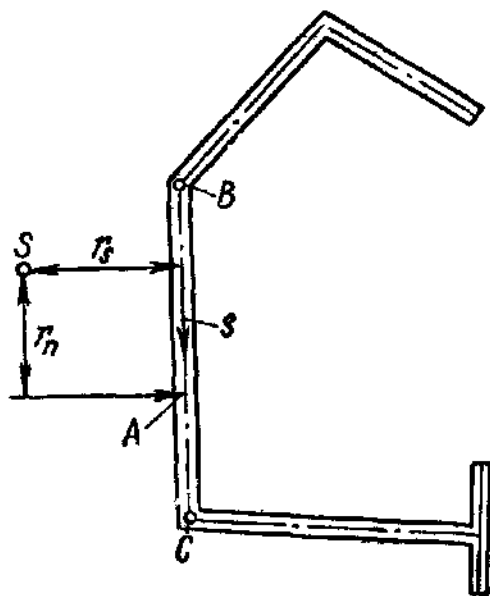


Рис. 46.

<sup>1)</sup> Каппус, цит. выше, стр. 123.

Относительная депланация  $w$  равна

$$\frac{dw}{ds} = \frac{d}{ds} \left( w_0 + \theta \int_0^s r_s ds \right) = \theta r_s. \quad (223)$$

Так как значение  $r_s$  между точками  $B$  и  $C$  постоянно,  $w$  является линейной функцией; геометрически это означает, что поперечное сечение плоской пластины  $BC$  при кручении остается плоским. Отсюда ясно, что гипотеза Вагнера в том виде, в каком она использована Каппусом и Гудьером, эквивалентна предположению, что гипотеза Навье применима к тонким плоским пластинкам, из которых составлено сечение, при условии, что депланация определяется уравнением (222). Если использовать более точное уравнение (216), найдем:

$$\frac{dw}{ds} = \theta (r_s + n). \quad (224)$$

Относительная депланация  $\frac{dw}{ds}$  больше не является постоянной величиной и зависит от  $n$ . Так как для тонких профилей  $n$  очень мало, то влияние этого члена незначительно при условии, если  $r_s$  также мало для всех частей сечения, как в случае уголка и тавра. Значение  $\Gamma$  в уравнении (213) должно совпадать со значением, найденным Гудьером, исключая уголок и тавр, для которых Гудьер получил более точные значения  $\Gamma$ .

### 38. Характеристики поперечных сечений

В этом параграфе приводятся значения  $\Gamma$  и координат  $x_0$  и  $y_0$  центра сдвига, определенные для некоторых типов поперечных сечений. Всюду, где это было возможно, результаты были значительно упрощены, выражая  $\Gamma$ ,  $x_0$  и  $y_0$  через значения площади и моментов инерции всего поперечного сечения.

Соответствующие значения поперечного сечения в форме уголка и тавра были получены по теории Гудьера при помощи уравнения (216), использованного для выражения депланации. Предполагалось, что положение центров сдвига для этих сечений находится на пересечении средних линий сторон. Это верно только приблизительно, однако расстояние центра сдвига от этой точки составляет всегда очень незначительную долю толщины стороны и им можно пренебречь. Для этих сечений значение  $\Gamma$  мало, поэтому для многих практических применений можно считать  $\Gamma = 0$ .

*Равнобокий уголок (рис. 47):*

$$x_0 = 0; \quad y_0 = e; \quad \Gamma = \frac{A^3}{144}, \quad (225)$$

где  $A$  обозначает площадь поперечного сечения уголка.



Неравнобокий уголок (рис. 48):

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= e_1; & y_0 &= e_2; \\ \Gamma &= \frac{t^3}{36} (b_1^3 + b_2^3). \end{aligned} \right\} \quad (226)$$

Т-образное сечение (рис. 49):

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= 0; & y_0 &= e; \\ \Gamma &= \frac{t_1^3 b^3}{144} + \frac{t_2^3 d^3}{36}. \end{aligned} \right\} \quad (227)$$

Сечение, показанное на рис. 50:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= 0; & y_0 &= \sqrt{2} \left( e + cb^2 \frac{A_F}{J_y} - b \frac{J_F}{J_y} \right); \\ \Gamma &= (2e^2 - y_0^2) J_y + 2b(b - 2e) J_F + 4eb^2 c A_F. \end{aligned} \right\} \quad (228)$$

где  $A_F$  есть площадь каждого фланца,  $J_F$  — его момент инерции

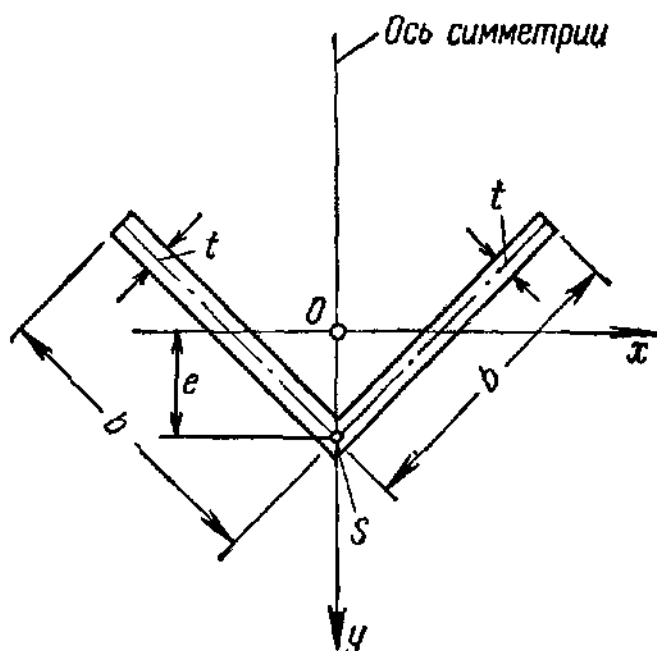


Рис. 47.

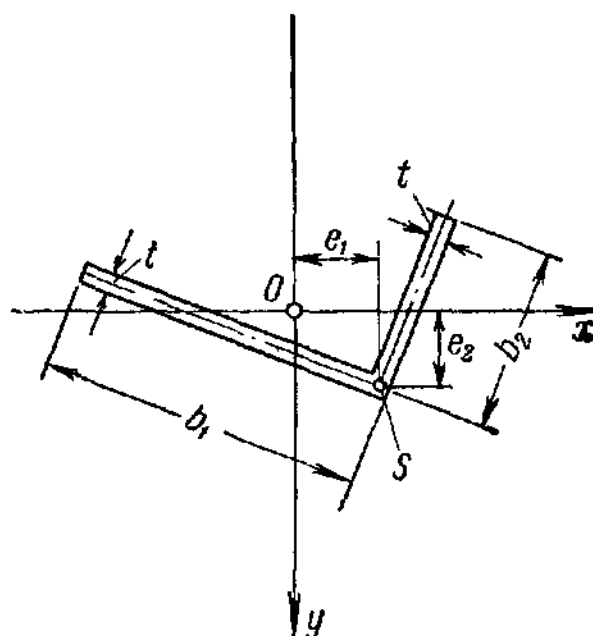


Рис. 48.

относительно средней линии смежной стороны уголка, а  $c$  — расстояние центра тяжести фланца от этой линии.

Швеллерное сечение (рис. 51, а и б):

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= 0; & y_0 &= -e \left( 1 + \frac{d^2 A}{4J_y} \right); \\ \Gamma &= \frac{d^3}{4} \left[ J_x + e^2 A \left( 1 - \frac{d^2 A}{4J_y} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (229)$$

где  $A$  обозначает площадь поперечного сечения, а  $J_x$ ,  $J_y$  — моменты инерции швеллера. Уравнения (229) были выведены для швеллеров

с сужающимися фланцами; эти уравнения применимы также для сечения более общего вида, показанного на рис. 51, *b*. В предельном

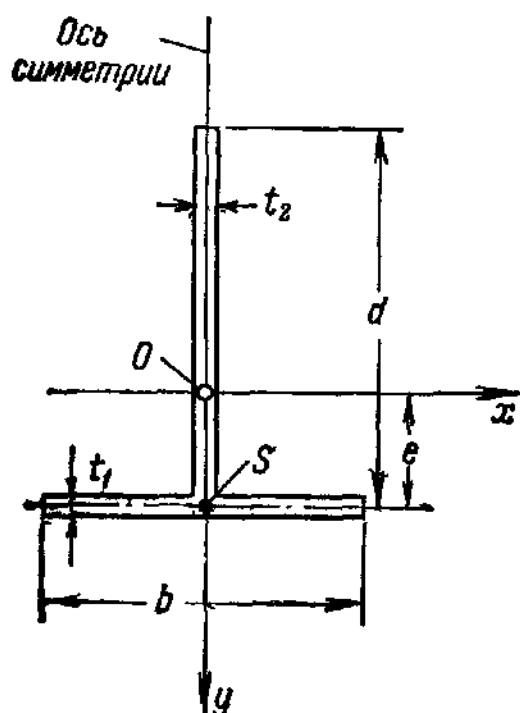


Рис. 49.

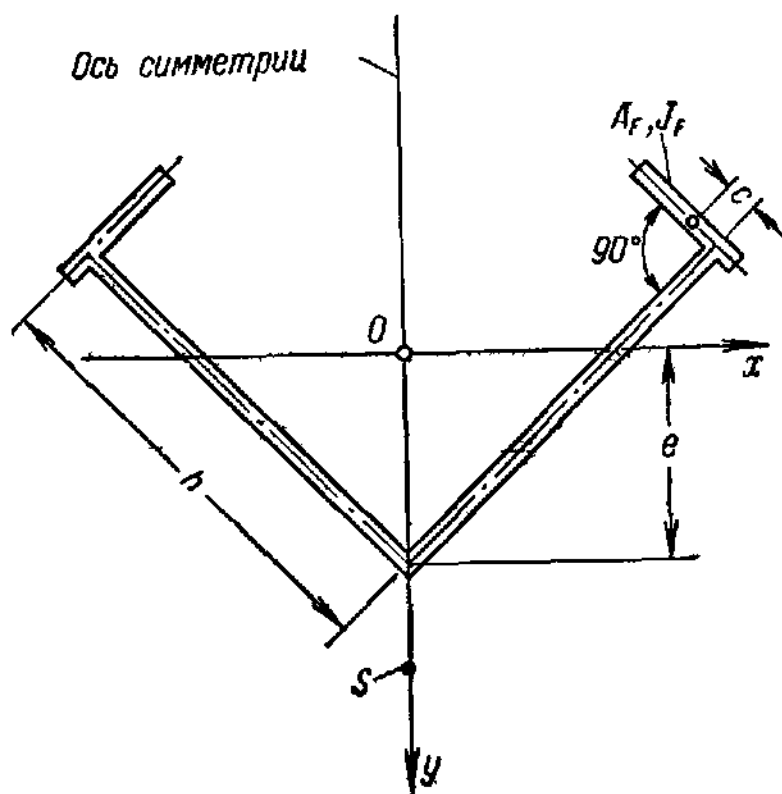


Рис. 50.

случае, когда ось  $x$  является осью симметрии, уравнения (229) совпадают с уравнениями (220) для симметричных двутавровых балок.

*Симметричная двутавровая балка (рис. 52):*

$$x_0 = y_0 = 0; \quad \Gamma = \frac{d^2 J_y}{4}, \quad (230)$$

где  $J_y$  — момент инерции балки относительно оси  $y$ .

*Двутавровая балка с разными полками (рис. 53):*

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= 0; \\ y_0 &= \frac{e_2 J_2 - e_1 J_1}{J_1 + J_2}; \\ \Gamma &= \frac{d^2 J_1 J_2}{J_1 + J_2}, \end{aligned} \right\} \quad (231)$$

где  $J_1$  и  $J_2$  соответственно являются моментами инерции верхней и нижней полки относительно оси  $y$ . Уравнения (231) применимы, когда толщина полок и стенки изменяются по линейному закону или каким-либо иным образом.

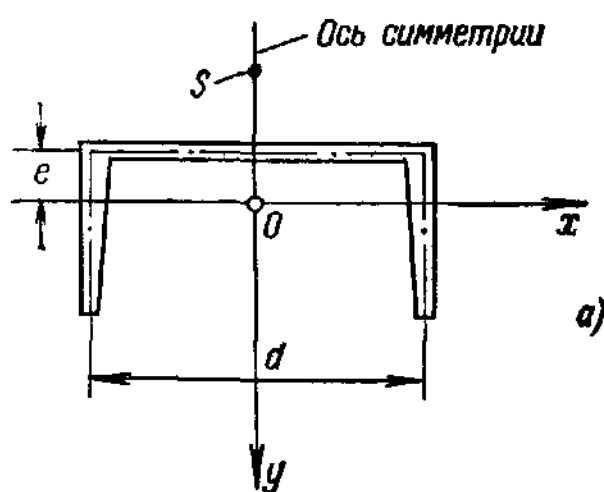


Рис. 51.

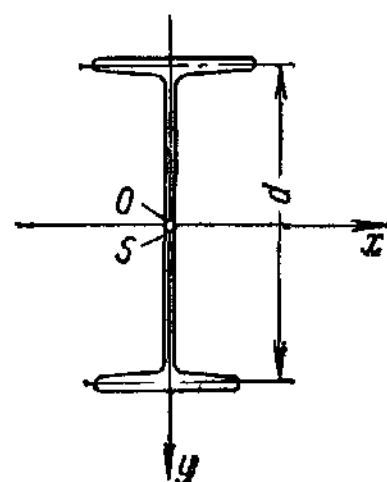
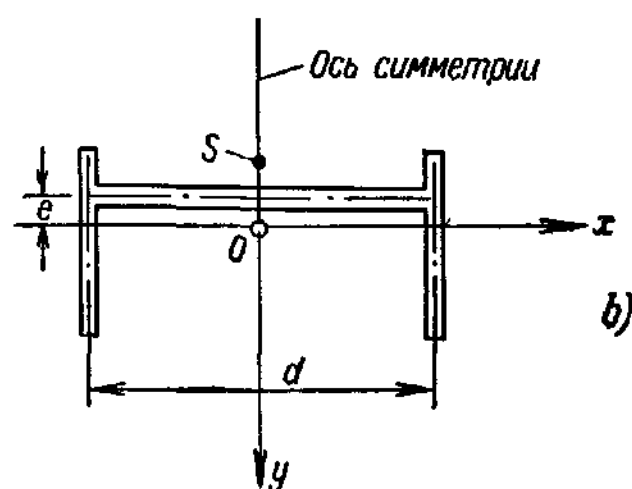


Рис. 52.

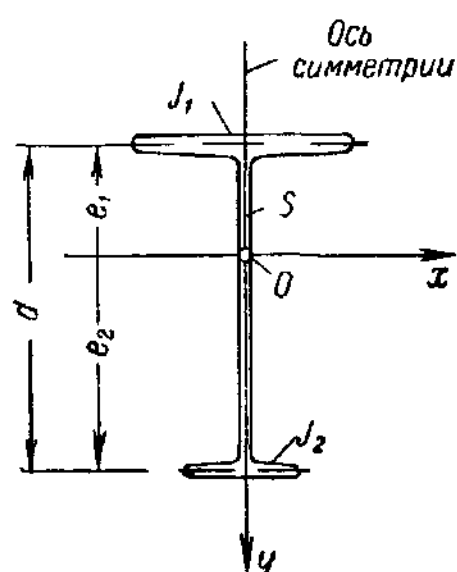


Рис. 53.

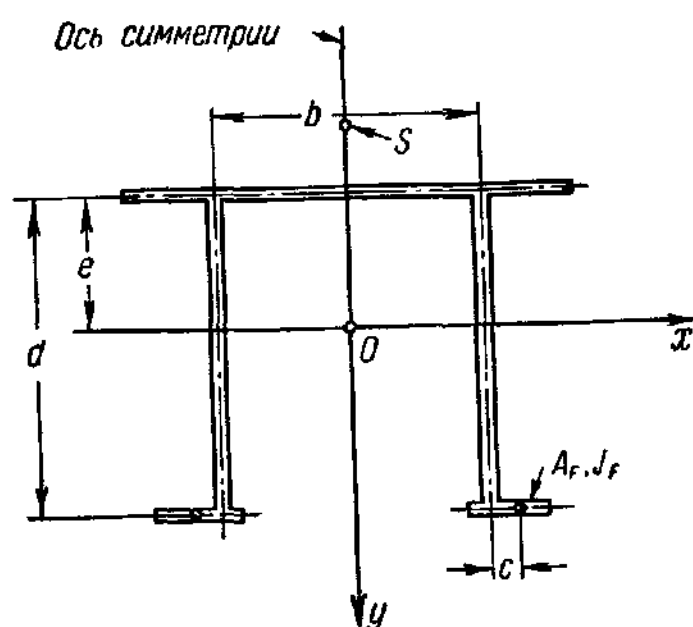


Рис. 54.

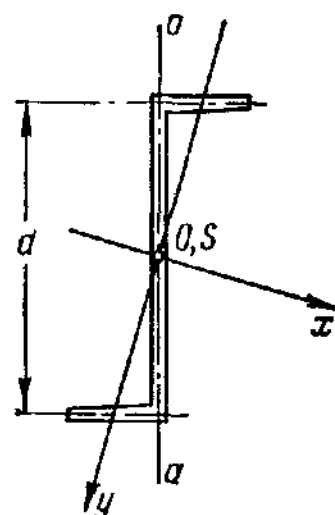


Рис. 55.

*Сечение, показанное на рис. 54.*

Уравнения (232) применяются независимо от того, постоянна или переменна толщина стенок или полок этого профиля:

$$\left. \begin{aligned} x_0 = 0; \quad y_0 = -e \left( 1 + \frac{b^2 A}{4J_y} \right) + 2d \frac{J_F}{J_y}; \\ \Gamma = \frac{b^2}{4} \left[ J_x + e^2 A \left( 1 - \frac{b^2 A}{4J_y} \right) \right] + 2d^2 J_F - 2bc d^2 A_F + \\ + b^2 de A \frac{J_F}{J_y} - 4d^2 \frac{J_F^2}{J_y}, \end{aligned} \right\} \quad (232)$$

где  $A$ ,  $J_x$ ,  $J_y$  являются соответственно площадью и моментами инерции всего сечения;  $A_F$  и  $J_F$  обозначают площадь и момент инерции нижней полки относительно оси стенки, с которой она связана, а  $c$  — расстояние центра тяжести полки до этой оси. Первые члены уравнений (232) совпадают с уравнениями (229) для швеллерных профилей.

*Z-образные сечения (рис. 55):*

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 0; \quad \Gamma = \frac{d^2}{4} J_{a-a}, \quad (233)$$

где  $J_{a-a}$  обозначает момент инерции поперечного сечения относительно средней линии  $a-a$  стенки.

### 39. Потенциальная энергия центрально сжатых стержней

Из теоремы о стационарном значении потенциальной энергии можно вывести дифференциальное уравнение выпучивания. Полная потенциальная энергия  $U$  рассматриваемой системы состоит из внутренней энергии деформации  $V$  и потенциальной энергии  $U_w$  внешних сил.

В предшествующем параграфе было установлено, что формула для энергии деформации  $V$  принимает наиболее простую форму, если она выражена через перемещения  $u$  и  $v$  центра сдвига. Следовательно,  $u$  и  $v$  используются в качестве координат. Выражение (213) для энергии деформации было получено в предположении об абсолютно упругом поведении материала, и для того чтобы охватить им упругую и неупругую области выпучивания, необходимо соответствующим образом видоизменить это выражение. Уравнение (213) имеет вид

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l (EJ_y u''^2 + EJ_x v''^2 + E\Gamma \beta''^2 + GK \beta'^2 + EA \epsilon^2) dz. \quad (213)$$

Рассуждаем следующим образом. Сжатый стержень остается практически прямым до тех пор, пока не достигнута критическая сила, и первые четыре члена уравнения (213), которые выражают энергию

деформации изгиба и кручения, следовательно, равны нулю. Согласно теории касательного модуля при изгибных и крутильных деформациях имеют значение мгновенные величины  $E_t$  и  $G_t$  и нужно только заменить  $E$  и  $G$  в первых четырех членах уравнения (213) на  $E_t$  и  $G_t$ <sup>1)</sup>. Это простое рассуждение неприменимо, однако, к последнему члену  $E\Delta\epsilon^2$ , который представляет собой энергию деформации сжатия. Однако можно избежать вычисления этого члена. Совершенно допустимо вычислить потенциальную энергию от нулевого значения для стержня, взятого в сжатом, прямолинейном состоянии. Такой способ не меняет окончательные результаты, если потенциальная энергия внешних сил определена таким же образом. Так как потенциальная энергия прямого стержня, когда сжимающая сила достигла критического значения, равна нулю, то потенциальная энергия в деформированном состоянии будет выражена четырьмя первыми членами уравнения (213):

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l (E_t J_y u''^2 + E_t J_x v''^2 + E_t \Gamma \beta''^2 + G_t K \beta'^2) dz. \quad (234)$$

В главе I касательный модуль  $E_t$  был выражен через модуль упругости  $E$  и отношение  $\tau$  [гл. I, уравнение (18)] в виде  $E_t = E\tau$ , где  $\tau$  зависело от напряжения. Не имеется никаких определенных данных относительно значения касательного модуля при сдвиге  $G_t$ , но существует возможность доказать, что предположения, сделанные в главе IX по теории местного выпучивания пластинчатых элементов и сжатых стержней, эквивалентны допущению  $G_t = G\sqrt{\tau}$ <sup>2)</sup>. Однако применение этого соотношения приводит к сложной методике расчета, и в результате того, что в большинстве случаев крутильного выпучивания касательные напряжения не играют большой роли, возможно заменить его соотношением  $G_t = G\tau$ . Таким образом, используется меньшее, чем в действительности, значение для  $G_t$ , которое приводит к более низким критическим напряжениям и вполне надежным результатам. С введением допущения  $G_t = G\tau$  можно относительно просто решать задачу о неупругом выпучивании. В конечном итоге выражение (234) для энергии деформации примет следующий вид:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l (E\tau J_y u''^2 + E\tau J_x v''^2 + E\tau \Gamma \beta''^2 + G\tau K \beta'^2) dz. \quad (235)$$

1)  $E_t$  и  $G_t$  определяются соотношениями  $E_t = \frac{d\sigma}{d\epsilon}$  и  $G_t = \frac{d\tau}{d\gamma}$  — тангенсами углов наклона касательных в диаграмме напряжения — деформации при сжатии и сдвиге.

2) См. изложение вопроса о крутильном выпучивании уголков в § 42.

Задача неупругого выпучивания была рассмотрена Лундкуистом<sup>1)</sup>, а позже Рамбергом и Леви<sup>2)</sup>. В обеих работах, основанных на теории двойного модуля, использованы эффективные модули  $\bar{E}$  и  $\bar{G}$ . Рамберг и Леви применяют соотношение  $G = (\bar{E}/E)G$ ; Лундкуист предполагает, что  $\bar{G} = (\tau + \sqrt{\tau} G/2)$ , что приводит к довольно сложным и неудобным методам расчета.

Кроме уравнения (235), выражающего энергию деформации деформированного сжатия стержня, необходимо определить значение потен-

циальной энергии  $U_w$  внешних сил. Как было показано в главе II, потенциальная энергия  $U_w$  равна взятой со знаком минус сумме произведений внешних сил на перемещения их точек приложения в направлении сил. Как и при выводе уравнений (234) и (235),  $U_w$  нужно вычислить из нулевого значения для полностью нагруженного, но неизогнутого сжатого стержня и, следовательно,  $U_w$  представляет собой изменение потенциальной энергии, обусловленное только поперечным изгибом и закручиванием сжатого стержня. На рис. 56 показан сжатый стержень под действием равномерно распределенных сжимающих напряжений  $\sigma = P/A$  на торцах.

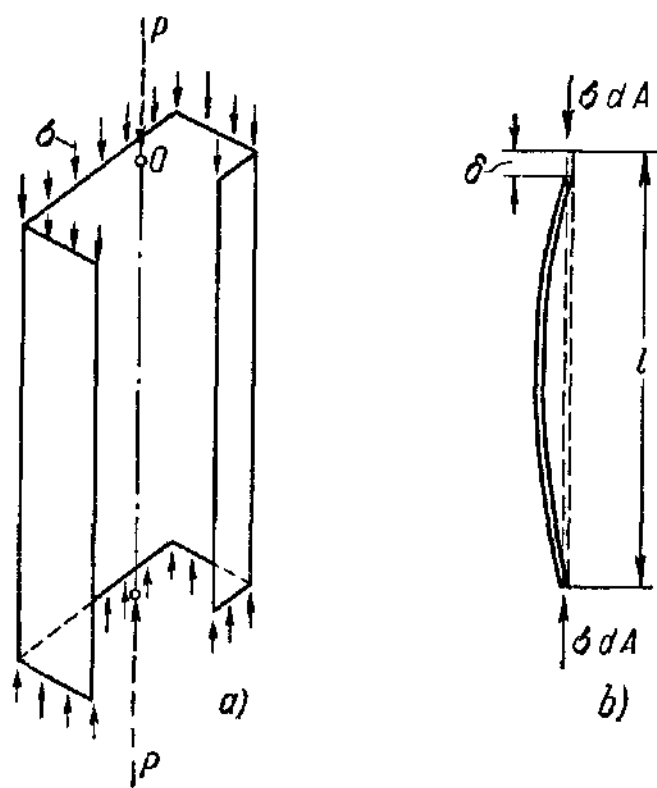


Рис. 56.

Так как равнодействующая этих напряжений  $\sigma$  проходит через центр тяжести поперечного сечения, имеем случай центрально сжатого стержня. В то время как происходит выпучивание элемента, напряжения на торцах могут изменяться на  $\sigma + d\sigma$ . Рассмотрим только малые деформации и, кроме того, предположим, что концевые условия таковы, что работой, произведенной напряжениями  $d\sigma$ , можно пренебречь по сравнению с работой, произведенной напряжениями  $\sigma$ .

На рис. 56 показано волокно сжатого стержня под действием нагрузки  $\sigma dA$  на каждом конце. Изменение значения потенциальной энергии составляет  $dU_w = -\sigma dA \delta$ . Относительное перемещение  $\delta$  верхнего и нижнего торцов стержня обусловлено двумя причинами: кривизной волокон и изменением продольных напряжений. Во время

<sup>1)</sup> Лундкунст, Флигг, цит. выше, стр. 123.

<sup>2)</sup> Ramberg W., Levy S., Instability of Extrusions under Compressive Loads, Journ. Aeronaut. Sci., 1945, стр. 485.

выпучивания продольные напряжения изменятся на величину  $\Delta\sigma_z$ , что вызывает изменение деформации на  $\Delta\sigma_z/E_t$  в элементах волокна. В результате изменения длины волокна, обусловленного кривизной и обозначенного через  $\delta_c$ , имеем:

$$dU_w = -\sigma dA \left( \delta_c + \frac{1}{E_t} \int_0^l \Delta\sigma_z dz \right). \quad (236)$$

Для всего сжатого стержня, интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} U_w &= -\sigma \int_A \delta_c dA - \frac{\sigma}{E_t} \int_A \int_0^l \Delta\sigma_z dz dA = \\ &= -\sigma \int_A \delta_c dA - \frac{\sigma}{E_t} \int_0^l \left( \int_A \Delta\sigma_z dA \right) dz. \end{aligned} \quad (237)$$

Буква  $A$  у знаков интеграла обозначает интегрирование по всей площади поперечного сечения сжатого стержня. Интеграл, находящийся в скобках, в уравнении (237) представляет собой составляющую в направлении  $z$  равнодействующей добавочных напряжений  $\Delta\sigma_z$  во время выпучивания. Напряжения  $\Delta\sigma_z$  образуют момент относительно осей  $x$  и  $y$ , но вследствие того, что внешняя нагрузка не изменяется, их равнодействующая в направлении  $z$  равна нулю. Следовательно, имеем:

$$U_w = -\sigma \int_A \delta_c dA. \quad (238)$$

Для того чтобы определить относительное перемещение  $\delta_c$ , обусловленное кривизной волокон, рассмотрим рис. 57, а. Приведенная система координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  аналогична системе, определенной в начале § 35. Рассмотрим волокно с координатами  $x$  и  $y$  перед деформацией. Вследствие деформации координаты будут  $x + \Delta x$  и  $y + \Delta y$ , где  $\Delta x$  и  $\Delta y$  являются функциями  $z$ . Рассмотрим теперь поперечное сечение на расстоянии  $z$  от начала координат. На рис. 57, б показаны элемент площади  $dA$ , центр тяжести  $O$  поперечного сечения, центр сдвига  $S$  с координатами  $x_0$  и  $y_0$  и положения этих точек после деформации. Перемещение поперечного сечения определяется перемещениями  $u$ ,  $v$  и  $\beta$  центра сдвига, и  $\Delta x$  и  $\Delta y$  можно определить из рис. 57, б:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= x_0 - x + (u - x_0 + x) \cos \beta - (v - y_0 + y) \sin \beta = u + (y_0 - y) \beta; \\ \Delta y &= y_0 - y + (u - x_0 + x) \sin \beta + (v - y_0 + y) \cos \beta = v - (x_0 - x) \beta. \end{aligned} \right\} \quad (239)$$

Упрощения, сделанные в правой части этих уравнений, допустимы вследствие того, что рассматриваются только малые деформации.

Укорочение  $\delta_0$  волокна, обусловленное его кривизной, равно разности между длиной кривой и длиной хорды кривой прогибов. Эту разность можно выразить при помощи производных  $\Delta x$  и  $\Delta y$  следующим образом:

$$\delta_0 = \int_0^l \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{d\Delta x}{dz} \right)^2 + \left( \frac{d\Delta y}{dz} \right)^2} - 1 \right] dz.$$

Учитывая, что  $\frac{d\Delta x}{dz}$  и  $\frac{d\Delta y}{dz}$  малы, получим:

$$\delta_0 = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{d\Delta x}{dz} \right)^2 + \left( \frac{d\Delta y}{dz} \right)^2 \right] dz. \quad (240)$$

Подстановка уравнений (239) и (240) в уравнение (238) приводит к двойному интегралу с дифференциалами переменных  $dz$  и  $dA$ .

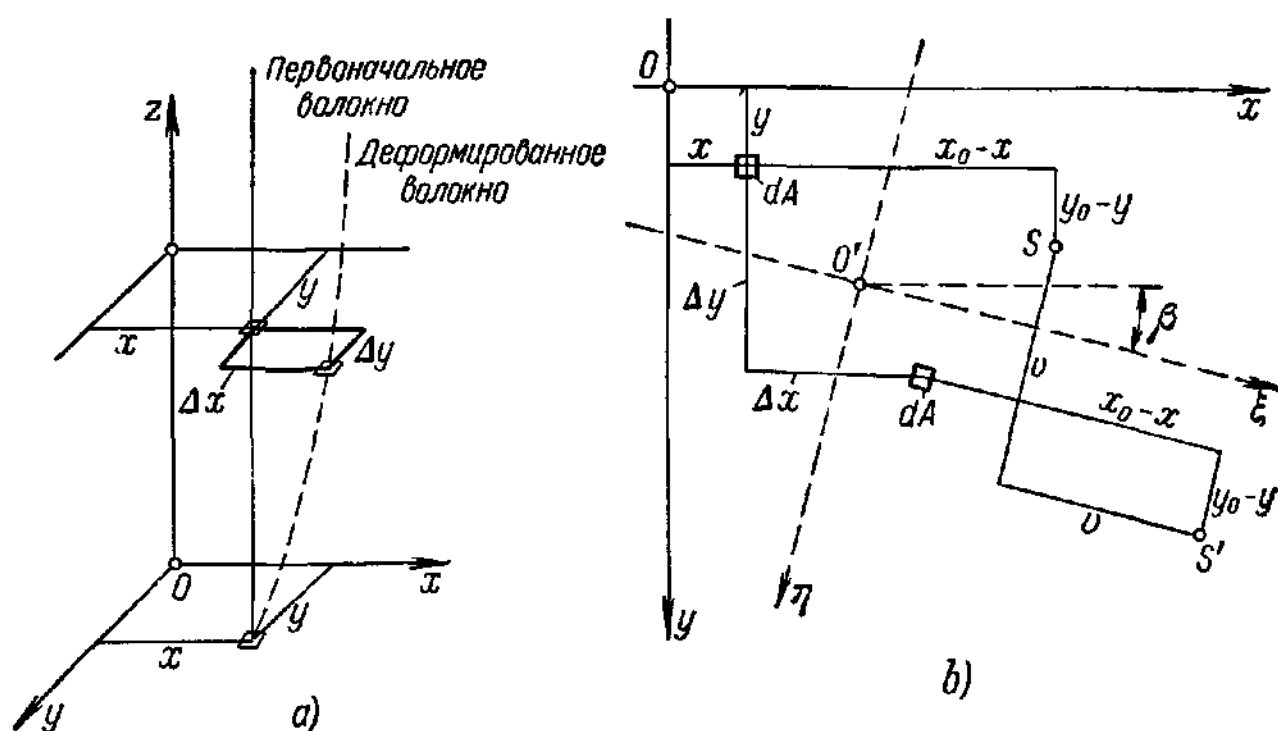


Рис. 57.

Переменные в этом интеграле можно разделить и, используя геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \int_A dA &= A; & \int_A x dA &= 0; & \int_A y dA &= 0; \\ \int_A [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] dA &= J_p, \end{aligned} \quad (241)$$



получить следующее выражение:

$$U_w = \frac{1}{2} \int_0^l [-\sigma A(u'^2 + v'^2) - 2\sigma A y_0 u' \beta' + 2\sigma A x_0 v' \beta' - \sigma J_p \beta'^2] dz, \quad (242)$$

где  $J_p$  обозначает полярный момент инерции поперечного сечения относительно центра сдвига  $S$ .

Суммируя уравнения (235) и (242), получим окончательное выражение для потенциальной энергии  $U$ :

$$U = V + U_w = \frac{1}{2} \int_0^l [E\tau J_y u''^2 + E\tau J_x v''^2 + E\tau \Gamma \beta''^2 + G\tau K \beta'^2 - \sigma A(u'^2 + v'^2) - 2\sigma A y_0 u' \beta' + 2\sigma A x_0 v' \beta' - \sigma J_p \beta'^2] dz. \quad (243)$$

#### 40. Дифференциальные уравнения выпучивания

В теореме о стационарном значении потенциальной энергии, рассмотренной в главе II, требуется, чтобы  $U$  как функция от трех переменных  $u$ ,  $v$  и  $\beta$  имело минимальное значение. Согласно правилам вариационного исчисления  $U$  имеет стационарное значение, если удовлетворены следующие три уравнения Эйлера<sup>1)</sup>:

$$E\tau J_y u^{IV} + \sigma A u'' + \sigma A y_0 \beta'' = 0; \quad (244a)$$

$$E\tau J_x v^{IV} + \sigma A v'' - \sigma A x_0 \beta'' = 0; \quad (244b)$$

$$\sigma A y_0 u'' - \sigma A x_0 v'' + E\tau \Gamma \beta^{IV} + (\sigma J_p - G\tau K) \beta'' = 0. \quad (244c)$$

Эти три уравнения представляют собой совместные дифференциальные уравнения выпучивания вследствие изгиба и кручения в самом общем виде. Каждое из этих дифференциальных уравнений является уравнением четвертого порядка, и их общее решение содержит  $3 \times 4 = 12$  произвольных постоянных, при помощи которых возможно удовлетворить такому же числу граничных условий.

Уравнения (244) в принципе совпадают с уравнениями (15), (16) и (18), имеющимися в работе Гудьера<sup>2)</sup>, если учитывать, что  $x_0$ ,  $y_0$  определяются другим способом и, следовательно, имеют противоположные знаки. Однако уравнения Гудьера выведены для сжатых стержней, шарнирно опертых на концах, и поэтому являются уравнениями только второго и третьего порядка. Уравнения (244) имеют более общий вид и применимы для любых граничных условий; уравнения Гудьера можно получить, интегрируя уравнения (244) с учетом того, что постоянные интегрирования для частного случая шарнирно опертых стержней равны нулю.

<sup>1)</sup> См. главу II, § 31.

<sup>2)</sup> Гудьер, цит. выше стр. 123.

Уравнения (244) применимы в случаях шарнирно опертых, защемленных или свободно опертых на концах стержней, как в обычной теории выпучивания. Несмотря на то, что в литературе нет описания других случаев, существует возможность рассмотреть дополнительные случаи, где условия на опорах для отдельных поясов или стенок на одном и том же конце стержня различны. В качестве примера такого случая может служить двутавровая балка, верхняя полка и стенка которой полностью заделаны, в то время как нижняя полка свободно вращается в своей плоскости. Однако ввиду того, что предполагаемая недеформируемость поперечного сечения создает известные ограничения, нельзя совершенно произвольно выбирать граничные условия. Вообще говоря, допустимы те граничные условия, которые не являются противоречивыми, будучи выраженными через переменные  $u$ ,  $v$ ,  $\beta$  и их производные.

#### 41. Стержни, в которых центр сдвига совпадает с центром тяжести

В поперечных сечениях, имеющих две оси симметрии или центр симметрии, центр сдвига находится в центре тяжести, поэтому в уравнениях (244) можно положить  $x_0 = 0$  и  $y_0 = 0$ :

$$E\tau J_y u^{IV} + \sigma A u'' = 0; \quad (245a)$$

$$E\tau J_x v^{IV} + \sigma A v'' = 0; \quad (245b)$$

$$E\tau \Gamma \beta^{IV} + (\sigma J_p - G\tau K) \beta'' = 0. \quad (245c)$$

В этом случае каждое из трех дифференциальных уравнений содержит только одну из переменных  $u$ ,  $v$  и  $\beta$ . Первые два уравнения идентичны по форме с дифференциальным уравнением теории касательного модуля [гл. I, уравнение (19)]. Для шарнирно опертых на концах сжатых стержней напряжения, при которых происходит выпучивание, параллельные осям  $x$  и  $y$ , равны [гл. I, уравнение (20)]:

$$\sigma_x = \frac{\pi^2 E \tau}{(l/r_y)^2}; \quad \sigma_y = \frac{\pi^2 E \tau}{(l/r_x)^2}. \quad (246)$$

Третье уравнение (245) является дополнением к обычной теории выпучивания и описывает выпучивание сжатого стержня вследствие кручения. Будем решать уравнение (245c) для шарнирно опертого на концах сжатого стержня и определять возможность такого выпучивания. Чтобы получить граничные условия, необходимо подробно описать условия на опоре. Рассмотрим двутавровый сжатый стержень и предположим, что концевые поперечные сечения закреплены по отношению к кручению и что обе полки на концах стержня свободно вращаются в их собственных плоскостях. Если стержень

закручивается относительно его осевой линии, то компоненты  $\eta_1$  и  $\eta_2$  перемещения полок в их собственной плоскости будут равны (рис. 58):

$$\eta_1 = \frac{d}{2} \beta; \quad \eta_2 = \frac{d}{2} \beta. \quad (247a)$$

Кривизна каждой из полок равна второй производной от перемещения:

$$\eta_1'' = \frac{d}{2} \beta''; \quad \eta_2'' = \frac{d}{2} \beta''. \quad (247b)$$

На концах сжатого стержня кручение отсутствует, отсюда  $\beta = 0$ . Кроме того, если каждая полка свободно вращается, изгибающий момент в полках должен быть равным нулю; отсюда вытекает, что кривизны на конце также равны нулю  $\eta_1'' = \eta_2'' = 0$ , что дает следующие четыре граничных условия:

при  $z = 0$  и  $z = l$   $\beta = 0$  и  $\beta'' = 0$ . (248)

Дифференциальное уравнение (245с) и граничные условия (248) являются однородными уравнениями, и можно доказать, что отличные от нуля решения существуют только при определенных значениях напряжения. Перемещение выражается в следующей форме:

$$\beta = C \sin \frac{n\pi z}{l},$$

где  $C$  — произвольная постоянная, а  $n$  — целое число. Значение  $\sigma$  равно

$$\sigma = \frac{\pi^2 E \tau}{l^2} \left( n^2 \frac{\Gamma}{J_p} + \frac{l^2}{\pi^2} \frac{GK}{EJ_p} \right), \quad (249)$$

причем  $K$  и  $\Gamma$  оценивают свойства поперечного сечения, определенные в §§ 35 и 36, а  $J_p$  — полярный момент инерции относительно центра изгиба.

Наименьшее значение напряжения  $\sigma_\beta$ , при котором происходит крутильное выпучивание, очевидно, получается, когда  $n = 1$ . Напряжение  $\sigma_\beta$  можно выразить в функции от эквивалентного радиуса инерции  $r_\beta$  следующим образом:

$$\sigma_\beta = \frac{\pi^2 E \tau}{(l/r_\beta)^2}. \quad (250)$$

Значение эквивалентного радиуса инерции  $r_\beta$  составляет при  $\nu = 0,30$  и  $G/E = 1/2 (1 + \nu) = 1/2,60$

$$r_\beta = \sqrt{\frac{\Gamma}{J_p} + \frac{G}{\pi^2 E} \frac{l^2 K}{J_p}} = \sqrt{\frac{\Gamma}{J_p} + 0,0390 \frac{l^2 K}{J_p}}. \quad (251)$$

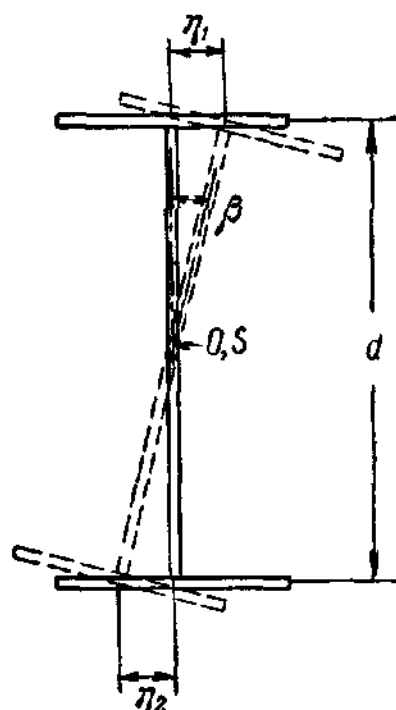


Рис. 58.

Уравнение (250) имеет ту же самую форму, что и уравнения (246) для бокового выпучивания в соответствии с теорией касательного модуля, и следовательно, можно утверждать, что сжатый стержень будет неустойчивым относительно крутильного выпучивания, когда критическое напряжение  $\sigma_\beta$  равно критическому напряжению бокового выпучивания эквивалентного сжатого стержня с гибкостью  $l/r_\beta$ . Это положение применимо как к случаю упругого, так и неупругого выпучивания. Величина  $r_\beta$  имеет размерность длины и зависит от формы поперечного сечения и длины сжатого стержня. Критическое напряжение сжатого стержня будет наименьшим из трех напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_\beta$  и будет соответствовать наименьшему значению радиусов инерции  $r_x$ ,  $r_y$  и  $r_\beta$ .

До сих пор мы рассматривали случай только шарнирно опертых сжатых стержней; при других конечных условиях критическое напряжение бокового выпучивания можно выразить в следующем виде:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \tau}{(kl/r)^2}, \quad (252)$$

где  $k'$  — эффективная длина сжатого стержня [гл. I, уравнение (21)]. Когда граничные условия для  $\beta$  те же, что и для боковых перемещений  $u$  и  $v$  (т. е. в случае сжатых стержней с защемлениями на концах и стержней с одним свободным концом), крутильное выпучивание будет происходить при напряжении, данном уравнением (252) для эквивалентного сжатого стержня с гибкостью  $kl/r_\beta$ . В этих случаях эквивалентный радиус инерции  $r_\beta$  будет

$$r_\beta = \sqrt{\frac{\Gamma}{J_p} + 0,0390 \frac{k^2 l^2 K}{J_p}}. \quad (253)$$

При применении уравнения (253) к прокатным двутавровым сечениям мы используем уравнение (230),  $\Gamma = (d^2/4) J_y$ . Так как центр сдвига находится в центре тяжести, то  $J_p = J_x + J_y$ , и выражение для эквивалентного радиуса инерции будет

$$r_\beta = \sqrt{\frac{d^2}{4} \frac{J_y}{J_x + J_y} + 0,0390 \frac{k^2 l^2 K}{J_x + J_y}}. \quad (254)$$

Исследование стандартных стальных сечений показывает, что в большинстве случаев значение  $r_\beta$  больше, чем  $r_y$ , вследствие чего происходит боковое выпучивание сжатого стержня: только у стержней с короткой длиной  $l$  и очень широкими полками значения  $r_\beta$  несколько меньше, чем  $r_y$ , поэтому в таких стержнях происходит крутильное выпучивание. На рис. 59 показано изменение  $r_\beta$  в зависимости от  $kl$  для 37-см балки с погонным весом 210 кг/м. В этом частном случае крутильное выпучивание будет критическим, если эффективная длина стержня меньше 238 см. Увеличение значения гибкости остается меньше 8%, и вследствие того, что значение  $kl/r$

меньше 25, критическое напряжение изменяется довольно незначительно. Подобные условия встречаются в обычно используемых защемленных сжатых стержнях с Н-образным поперечным сечением

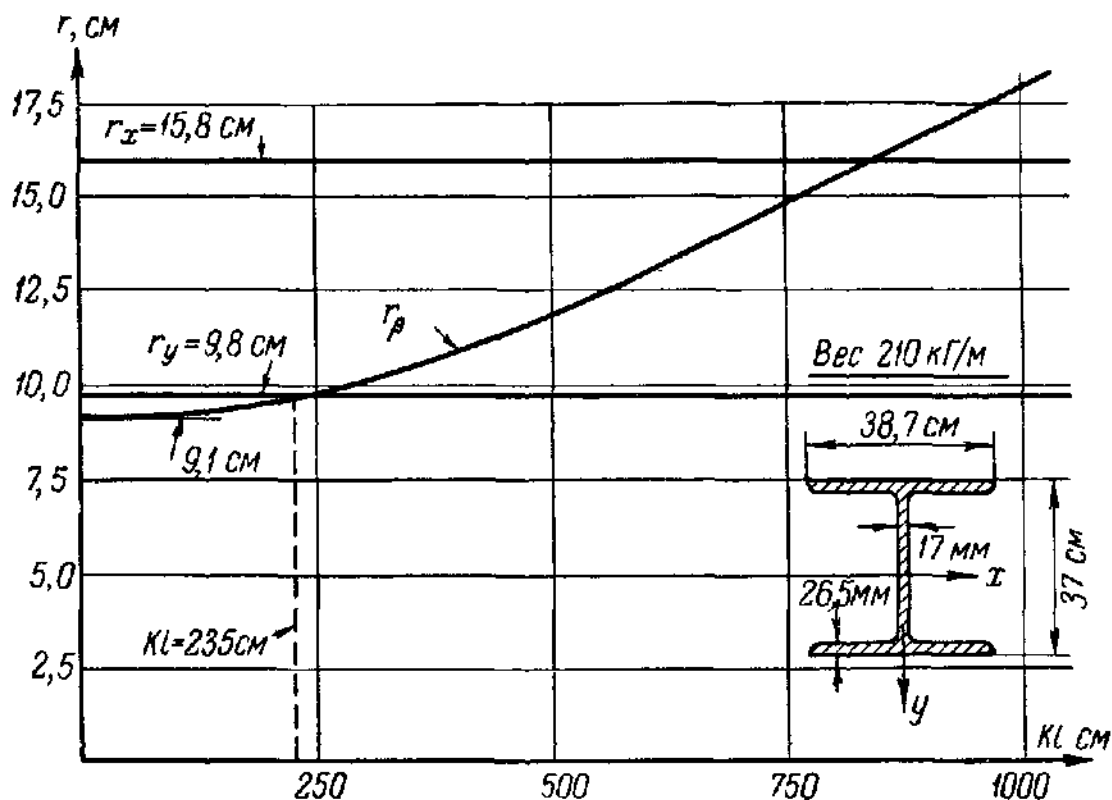


Рис. 59.

до тех пор, пока поперечные сечения симметричны относительно осей  $x$  и  $y$ . Тем не менее, нельзя недооценивать явление крутильного выпучивания для тех сечений, где центр сдвига и центр тяжести совпадают; состояние крутильного выпучивания может оказаться критическим для крестообразных сечений, таких, как на рис. 60.

Подводя итоги вышесказанному, можно заключить, что в случае, когда центр сдвига совпадает с центром тяжести, наблюдается явление выпучивания в результате изгиба сжатого стержня без одновременного кручения при критическом напряжении, определенном по теории касательного модуля. Однако возможно появление чистого крутильного выпучивания относительно оси, проходящей через центр сдвига. Критическое напряжение можно получить в функции, эквивалентной гибкости  $kl/r_\rho$ . Для стандартных двутавровых сжатых стержней явление крутильного выпучивания не понижает сколько-нибудь заметно значения критического напряжения. Очевидно, что такое положение не обязательно применимо для других видов поперечных сечений, имеющих две оси симметрии.

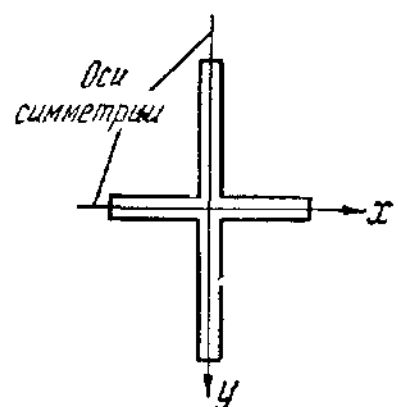


Рис. 60.

#### 42. Сжатые стержни с одной осью симметрии

В случае, когда поперечное сечение имеет ось симметрии, например ось  $y$ , имеем  $x_0 = 0$ , и уравнения (244) примут следующий вид:

$$E\tau J_y u^{IV} + \sigma A u'' + \sigma A y_0 \beta'' = 0; \quad (255a)$$

$$E\tau J_x v^{IV} + \sigma A v'' = 0; \quad (255b)$$

$$\sigma A y_0 u'' + E\tau J \beta^{IV} + (\sigma J_p - G\tau K) \beta'' = 0. \quad (255c)$$

Второе из этих уравнений содержит только перемещение  $v$  и представляет собой обычное дифференциальное уравнение изгибного выпучивания в направлении  $y$ , что дает для шарнирно опертого на концах стержня следующее значение критического напряжения:

$$\sigma_y = \frac{\pi^2 E \tau}{(l/r_x)^2}. \quad (256)$$

Первое и третье уравнения содержат  $u$  и  $\beta$ , но не  $v$ . Это свидетельствует о том, что выпучивание в направлении  $x$  и кручение происходят одновременно и что значение напряжения выпучивания, найденное по обычной теории, становится неправильным. Предположив, что концы шарнирно опертого сжатого стержня закреплены против кручения, получим следующие граничные условия:

$$\text{при } x=0 \text{ и } x=l \quad u=0; \quad \beta=0; \quad u''=0; \quad \beta''=0. \quad (257)$$

Общее решение совместных дифференциальных уравнений (255a) и (255c) содержит восемь произвольных постоянных. Используя граничные условия, можно показать, что все постоянные, кроме двух, равны нулю, и решения имеют следующий вид:

$$u = C_1 \sin \frac{n\pi z}{l} \quad \text{и} \quad \beta = C_2 \sin \frac{n\pi z}{l}.$$

Подставляя эти значения в дифференциальные уравнения, получим два однородных уравнения для постоянных  $C_1$  и  $C_2$ . Отличные от нуля решения для  $C_1$  и  $C_2$  могут существовать только при условии, когда детерминант, составленный из коэффициентов этих уравнений, равен нулю. Из этого условия можно определить критические значения напряжения  $\sigma$ . Наименьшее значение критического напряжения получается при выпучивании по одной полуволне ( $n=1$ ), что можно выразить в следующей форме:

$$\sigma_{x\beta} = \frac{\pi^2 E \tau}{(l/r_e)^2}, \quad (258)$$

где  $r_e$  есть эквивалентный радиус инерции, значение которого получается из следующего квадратного уравнения относительно  $r_e^2$ :

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{r_y^2}{r_e^2} & y_0 \\ y_0 & \frac{J_p}{A} \left( 1 - \frac{r_\beta^2}{r_e^2} \right) \end{vmatrix} = \left( 1 - \frac{r_y^2}{r_e^2} \right) \left( 1 - \frac{r_\beta^2}{r_e^2} \right) - \frac{A y_0^2}{J_p} = 0, \quad (259)$$

причем  $r_y$  — радиус инерции поперечного сечения относительно оси  $y$ , а  $r_\beta$  определяется соотношением

$$r_\beta = \sqrt{\frac{\Gamma}{J_p} + \frac{l^2}{\pi^2} \frac{GK}{EJ_p}} = \sqrt{\frac{\Gamma}{J_p} + 0,0390 \frac{Kl^2}{J_p}}. \quad (260)$$

Здесь  $\Gamma$  и  $K$ , характеризующие геометрические свойства поперечного сечения, определены в §§ 35 и 36;  $J_p$  — полярный момент инерции относительно центра сдвига.

Уравнение (258) имеет тот же вид, что и уравнение (256), выведенное для простого выпучивания. Следовательно, критическое напряжение  $\sigma_{x\beta}$  выпучивания вследствие изгиба и кручения имеет то же значение, что и критическое напряжение, рассчитанное по обычной теории сжатых стержней для эквивалентного сжатого стержня с гибкостью  $l/r_e$ . Это одинаково верно для упругой и неупругой областей.

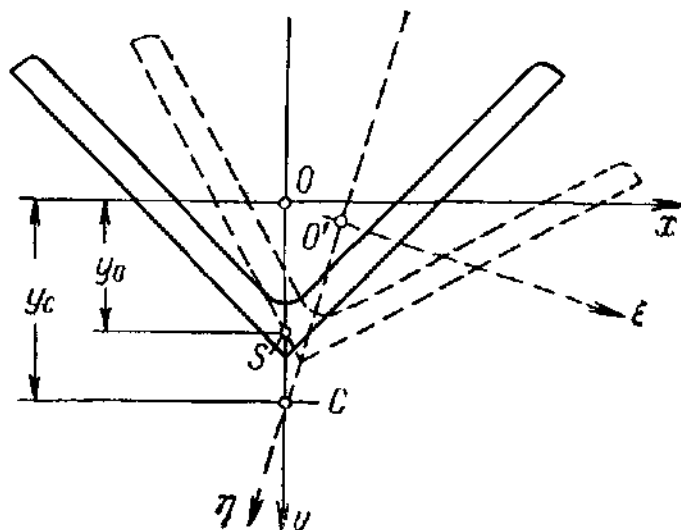


Рис. 61.

Можно определить значения деформаций, соответствующие корням  $r_e$  уравнения (259), и обнаружить, что каждое поперечное сечение вращается вокруг точки  $C$  с координатами

$$x_c = 0; \quad y_c = \frac{y_0}{1 - (r_e^2/r_y^2)}. \quad (261)$$

На рис. 61 показано положение центра кручения для уголкового сечения.

Уравнение (259) всегда имеет два положительных корня  $r_e$ , один из которых меньше как  $r_y$ , так и  $r_\beta$ . Если сопротивление поперечного сечения крутильному выпучиванию незначительно, то значение  $r_\beta$  также мало по сравнению с  $r_y$ , поэтому один корень  $r_e$  будет близким к  $r_\beta$ . Исходя из уравнения (261), можно заключить, что в этом случае величина  $y_c$  будет незначительно отличаться от  $y_0$ ; это означает, что центр кручения станет близким к центру сдвига.

Вообще говоря, сжатый стержень начинает выпучиваться при значении напряжения  $\sigma$ , данном уравнениями (256) и (258) и соответствующем меньшему из значений  $r_x$  и  $r_e$ . Если  $r_x$  меньше, то сжатый стержень выпучится в направлении  $y$  без кручения; когда значение корня  $r_e$  уравнения (259) меньше значения  $r_x$ , сжатый стержень будет изгибаться в направлении  $x$  и одновременно закручиваться. Так как величина  $r_e$  всегда меньше  $r_y$ , значение критического напряжения будет также меньшим по сравнению со значением, даваемым по обычной теории сжатых стержней при выпучивании в направлении  $x$ .

Уравнения (258) — (260) можно применить также при других концевых условиях, если  $l$  заменить эквивалентной длиной  $kl$ , при условии, что граничные условия для  $\beta$  и  $u$  одинаковы.

Полученные результаты показывают, что обычная теория выпучивания вследствие изгиба неприменима при выпучивании в направлении, перпендикулярном к оси симметрии поперечного сечения. Значение этого результата для немногих типичных случаев будет рассмотрено ниже.

Для равнобоких уголков (рис. 61)  $r_x$  значительно меньше, чем  $r_y$ , и в соответствии с обычной теорией выпучивания должно произойти выпучивание уголка в направлении  $y$ . Однако в том случае, если значение одного из корней  $r_e$  уравнения (259) может быть меньше  $r_x$ , наблюдается крутильное выпучивание уголка.

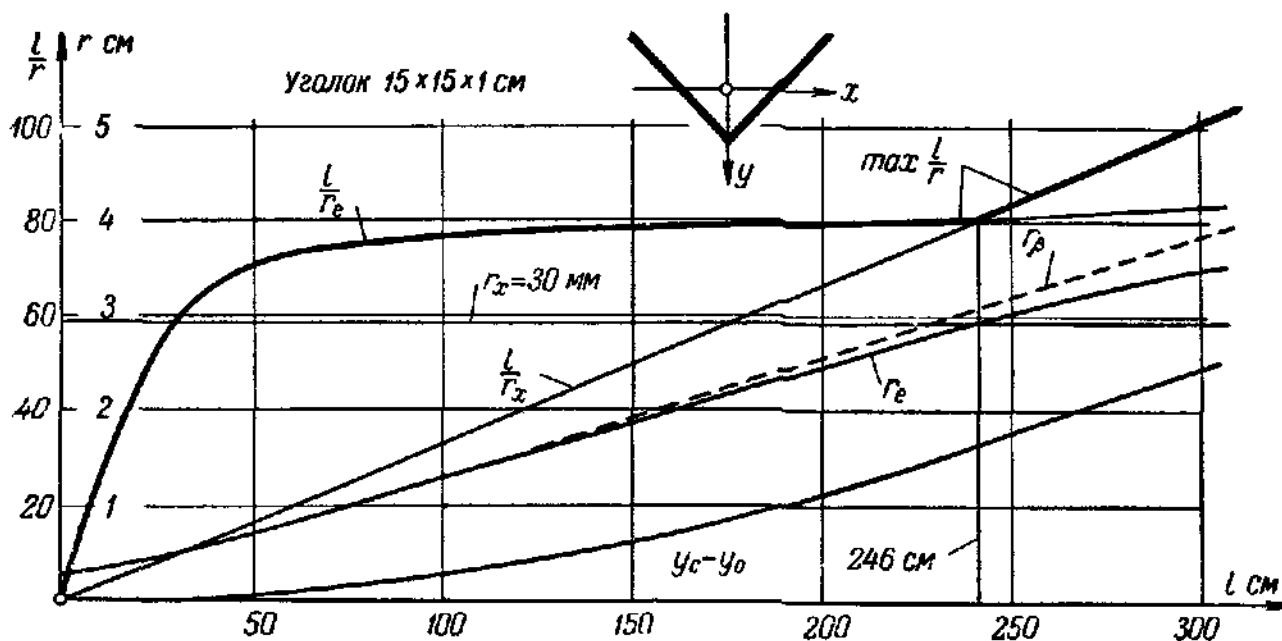


Рис. 62.

На рис. 62 показана взаимозависимость между  $r_e$  и  $r_x$  для уголка с размерами  $15 \times 15 \times 1$  см,  $r_x$  — постоянная величина, но  $r_e$  является функцией от длины  $l$ . Очевидно, что значение  $r_e$  меньше, чем  $r_x$ , для значения длины, меньшей 246 см. На рис. 62 показано также расстояние  $u_c - u_0$  центра кручения от центра сдвига. Для коротких стержней значение  $u_c$  лишь несколько больше  $u_0$ ; это означает, что



уголок закручивается приблизительно относительно центра сдвига. Значения  $r_\beta$ , показанные пунктирной линией, незначительно отличаются от значений  $r_e$ , поэтому для уголков можно достаточно точно полагать, что  $r_e = r_\beta$ . На рис. 62 нанесены также расчетные критические максимальные значения  $\max \frac{l}{r}$ ; эта линия значительно

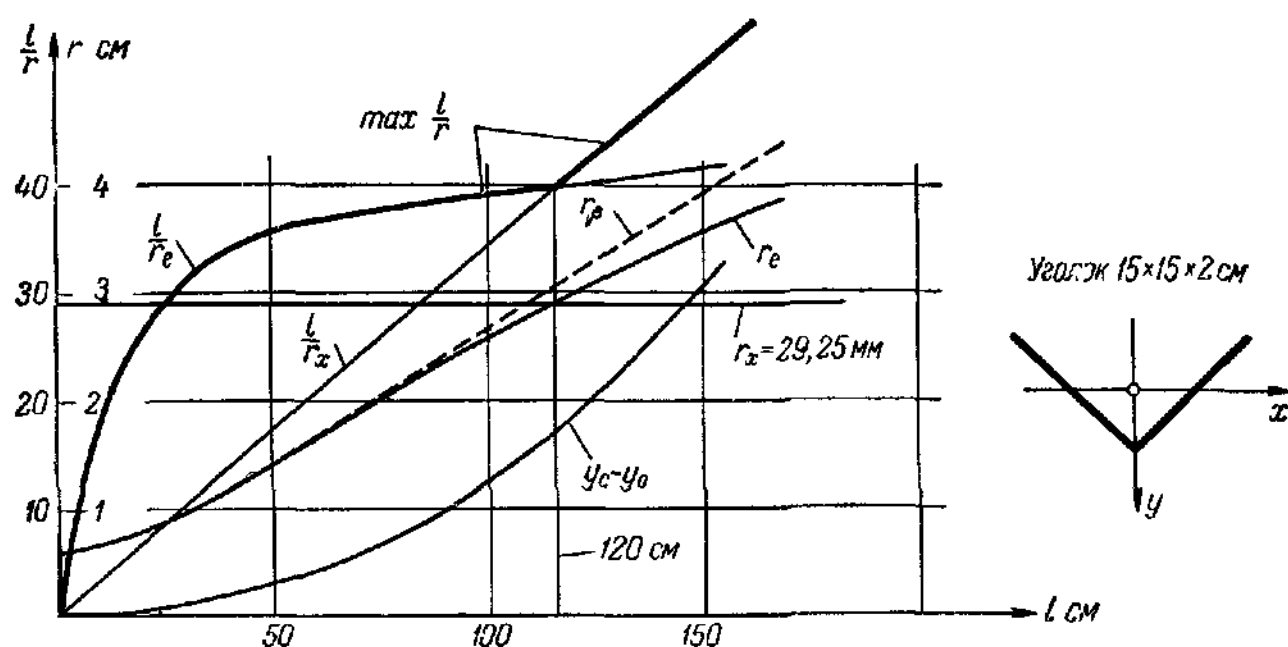


Рис. 63.

расходится с линией значений  $\frac{l}{r_\omega}$ , соответствующей обычной теории. Отношение ширины полки к толщине ( $b/t$ ) для этого уголка равно 15, что соответствует наибольшему отношению, использованному в металлических конструкциях.

Как видно из рис. 63, на котором показаны соответствующие кривые для уголков размером  $15 \times 15 \times 2$  см, наблюдаемые расхождения заметно уменьшаются для случаев более толстых уголков. Крутильное выпучивание происходит только при значениях длины, меньших, чем 120 см, но разница в эффективных гибкостях все еще остается существенной. Однако нужно иметь в виду, что при малых значениях  $l/r_e$  критическое напряжение не зависит от изменения гибкости, и большие расхождения в значениях  $l/r_x$  и  $l/r_e$  не так существенны, как это кажется с первого взгляда.

В начале этого параграфа было отмечено, что для равнобоких уголков не существует различия между основным и местным выпучиванием, и явление крутильного выпучивания уголка, с другой стороны, можно рассматривать как местное выпучивание сторон уголка. Рассматривая каждую сторону уголка как пластинку, свободно опертую вдоль длинной стороны, а противоположную сторону как полностью свободную, можно найти  $\sigma_e$  из уравнения (647) главы IX. Для установленных граничных условий коэффициент заделки будет  $\zeta = \infty$ , и из рис. 63 имеем  $p = 0,425$ ,  $q = 0$ . Уголок

выпучится по одной волне  $n=1$ , и из данного отношения  $\alpha=l/b$  на базе теории выпучивания пластинок получается следующее значение критического напряжения:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^3 \left[ \frac{b^3 \sqrt{\tau}}{l^3} + 0,425 \right]. \quad (262)$$

Если использовать допустимое для уголков приближение  $r_e = r_p$ , как это следует из рис. 62 и 63, можно найти значение критического напряжения из уравнений (258) и (260):

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \tau}{(l/r_e)^3} = \frac{\pi^2 E \tau}{l^3} \left( \frac{\Gamma}{J_p} + 0,0390 \frac{K l^2}{J_p} \right). \quad (263)$$

Выражая значения  $\Gamma$ ,  $K$  и  $J_p$  через ширину  $b$  и толщину  $t$  уголка, т. е.  $\Gamma = b^3 t^3 / 18$ ,  $K = 2 b t^3 / 3$ , и полагая  $\nu = 0,30$ ,  $J_p = 2 b^3 t / 3$ , получаем:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^3 \left[ (1-\nu^2) \frac{b^3}{l^3} \sqrt{\tau} + 0,425 \sqrt{\tau} \right]. \quad (264)$$

Уравнения (262) и (264) очень похожи, но не идентичны. Первый член в скобках в уравнении (264) содержит дополнительный коэффициент  $(1-\nu^2)$ . Это различие обусловлено пренебрежением влиянием коэффициента Пуассона при вычислении значения  $\Gamma$ . Последний член содержит дополнительную величину  $\sqrt{\tau}$ , которая обусловлена использованием соотношения  $G_t = G \tau$  вместо соотношения  $G_t = G \sqrt{\tau}$  при выводе уравнения (235).

В связи с тем, что уравнение (262) было получено на основе применения теории пластин, его следует считать наиболее точным. Численное влияние коэффициента  $(1-\nu^2)$  в уравнении (264) довольно незначительно, так как величина этого члена очень мала по сравнению с последним членом, заключенным в скобках; влияние члена  $\sqrt{\tau}$  может стать заметным для коротких уголков. Уравнение (264) дает очень низкое значение критического напряжения, и следовательно, его применение обеспечивает наиболее безопасные результаты. Преимущества для конструктора, которые состоят в том, что он может выразить критическое напряжение в функции от эквивалентного радиуса инерции  $r_e$ , компенсируют потери точности, вызванные использованием приближенного соотношения  $G_t = G \tau$ .

На рис. 64 изображены эквивалентный радиус инерции  $r_e$  и гибкость  $l/r_e$  для тавра, состоящего из двух уголков. Такие профили употребляются часто и являются поэтому очень важными. Для коротких стержней разница между  $l/r_e$  и  $l/r_y$  очень большая и оказывается большей 10% от значения  $l/r_y$  даже для гибких элементов. Критическая сила таких элементов может понижаться до 20%. На рис. 64 показано также расстояние  $u_c - u_0$  центра кручения  $S$  от центра сдвига. Центр кручения не расположен близко к центру сдвига, исключая коротких стержней.

Для тавровых профилей, прокатных или составленных из двух уголков, невозможно квалифицировать явление крутильного выпучивания как местное выпучивание сторон. Для случая, показанного на рис. 64, эквивалентные гибкости  $l/r$ , получаемые в результате

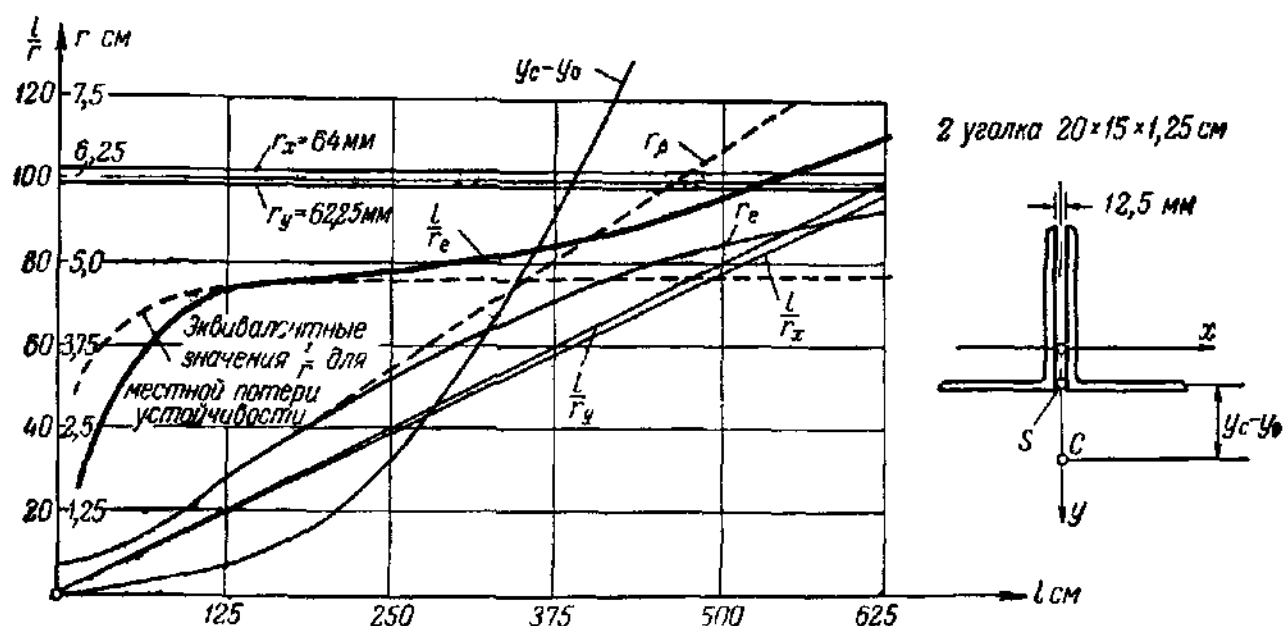


Рис. 64.

местного выпучивания, были определены на основе теории пластинок. Явление местного выпучивания в очень коротких сжатых стержнях имеет место при более низком значении напряжения, чем явление крутильного выпучивания; поэтому отпадает необходимость

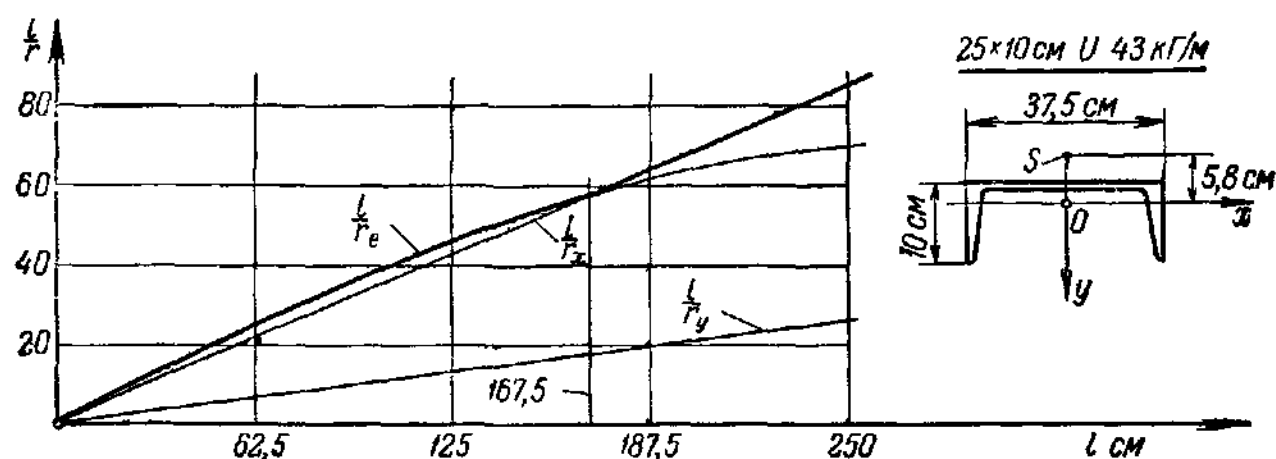


Рис. 65.

рассматривать крутильное выпучивание; для более длинных стержней, начиная с  $l = 200$  см, крутильное выпучивание является критическим, поэтому для такого вида сечений его необходимо принимать во внимание.

На рис. 65—67 показаны значения гибкости  $l/r_e$ ,  $l/r_x$  и  $l/r_y$  для других типичных профилей. Расхождения между эквивалентной гибкостью  $l/r_e$  и гибкостями  $l/r_x$  и  $l/r_y$ , применяемыми в обычных

расчетах, весьма заметны, но не слишком велики в случаях швеллерных и несимметричных двутавровых профилей (рис. 65 и 66). Расхождения, показанные на рис. 67 для открытого составного профиля, являются значительными и несколько ненадежными. Однако

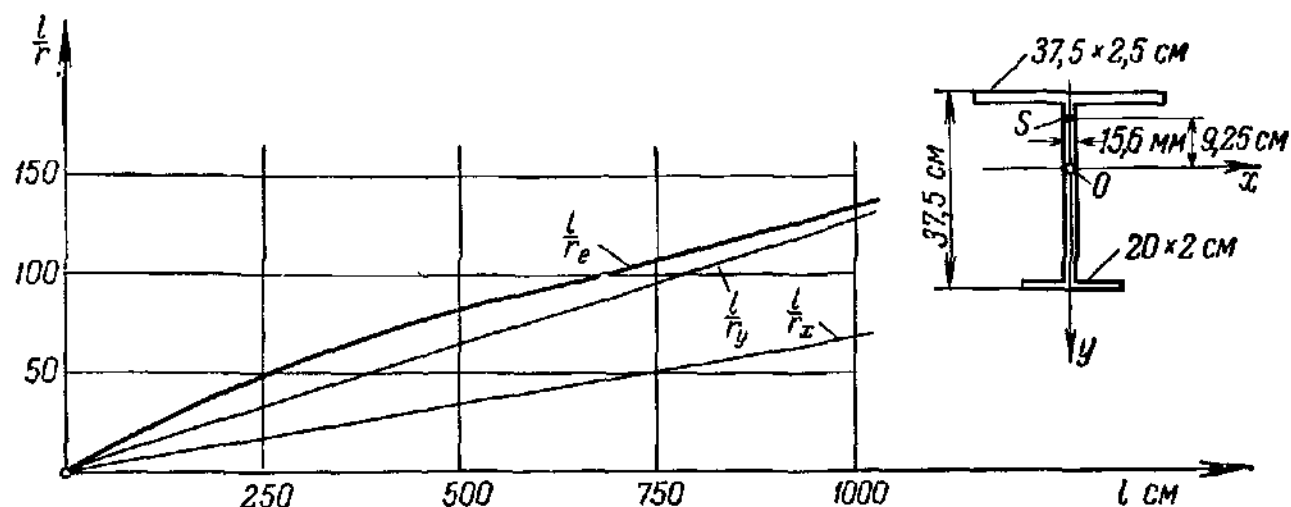


Рис. 66.

такие профили обычно с помощью накладок, соединяющих две нижние полки швеллеров, становятся закрытыми<sup>1)</sup>, а крутильная жесткость их значительно повышается. Значения  $l/r_e$ , соответствующие приближенному исследованию полученного таким образом замкнутого сечения, показаны пунктирной линией; они лишь незначительно

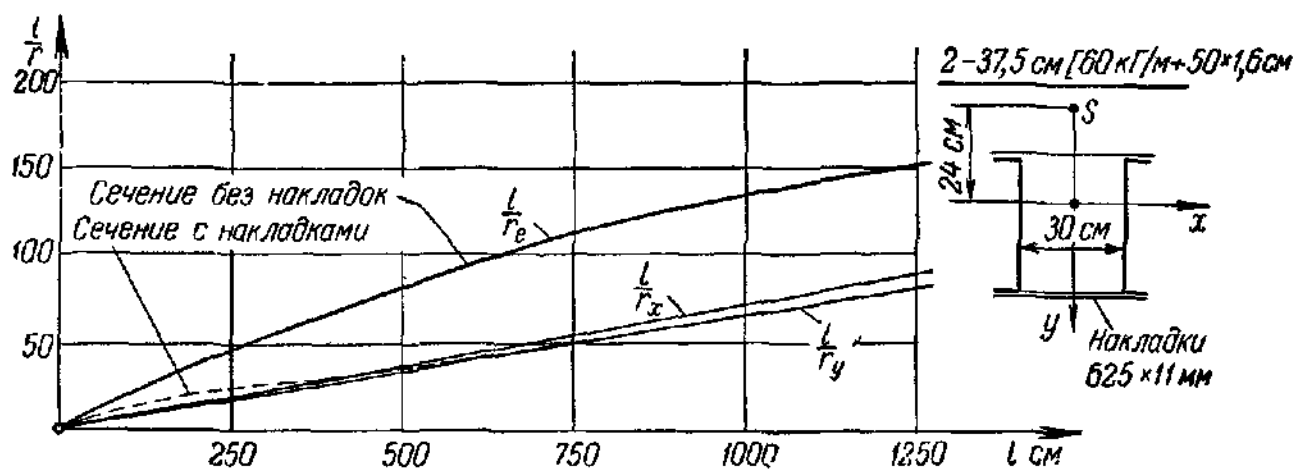


Рис. 67.

отличаются от значений кривой  $l/r_m$ . Рис. 67 является прекрасным доказательством необходимости использования соединительных элементов или плоских накладок, соединяющих нижние полки.

Основное выпучивание и местные потери устойчивости стенок и полок в швеллерных, двутавровых и составных сжатых стержнях, показанные на рис. 65—67, представляют собой два совершенно

<sup>1)</sup> Закрытые профили исследовались в работах Ф. Блейха и Г. Блейха, цит. выше, стр. 123, а также Лундквиста и Флигга, цит. выше, стр. 123.

разных вида потери устойчивости, каждый из которых необходимо специально исследовать.

Возвращаясь к примерам, показанным на рис. 62—67, можно утверждать, что вследствие возможности появления явления крутильного выпучивания увеличение значения гибкости  $l/r_e$  является весьма существенным для всех открытых профилей с одной осью симметрии. Из всех видов профилей, использованных в стальных конструкциях и в кораблестроении, тонкостенные уголки и тавры имеют наименьшую несущую способность. Для отдельных уголков крутильное выпучивание и местное выпучивание сторон представляют собой одно и то же явление, поэтому отдельный сжатый уголок, рассчитанный по отношению местной потери устойчивости будет автоматически устойчив по отношению к явлению крутильного выпучивания и наоборот.

### 43. Крутильное выпучивание с фиксированной осью вращения

К особым задачам о выпучивании сжатых стержней вследствие кручения и изгиба относятся случаи сжатых пластин, подкрепленных продольными ребрами жесткости, где фиксированное положение оси вращения определяется внешними условиями. Пластика предотвращает всякое боковое движение ребра жесткости, за исключением

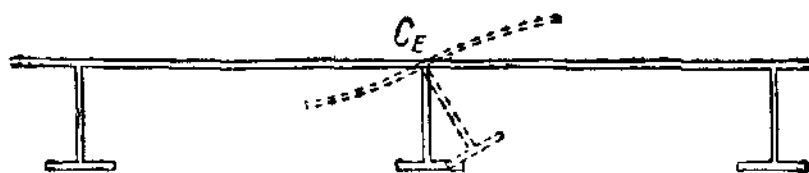


Рис. 68.

вращательного движения вокруг точки  $C_E$  (рис. 68); однако такому вращению препятствует изгибная жесткость пластинки.

С целью получить основу для расчета ребер жесткости рассмотрим в этом разделе выпучивание симметричных сжатых стержней с фиксированной осью вращения в плоскости симметрии. Для двутавровых стержней эта задача впервые была рассмотрена Блейхом<sup>1)</sup>; решение задачи для обычно употребляемых типов профилей впервые было получено Каппусом<sup>2)</sup>, а также Лундкуистом и Флиггом<sup>3)</sup>.

На рис. 69, а показан симметричный относительно оси  $y$  профиль. Фиксированный центр вращения обозначен через  $C_E$ . Расстояние  $a$  от  $C_E$  до центра сдвига  $S$  считается положительным, если  $S$  находится между точками  $O$  и  $C_E$ .

Потенциальная энергия  $U$  выражена уравнением (243) в функции от перемещений  $u$ ,  $v$  и  $\beta$ . В связи с тем, что поперечные

<sup>1)</sup> Bleich F., *Stahlhochbauten*, т. 2, стр. 927, Julius Springer, Berlin, 1933.

<sup>2)</sup> Каппус, цит. выше, стр. 123.

<sup>3)</sup> Лундкуист и Флигг, цит. выше, стр. 123.

сечения стержня неизбежно вращаются вокруг точки  $C_E$ , перемещения  $u$  и  $v$  можно выразить через угол закручивания  $\beta$  следующим образом (см. рис. 69, б):

$$u = a \sin \beta; \quad v = (\cos \beta - 1) a.$$

Если ограничиться исследованием малых прогибов, то  $\sin \beta = \beta$ ,  $\cos \beta = 1$  и отсюда имеем:

$$u = a\beta; \quad v = 0. \quad (265)$$

Подставляя эти значения  $u$  и  $v$  в уравнение (243), получим:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l [E\tau (a^2 J_y + \Gamma) \beta''^2 + G\tau K \beta'^2 - \sigma (Aa^2 + 2Aa y_0 + J_p) \beta'^2] dz.$$

Последний член, содержащий  $J_p$ , можно упростить, если учесть, что полярный момент инерции  $J_p$  поперечного сечения относительно

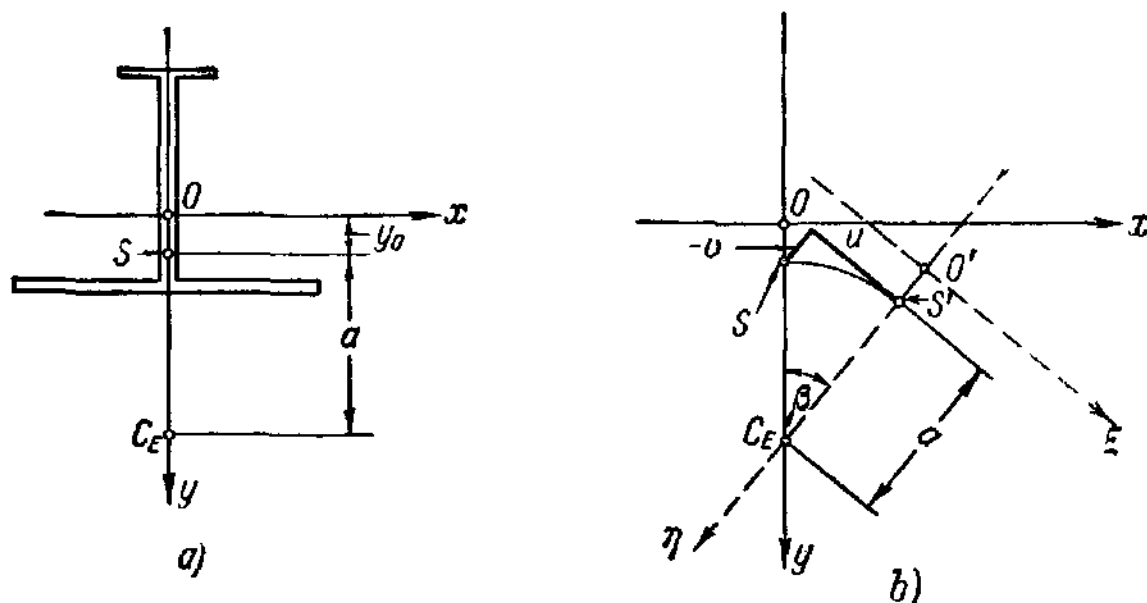


Рис. 69.

центра сдвига можно выразить в форме  $J_p = J_x + J_y + A y_0^2$ , где  $J_x$ ,  $J_y$  являются главными моментами инерции поперечного сечения. Следовательно,

$$Aa^2 + 2Aa y_0 + J_p = J_x + J_y + A(a + y_0)^2 = J_{pc},$$

где  $J_{pc}$  — полярный момент инерции поперечного сечения относительно фиксированного центра вращения  $C_E$ .

Выражение потенциальной энергии принимает тогда следующий упрощенный вид:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l [E\tau (a^2 J_y + \Gamma) \beta''^2 + (G\tau K - \sigma J_{pc}) \beta'^2] dz. \quad (266)$$

Из теоремы о стационарном значении потенциальной энергии следует, что  $U$ , рассмотренное в функции от  $\beta$ , должно иметь минимальное значение. Согласно правилам вариационного исчисления  $U$  принимает стационарное значение при условии, если удовлетворено следующее уравнение Эйлера:

$$E\tau(a^2J_y + \Gamma)\beta^{IV} + (\sigma J_{pc} - G\tau K)\beta'' = 0. \quad (267)$$

Граничными условиями для свободно опертых концов являются  $\beta = 0$  и  $\beta'' = 0$  на обоих концах  $z = 0, z = l$ . В связи с тем, что уравнение (267) и граничные условия являются однородными, решения, отличные от нуля, могут иметь место только при определенных значениях напряжения  $\sigma$ . Перемещение выражается следующей формулой:

$$\beta = C \sin \frac{n\pi z}{l},$$

где  $C$  является произвольной постоянной, а величина  $\sigma$  равна

$$\sigma = \frac{\pi^2 E \tau}{l^2} \left( n^2 \frac{a^2 J_y + \Gamma}{J_{pc}} + \frac{G}{\pi^2 E} \frac{l^2 K}{J_{pc}} \right).$$

Наименьшее значение  $\sigma$  получим при выпучивании по одной волне ( $n = 1$ ).

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \tau}{l^2} \left( \frac{a^2 J_y + \Gamma}{J_{pc}} + \frac{G}{\pi^2 E} \frac{l^2 K}{J_{pc}} \right) = \frac{\pi^2 E \tau}{(l/r_e)^2}. \quad (268)$$

Эквивалентный радиус инерции  $r_e$  в уравнении (268) определяется следующей формулой:

$$r_e = \sqrt{\frac{a^2 J_y + \Gamma}{J_{pc}} + \frac{G}{\pi^2 E} \frac{l^2 K}{J_{pc}}} = \sqrt{\frac{a^2 J_y + \Gamma}{J_{pc}} + 0,0390 \frac{l^2 K}{J_{pc}}}, \quad (269)$$

где  $J_{pc}$  обозначает полярный момент инерции поперечного сечения относительно фиксированного центра вращения  $C_E$ .

Уравнение (268) имеет тот же вид, что и уравнение (246) для бокового выпучивания сжатых стержней в соответствии с теорией касательного модуля, в результате чего стержень выпучивается вследствие кручения при значении критического напряжения, соответствующего эквивалентной гибкости  $l/r_e$ .

Уравнения (268) и (269) были выведены для сжатых стержней, которые свободно вращались вокруг фиксированной оси вращения. Можно рассмотреть случай сжатых стержней, упруго заделанных по отношению к вращению<sup>1)</sup>. Если момент сопротивления  $m_t$  опоры

<sup>1)</sup> Более общий случай сжатого стержня, упруго заделанного по отношению к перемещению и вращению, рассмотрен В. З. Власовым и обсужден Тимошенко в его работе «Theory of Bending, Torsion and Buckling of Thin-Walled Members of Open Cross Section, Jour. Franklin Inst., 1945, стр. 348; русский перевод: «Теория изгиба, кручения и устойчивости тонкостенных стержней открытого поперечного сечения». См. С. П. Тимошенко, Устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, 1955, стр. 502.

пропорционален углу закручивания  $\beta$ , то имеет место соотношение

$$m_t = C\beta, \quad (270)$$

где  $C$  является «жесткостью пружины». Критическое напряжение снова можно выразить через эквивалентный радиус инерции  $r_e$  следующим образом:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \tau}{(l/r_e)^2}, \quad (271)$$

где

$$r_e = \sqrt{\frac{n^2(\Gamma + a^2 J_y) + 0,0390 K l^2 + \frac{1 l^4}{n^2 \pi^4} \frac{C}{E}}{J_{pc}}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (272)$$

Эквивалентный радиус инерции  $r_e$  является функцией числа волн  $n$ , по которым выпучивается сжатый стержень.

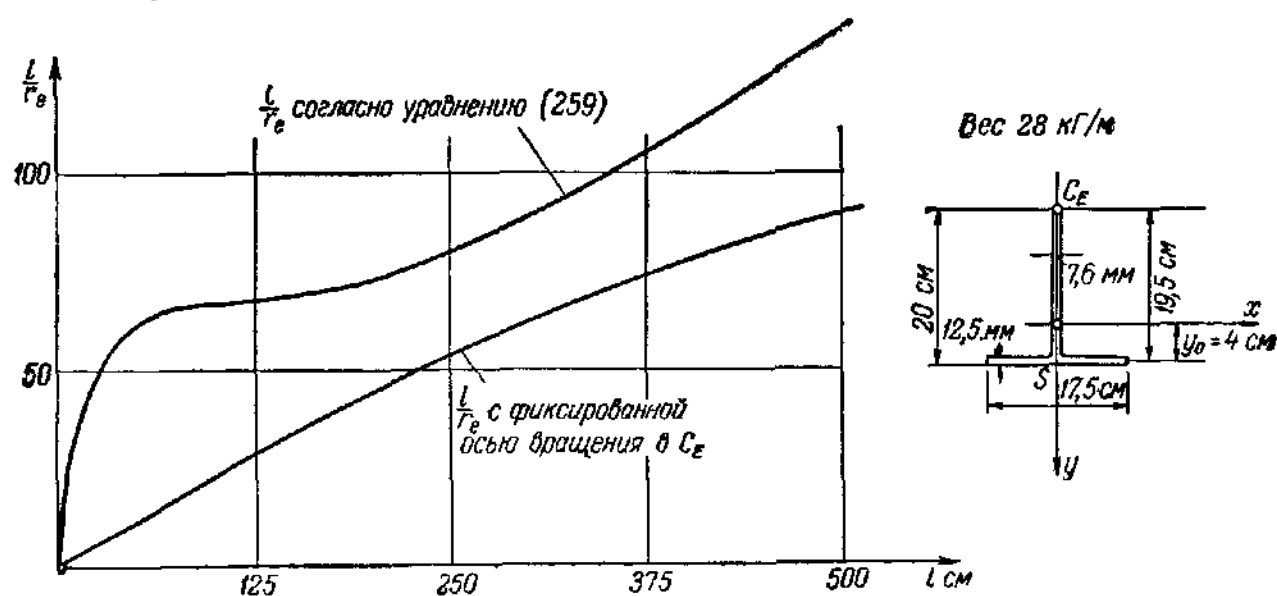


Рис. 70.

Чтобы получить значение критического напряжения, нужно подобрать  $n$  так, чтобы  $r_e$  имело минимальное значение. Из условия  $\frac{\partial r_e}{\partial n} = 0$  получим:

$$n = \frac{l}{\pi} \sqrt[4]{\frac{C}{E(\Gamma + a^2 J_y)}}.$$

Подставляя это значение в уравнение (272), получим следующее выражение для  $r_e^2$ :

$$\min r_e^2 = \frac{l^2}{\pi^2 J_{pc}} \left[ 0,0390 K \pi^2 + 2 \sqrt{\frac{(\Gamma + a^2 J_y) C}{E}} \right]. \quad (273)$$

Необходимо заметить, что значение  $\min r_e^2$  [согласно уравнению (273)] не зависит от числа полуволн  $n$ , а также то, что в результате пропорциональности  $\min r_e^2$  величине  $l^2$  гибкость и критическое



напряжения не зависят от длины  $l$ . Подобная независимость от  $n$  и  $l$  неоднократно имеет место при расчете критических напряжений сжатых прямоугольных пластин (см. гл. IX, стр. 321).

На рис. 70 показаны значения  $l/r_e$ , которые выведены в соответствии с уравнением (269) для тавра, свободно вращающегося вокруг нижнего конца стенки. Для сравнения на рис. 70 приведены также значения  $l/r_e$ , рассчитанные на основе уравнения (259) для сжатого стержня, который не вращается вокруг точки  $C_E$ , но может свободно выпучиваться. Различие в несущей способности двух сжатых стержней очень существенно: сжатый стержень с фиксированной осью вращения может нести большую нагрузку.

На рис. 71 показано типичное перемещение поперечного сечения каждого из двух сжатых стержней.

На рис. 71, а поперечное сечение должно вращаться вокруг точки  $C_E$ ; на рис. 71, б поперечное сечение вращается вокруг точки  $C$ , координаты которой даны уравнением (261). В свободном стержне основание стенки имеет тенденцию перемещаться вперед полки; на рис. 71, а это перемещение предотвращено внешними реакциями  $H$ , действующими в точке  $C_E$ . Эти внешние реакции противостоят перемещению сжатого стержня в целом и являются причиной повышения критической силы.

Наличие реакций  $H$ , распределенных вдоль фиксированной линии вращения, видоизменяет задачу. В результате действия сил  $H$  стенка будет изгибаться и деформация стенки может влиять на критическую силу сжатого стержня. Эта задача будет рассмотрена в следующем параграфе.

Более общий случай несимметричных ребер жесткости, присоединенных к гибкому листу, рассмотрен в работе Гудьера<sup>1)</sup>; на основе полученных им результатов можно определить критическое напряжение ребер жесткости швеллерного и Z-образного поперечного сечения.

#### 44. Влияние деформаций стенки на крутильное выпучивание тавровых ребер жесткости

На рис. 72, а показан тавр в его первоначальном и отклоненном положениях. Оси  $x$  и  $y$  являются главными осями поперечного сечения в его первоначальном положении. Кроме осей  $x$  и  $y$  используем систему координат  $\xi$  и  $\eta$ , связанную с поперечным сечением и

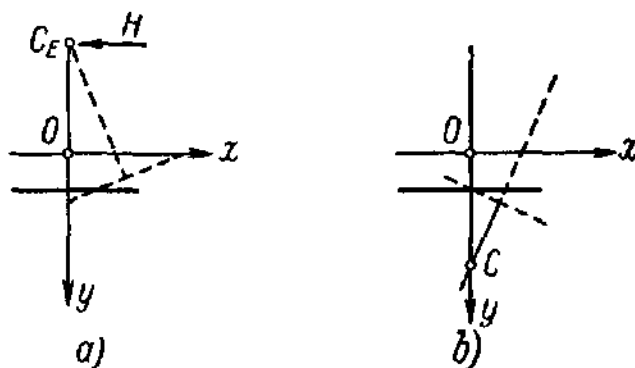


Рис. 71.

<sup>1)</sup> Гудьер, цит. выше, стр. 123.

совпадающую с осями  $x$  и  $y$  в недеформированном положении. В результате перемещения поперечного сечения  $\xi$  остается параллельной полке, а  $\eta$  пройдет через перемещенный центр сдвига  $S'$ . Средняя линия стенки в отклоненном положении искривлена, и максимальный прогиб стенки равен  $\delta$ .

Деформации определяются перемещениями  $u$  и  $v$  центра сдвига, углом закручивания  $\beta$  и прогибом стенки  $\delta$ . Перемещения  $u$  и  $v$  измеряются параллельно осям  $\xi$  и  $\eta$ , а  $\beta$  является положительной

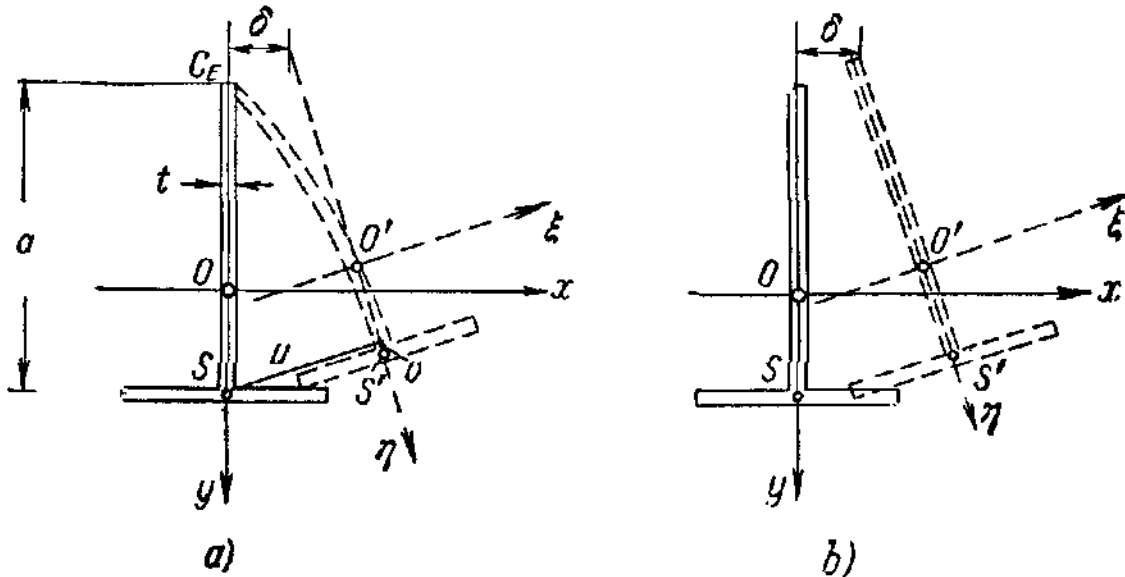


Рис. 72.

величиной в случае, если вращение происходит по движению часовой стрелки. Так как рассматриваются только малые деформации, имеем следующие соотношения:

$$v = 0, \quad \delta = u + a\beta. \quad (274)$$

Если стенки не деформируются, отклоненное положение поперечного сечения будет таким, каким оно показано на рис. 72, *b*. Энергию деформации  $V$ , соответствующую данному деформированному положению, можно вывести из уравнения (235), полагая  $v = 0$ :

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l (E\tau u'^2 + E\tau \Gamma \beta'^2 + G\tau K \beta'^2) dz. \quad (275)$$

Энергия деформации сжатого стержня с деформированной стенкой будет соответствовать выражению (275) плюс некоторый член, представляющий собой добавочную энергию деформации стенки.

Энергия деформации, накопленная в элементе стенки толщиной  $t$ , рассматриваемой как консольный стержень длиной  $a$ , будет

$$dV = \frac{1}{2} \frac{Et^3 \delta^2}{4a^3} dz.$$

Если взять сжатый стержень, напряженный выше предела упругости, то значение  $E$  можно приближенно заменить на  $E\tau$ ; подставляя из уравнения (274) значение  $\delta = u + a\beta$ , для полной энергии деформации получим следующее выражение:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ E\tau J_y u''^2 + E\tau \Gamma \beta''^2 + G\tau K \beta'^2 + E\tau \frac{t^3}{4a^3} (u + a\beta)^2 \right] dz. \quad (276)$$

Полная потенциальная энергия сжатого стержня состоит из энергии деформации  $V$  и потенциальной энергии внешних сил. Вывод значения последней энергии, описанный в § 39, остается в силе, за исключением уравнений (239), (242) и (243). Уравнения (239) определяют перемещения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  элементов поперечного сечения. Вследствие деформации стенки, для полки и стенки применяются различные уравнения. Для полки остаются в силе уравнения (239) и, полагая  $v = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y = y_0$ , имеем:

$$\Delta x = u \quad \text{и} \quad \Delta y = -(x_0 - x)\beta. \quad (277)$$

Перемещения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  стенки равны

$$\Delta x = u + (y_0 - y)\beta - \delta \left( \frac{y_0 - y}{a} \right)^2 \left( \frac{3}{2} - \frac{y_0 - y}{2a} \right) \quad \text{и} \quad \Delta y = 0, \quad (278)$$

где последний член в выражении для  $\Delta x$  представляет собой прогиб стенки, рассматриваемой как консольная балка, находящаяся под действием сосредоточенной силы. Подставляя эти выражения в уравнения (238) и (240), получим следующее выражение для потенциальной энергии внешних сил:

$$U_w = -\frac{1}{2} \int_0^l \left[ \sigma \left( A - \frac{18}{35} ta \right) u'^2 + 2\sigma \left( Ay_0 - \frac{29}{70} ta^2 \right) u'\beta' + \right. \\ \left. + \sigma \left( J_p - \frac{11}{35} ta^3 \right) \beta'^2 \right] dz, \quad (279)$$

где  $J_p$  — полярный момент инерции поперечного сечения относительно центра сдвига.

Полная потенциальная энергия равна сумме выражений (276) и (279):

$$U = V + U_w = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ E\tau J_y u''^2 + E\tau \Gamma \beta''^2 + G\tau K \beta'^2 + E\tau \frac{t^3}{4a^3} (u + a\beta)^2 - \right. \\ \left. - \sigma \left( A - \frac{18}{35} ta \right) u'^2 - 2\sigma \left( Ay_0 - \frac{29}{70} ta^2 \right) u'\beta' - \sigma \left( J_p - \frac{11}{35} ta^3 \right) \beta'^2 \right] dz. \quad (280)$$

Согласно теореме о стационарном значении потенциальной энергии интеграл в уравнении (280) должен иметь минимальное значение, что приводит к следующим двум уравнениям Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} E\tau J_y u^{IV} + \sigma \left( A - \frac{18}{35} ta \right) u'' + \frac{E\tau t^3}{4a^3} u + \\ + \sigma \left( Ay_0 - \frac{29}{70} ta^2 \right) \beta'' + \frac{E\tau t^3}{4a} \beta = 0; \\ \sigma \left( Ay_0 - \frac{29}{70} ta^2 \right) u'' + \frac{E\tau t^3}{4a^3} u + E\tau \Gamma \beta^{IV} + \\ + \left[ \sigma \left( J_p - \frac{11}{35} ta^3 \right) - G\tau K \right] \beta'' + \frac{E\tau t^3}{4a} \beta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (281)$$

Решения уравнений (281) для сжатых стержней с шарнирными концами имеют следующий вид:

$$u = C_1 \sin \frac{n\pi z}{l}; \quad \beta = C_2 \sin \frac{n\pi z}{l}. \quad (282)$$

Подставляя эти выражения в дифференциальные уравнения, получим два однородных уравнения относительно  $C_1$  и  $C_2$ . Решения, отличные от нуля, возможны только тогда, когда детерминант, составленный из коэффициентов этих уравнений, равен нулю. Отсюда можно определить значения  $\sigma$ , при которых имеют место решения (282). Выражая  $\sigma$  через эквивалентный радиус инерции  $r_e$ , получим:

$$\sigma = \frac{\pi^2 E\tau}{(l/r_e)^2}, \quad (283)$$

где  $r_e^2$  можно найти из следующего квадратного уравнения:

$$\begin{aligned} \left[ Ar_y^2 - \left( A - \frac{18}{35} ta \right) \frac{r_e^2}{n^2} + \frac{t^3}{4\pi^4 a^3} \left( \frac{l}{n} \right)^4 \right] \times \\ \times \left[ \Gamma + 0,0390K \left( \frac{l}{n} \right)^2 - \left( J_p - \frac{11}{35} ta^3 \right) \frac{r_e^2}{n^2} + \frac{t^3}{4\pi^4 a} \left( \frac{l}{n} \right)^4 \right] - \\ - \left[ \left( Ay_0 - \frac{29}{70} ta^2 \right) \frac{r_e^2}{n^2} - \frac{t^3}{4\pi^4 a^2} \left( \frac{l}{n} \right)^4 \right]^2 = 0. \end{aligned} \quad (284)$$

Наименьшее значение критического напряжения получим из уравнения (284) при условии, если число полуволн  $n$ , по которым выпучивается сжатый стержень, выбрано так, что эквивалентный радиус инерции  $r_e$  имеет минимальное значение.

Члены, содержащие  $t$  в уравнении (284), выражают влияние гибкости стенки. Можно доказать, что в пределе, когда  $t^3 (l/n)^4 \rightarrow \infty$ , уравнения (284) и (269) имеют один и тот же корень  $r_e$ .

На рис. 73 приведены значения эквивалентных гибкостей  $l/r_e$  для тавра ST8W20 при  $n = 1, 2, 3$ . Соответствующие кривые для

$n = 1, 2, 3, \dots$  подобны друг другу, но искривлены в направлении  $l$ . При значении длины до 55 см сжатый стержень выпучится по одной полуволне; для более длинных сжатых стержней эквивалентная гибкость  $l/r_e$  для выпучивания по двум полуволнам больше, чем по одной полуволне, поэтому сжатый стержень выпучится по двум полуволнам. При дальнейшем возрастании длины сжатый стержень выпучится по трем полуволнам, пока значение длины не достигнет приблизительно 127,5 см. В этом случае величина гибкости  $l/r_e$

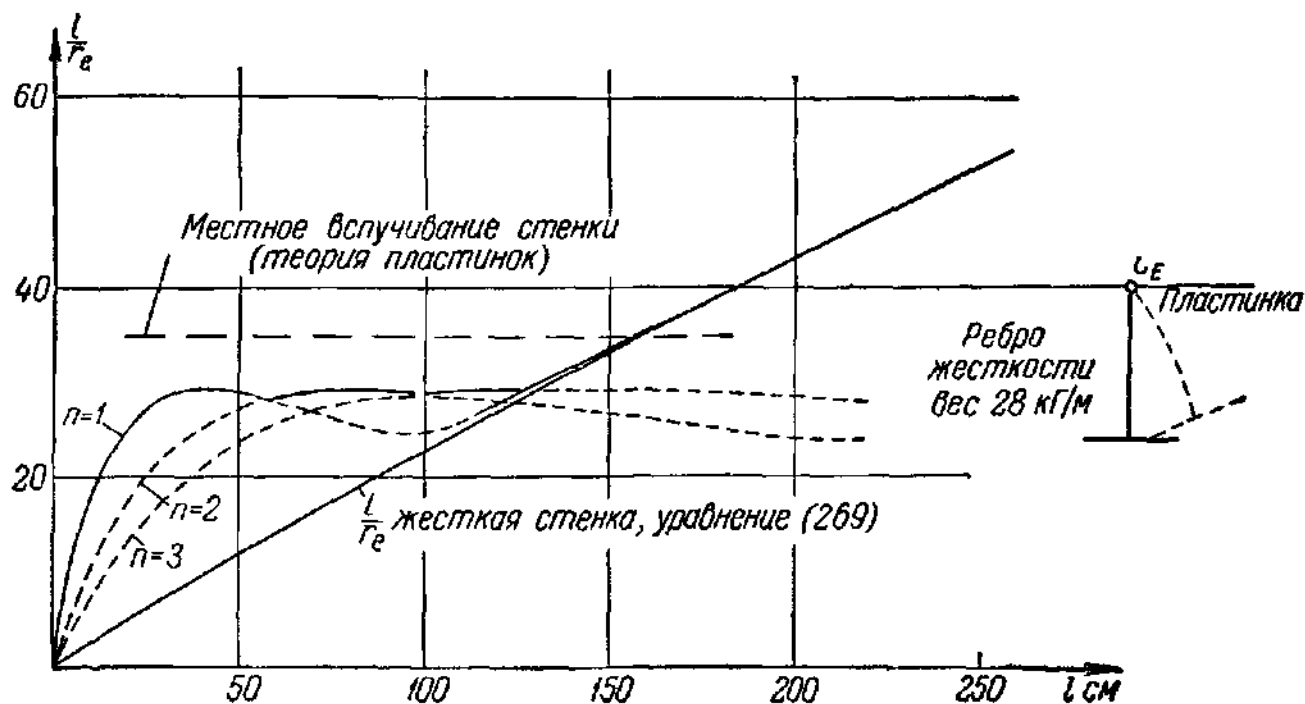


Рис. 73.

при выпучивании по одной полуволне опять становится критической и для всех больших значений  $l$  выпучивание происходит по одной полуволне. На рис. 73 указаны также значения  $l/r_e$ , соответствующие уравнению (269) и относящиеся к выпучиванию с жесткой стенкой. При  $l > 127,5$  см практически нет никакого различия между результатами, полученными на основе уравнений (269) и (284) для  $n = 1$ . В случае коротких стержней значения  $l/r_e$  резко отличаются друг от друга и критическое напряжение становится значительно меньшим, если учитывать деформации стенки.

В случае, когда  $l < 127,5$  см, выпучивание происходит по очень коротким полуволнам, длиной всего лишь в 37,5 см. Перемещения  $u$  и  $\beta$  определялись из дифференциальных уравнений (281), причем было найдено, что при выпучивании по коротким волнам значение  $u$  очень мало, и деформации имеют вид, показанный на рис. 74, а. Деформации происходят главным образом в результате выпучивания стенки и кручения полки относительно своей средней линии и соответствуют, очевидно, случаю местного выпучивания. Критическую силу для местного выпучивания стенки, прикрепленной к полке, можно

определить на основе теории выпучивания пластин<sup>1)</sup>. На рис. 73 приведено эквивалентное значение  $l/r_e$ . Теория пластинок приводит к большим значениям  $l/r_e$ , чем уравнение (284); это свидетельствует о том, что местное выпучивание происходит при напряжениях, меньших, чем напряжения, полученные на основе уравнения (284). Причина этого различия становится очевидной, если сравнить искривленную форму поперечного сечения, как это показано на рис. 74, а, с деформациями поперечного сечения в результате местного выпучивания, рассчитанными по теории пластинок (рис. 75). Получим, что стенка удерживается полкой и в стенке должна существовать

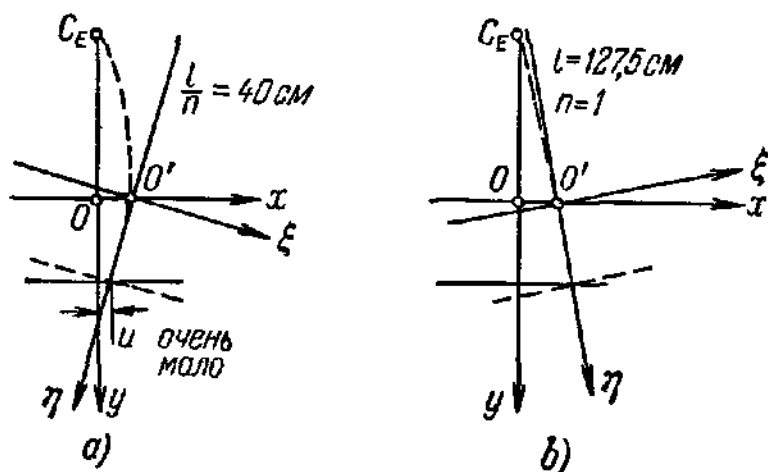


Рис. 74.



Рис. 75.

точка перегиба; это не соответствует предположению, сделанному в начале этого параграфа о том, что стенка деформируется как консольная балка, находящаяся под действием сосредоточенной силы. Следовательно, из уравнения (284) невозможно получить точные результаты в случае выпучивания по коротким волнам. С другой стороны, уравнение (284) пригодно в случае выпучивания по длинным волнам ( $n = 1$ ), где деформация происходит так, как это показано на рис. 74, б.

На основе результатов, полученных в этом параграфе, можно утверждать, что уравнение (269) пригодно для оценки первоначального выпучивания тавровых ребер жесткости, но возможность местного выпучивания стенки необходимо исследовать на основе теории пластинок.

#### 45. Экспериментальное обоснование теории

Первые опыты были проведены Вагнером и Пречнером<sup>2)</sup> для подтверждения теоретических результатов Вагнера. Опыты ставились со стержнями из алюминиевого сплава, поперечные сечения которых

<sup>1)</sup> Глава X, § 102.

<sup>2)</sup> Wagner H., Pretschner W., Verdrehung und Knickung von offenen Profilen, Luftfahrt — Forschung, 1934. Перевод в NACA Tech. Note 784, 1936,

имели вид простых уголков и уголков, снабженных фланцами. Результаты опытов показали хорошее совпадение с теорией.

Рамберг, Мак-Ферсон и Леви<sup>1)</sup> провели серию опытов над панелями из алюминиевого сплава с Z-образными ребрами жесткости. Были сделаны наблюдения над явлением крутильного выпучивания ребер жесткости, и в дальнейшем Гудьер<sup>2)</sup> сравнил результаты опытов с расчетами, полученными по его теории.

Последующая серия опытов, проведенная Найлсом<sup>3)</sup> над швеллерами из алюминиевых сплавов, показала хорошее соответствие с теорией.

Панели из листового алюминиевого сплава, подкрепленные бульбовыми уголками, были испытаны Дюнном<sup>4)</sup>.

Опыты со стойками, выполненными из тонкостенных уголков, в том числе и стальных, были проделаны Томасом<sup>5)</sup>.

Широкая серия опытов с протянутыми стержнями из алюминиевых и магниевых сплавов была недавно проведена Рамбергом и Леви<sup>6)</sup>. В ходе опытов рассматривались случаи упругого и неупругого выпучивания, причем было получено хорошее соответствие этих опытов теоретическим результатам, полученным на основе теории приведенного модуля.

Все эти опыты, за исключением опытов Томаса, были проведены со стержнями из алюминиевых и магниевых сплавов, а поперечные сечения имели форму, используемую в авиационных конструкциях. Для проверки теоретических результатов относительно крутильного выпучивания Кольбруннер<sup>7)</sup> провел серию опытов над равнобокими уголками, используя стальные образцы. Эти опыты подробно описаны в § 95 главы IX, где доказано полное соответствие их результатам, полученным на основе теории пластинок. Как было указано на стр. 124 и 158, значение критической силы сжатых

---

<sup>1)</sup> Ramberg W., McPherson A. E., Levy S., NACA Tech. Note, 684, 1939.

<sup>2)</sup> Гудьер, цит. выше, стр. 123.

<sup>3)</sup> Niles A. S., Experimental Study of Torsional Column Failure, NACA Tech. Note 733, 1939. Эти эксперименты обсуждаются также в книге: A. S. Niles and J. S. Newell, Airplane Structures, 3d ed., стр. 351, John Wiley & Sons, Inc., New York.

<sup>4)</sup> Dunn L. G., An Investigation of Sheet stiffener Panels Subjected to Compression Loads with Particular Reference to Torsionally Weak Stiffeners, NACA Tech. Note 752, 1940.

<sup>5)</sup> Thomas E. W., Torsion Instability of Thin Angle Section Struts, Structural Engr., т. 19, № 5, стр. 77, 1941.

<sup>6)</sup> Рамберг, Леви, цит. выше, стр. 146.

<sup>7)</sup> Kollbrunner C. F., Das Ausbeulen des auf Druck beanspruchten freistehenden Winkels, Mitteilungen, 4, Institut für Baustatik, Eidgenössische Technische Hochschule, Zurich, 1935; Das Ausbeulen der auf einseitigen, gleichmässig verteilten Druck beanspruchten Platten im elastischen und plastischen Bereich Mitteilungen, 17, Institut für Baustatik, Eidgenössische Technische Hochschule, Zurich, 1946.

стержней уголкового профиля, определенное на основе теории выпучивания вследствие изгиба и кручения, близко совпадает со значениями критических сил, полученных на основе теории выпучивания пластинок. Следовательно, опыты Кольбруннера подтверждают результаты, полученные в этой главе.

Опыты со стержнями, поперечное сечение которых имеет другую форму, применяемую в стальных конструкциях, не проводились. Из рис. 59, 64, 67 и 70, где показаны влияния крутильного выпучивания на различные профили, очевидно, что проведение подобных опытов имеет значение только для тавровых профилей, как это показано на рис. 64 и 70, так как в других случаях влияние крутильного выпучивания так мало, что опыты были бы неубедительными.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Pugsley A. G., Torsional Instability in Struts, Aircraft Eng., т. 4, 43, стр. 229, 1932.

Bridget F. J., Jerome C. C. and Voseller A. B., Some New Experiments on Buckling of Thin-wall Construction, Trans. ASME, т. 56, 1934.

Kuranisi M., Torsional Buckling of Centrally Loaded Thin-walled Columns, Trans. Soc. Mech. Engrs. (Japan), т. 1, 5, стр. 415, 1935 (in Japanese).

de Marneffe A., Flambage par torsion, Rev. universelle mines, т. 15, 10, стр. 501, 1939.

Арутюнян Н. Х., Приближенное решение задач о кручении стержней полигонального поперечного сечения, Прикл. матем. и механ., 1943, т. 6, № 1, стр. 19.

Goodier J. N., Torsional and Flexural Buckling of Bars of Thin-walled Open Section under Compressive and Bending Loads, Jour applied Mechanics, т. 10, стр. A-110, June, 1943.

Hoff N. J., Strain Energy Derivation of Torsional-Flexural Buckling Loads of Straight Columns of Thin-walled Open Sections, Brown University, Quart. Applied. Math., т. 1, № 4, стр. 341, июнь, 1944.

Goodier J. N., Flexural Buckling of a Twisted Bar, Quart. Applied Math., т. 2, стр. 93, 1944.

Levy S., Kroll W. D., Primary Instability of Open Section Stringers Attached to Sheet, Jour. Aeronaut. Sci., т. 15, стр. 580, 1948.



## ГЛАВА IV

### БОКОВОЕ ВЫПУЧИВАНИЕ БАЛОК

#### 46. Введение

В предыдущих главах исследовалась устойчивость центрально и внецентренно сжатых стержней. Теперь перейдем к рассмотрению более сложной задачи выпучивания, которая является обобщением описанной в главе III задачи об устойчивости сжатых стержней с тонкостенными открытыми поперечными сечениями. О тесной связи между двумя данными задачами свидетельствует тот факт, что для решения различных задач бокового выпучивания балок также можно применить основные результаты, изложенные в предыдущей главе.

Двутавровая балка, опертая на концах и нагруженная в плоскости стенки в продольном и поперечном направлениях, может выпучиваться в сторону (если она дополнительно не подкреплена), сохраняя концы *A* и *B* неподвижными (рис. 76). В случае, если

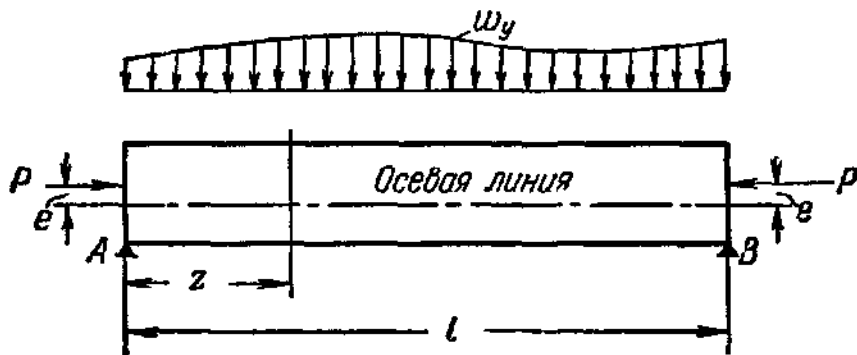


Рис. 76.

жесткость балки при изгибе в плоскости стенки значительно больше, чем ее поперечная жесткость, балка может выпучиться и разрушиться, прежде чем изгибные напряжения от поперечной нагрузки достигнут предела текучести. До тех пор, пока интенсивность нагрузки, действующей в плоскости стенки, остается ниже определенного значения, равновесие является устойчивым, т. е. при незначительном скручивании или боковом изгибе конструкции снова приобретает плоскую форму, когда сила, вызывающая эти незначительные смещения, перестает действовать. Однако с увеличением интенсивности

нагрузки восстанавливающие силы становятся все меньше и меньше, пока не будет достигнута определенная нагрузка, при которой наряду с существующей плоской формой равновесия балки возможно появление и изогнутой, и закрученной форм равновесия. Плоская форма равновесия уже не является устойчивой, и наименьшая нагрузка, при которой становится возможной такая новая форма равновесия, является критической силой балки.

Задача о боковом выпучивании балок узкого прямоугольного поперечного сечения была впервые рассмотрена Прандтлем<sup>1)</sup> и Майкеллом<sup>2)</sup>. Независимо друг от друга они опубликовали в одном и том же году теорию бокового выпучивания балок под действием поперечной нагрузки, и оба пришли, в сущности, к одинаковому результату — дифференциальному уравнению задачи, представляющему собой уравнение второго порядка с переменными коэффициентами.

Дальнейшее развитие этой проблемы принадлежит Тимошенко<sup>3)</sup>, который получил основное дифференциальное уравнение кручения симметричных двутавровых балок и на этой основе исследовал боковое выпучивание поперечно нагруженных высоких двутавровых балок. В 1913 г. Тимошенко<sup>4)</sup> решил эту частную задачу устойчивости, приводя ее для иллюстрации применения энергетического метода, разработанного им специально для исследования задач устойчивости.

Двутавровые балки с неодинаковыми полками под одновременным действием осевого сжатия и равных концевых моментов в плоскости стенки были впервые рассмотрены Блейхом<sup>5)</sup>, который установил условие устойчивости в общем виде, пригодное как в упругой, так и в пластической областях напряжений при потере устойчивости. Эта теория была также применена к задаче о расчете двутавровых балок, растянутые полки которых были закреплены против бокового смещения, т. е. к задаче выпучивания с фиксированной осью вращения.

---

<sup>1)</sup> Prandtl L., Kipperscheinungen, Thesis, Munich, 1899.

<sup>2)</sup> Michell A. G. M., Elastic Stability of Long Beams under Transverse Force, Phil. Mag. т. 48, стр. 298, 1899.

<sup>3)</sup> Timoschenko S., Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie, Zeitschrift für Mathematik und Physik, т. 58, стр. 337, 1910. Опубликована впервые на русском языке: см. Изв. Политехн. ин-та, С.-Петербург, 1905, 1906, т. 4 и 5. См. также Timoschenko, Beams without Lateral Support, Trans. ASCE, т. 87, стр. 1247, 1924; «Theory of Elastic Stability», гл. V, стр. 273, McGraw-Hill Book Company, Inc., New-York, 1936; русский перевод: Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, 1955, стр. 265.

<sup>4)</sup> Timoschenko S., Sur la stabilité des systèmes élastiques, Annales des ponts et chaussées, 1913, ч. III, IV, V.

<sup>5)</sup> Bleich F., Stahlhochbauten, т. II, стр. 925, Julius Springer, Berlin, 1933.

В 1935 г. Штусси<sup>1)</sup> предложил применить метод последовательных приближений для решения задачи устойчивости прямоугольных и двутавровых балок под действием поперечной нагрузки. Он использовал этот метод для некоторых типичных условий нагружения и получил простые формулы, применимые для практики.

В 1939 г. Хвалла<sup>2)</sup> опубликовал обзор, в котором охватывались все стороны этой проблемы. Его исследование ограничивается рассмотрением симметричных двутавровых сечений и содержит детальное и критическое изучение некоторых специальных задач в области бокового выпучивания, большинство из которых было уже решено предыдущими исследователями. В частности, им был детально исследован критерий устойчивости упруго заделанных на концах балок под совместным действием осевого давления и чистого изгиба. Однако автор этой книги не признавал некоторых ограничений в вопросе о возможности применения дифференциальных уравнений равновесия, которые лежат в основе исследования Хвалла, к гибким стержням, вследствие чего теория балок, находящихся под совместным действием изгиба и осевой нагрузки, не получила законченной формы; решения, приведенные в статье, не являются вполне правильными и не согласуются с решениями, полученными другими исследователями.

В 1941 г. Винтер<sup>3)</sup> дал приближенные формулы для задачи о боковом выпучивании несимметричных двутавровых балок, которые он получил на основе применения энергетического метода Рэля. Автором этой книги также было исследовано выпучивание прямоугольных и несимметричных двутавровых балок, растянутые полки которых были закреплены против бокового смещения. Х. Н. Хилл<sup>4)</sup> дал наиболее законченную форму решения задачи о боковом выпучивании несимметричных двутавровых балок при чистом изгибе.

Обширное исследование задачи о боковом выпучивании проведено Гудьером<sup>5)</sup>, который при помощи логически распространенной на данный случай теории выпучивания сжатых стержней действием кручения и изгиба получил решение общей задачи устойчивости тонкостенных стержней открытого профиля под одновременным

---

<sup>1)</sup> Stüssi F., Die Stabilität des auf Biegung beanspruchten Trägers, Pubs. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., т. 3, стр. 401, 1935.

<sup>2)</sup> Chwalla E., Die Kipp-Stabilität gerader Träger mit doppelt symmetrischem I-Querschnitt, Forschungshefte auf dem Gebiete des Stahlbaues, № 2, Berlin, 1939.

<sup>3)</sup> Winter G., Lateral Stability of Unsymmetrical I-beams and Trusses in Bending, Trans. ASCE, стр. 247, 1943.

<sup>4)</sup> Hill H. N., The Instability of Unsymmetrical I-beams, Jour. Aeronaut. Sci., т. 9, стр. 175, 1942.

<sup>5)</sup> Goodier J. N., Flexural — Torsional Buckling of Bars of Open Sections, under Bending, Eccentric Thrust or Torsional Loads, Cornell Univ. Eng. Exp. Sta. Bull. 28, Ithaca, N. Y., 1942.

действием сжатия, изгиба и кручения. Гудьер в своем исследовании не вводит каких-либо ограничений, связанных с симметричностью поперечного сечения, но рассматривает только влияние продольных сил и концевых моментов. В работе не затрагивается задача о балках, находящихся под действием поперечной нагрузки.

Врис<sup>1)</sup> установил простые правила для прокатных двутавровых балок. Критическое напряжение при упругом выпучивании выражается в функции одного параметра  $ld/bt$ , где  $l$  и  $d$  обозначают соответственно длину и высоту балки, а  $b$  и  $t$  — размеры полки. Естественно, что такое элементарное решение даст лишь приближенные результаты, однако предложенная формула корректна и пригодна для целей проектирования.

Выдвигалось много предложений, облегчающих возможность определения критического состояния, когда в момент выпучивания предел пропорциональности превзойден в наиболее напряженном волокне. За исключением случаев одновременного действия осевого сжатия и чистого изгиба, когда имеется возможность рационального учета влияния переменного модуля упругости, эта задача не имеет приемлемого точного теоретического решения. Необходимы общие упрощающие предположения для переноса результатов, полученных при упругом выпучивании, на случай пластического выпучивания. Тимошенко<sup>2)</sup>, Штусси<sup>3)</sup> и Хвалла<sup>4)</sup> занимались этой проблемой, не получившей до сих пор удовлетворительного решения.

Майкелл, разработавший в 1899 г. теорию прямоугольных балок, приводит в своей статье совпадающие с теоретическими данными результаты опытов, проведенных со стальными образцами.

В 1913 г. Мур<sup>5)</sup> провел испытания на разрушение балок при боковом выпучивании, которые представляли собою часть из ряда поставленных им опытов для вычисления изгибной прочности стандартных двутавровых балок. Аналогичные опыты для легких балок были проделаны Кетчумом и Драффином<sup>6)</sup> в 1932 г. Результаты этих опытов дают преувеличенное значение критических напряжений и совершенно не совпадают с теоретическими данными. Нагрузочное устройство, показанное на рис. 2 и 10 в статье Кетчума и Драф-

---

<sup>1)</sup> De Vries K., Strength of Beams as Determined by Lateral Buckling, Trans. ASCE, т. 112, стр. 1245, 1957.

<sup>2)</sup> Timoshenko S., Beams without Lateral Support, Trans. ASCE, т. 87, стр. 1247, 1924; см. также «Theory of Elastic Stability», гл. V, стр. 273, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1936; русский перевод: Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, 1955, гл. 5, стр. 284.

<sup>3)</sup> Штусси, цит. выше, стр. 175.

<sup>4)</sup> Хвалла, цит. выше, стр. 175.

<sup>5)</sup> Moore H. F., The Strength of I-Beams in Flexure, Univ. Illinois Bull. 68, стр. 20, 21, 1913.

<sup>6)</sup> Ketchum M. S., Draffin J. O., Strength of Light I-Beams, Univ. Illinois Bull. 241, стр. 25, 26, 1932.

фина, заставляет предположить, что вместо свободного выпучивания, передача сил на балку в процессе опыта такова, что происходит вращение ее концов вокруг сферических блоков, а не свободное выпучивание. Учитывая, что нагрузочное устройство вызывает некоторые ограничения деформации и само является неустойчивым, сами исследователи в ранних опытах заменили сферические блоки, служащие для передачи нагрузки к верхним полкам балок, цилиндрами. Вышеописанные опыты важно было бы повторить в условиях, исключающих сомнения относительно этого метода опирания.

В дальнейшем в этой области не проводилось экспериментальных исследований вплоть до 1937 г., когда Дюмон и Хилл<sup>1)</sup> сообщили о серии опытов, проделанных с прямоугольными балками из алюминиевого сплава. Результаты, полученные в упругой области, целиком подтверждаются теорией. Эти исследователи провели также опыты на боковое выпучивание двутавровых балок из алюминиевого сплава 24ST при чистом изгибе, выявив при этом соответствие теоретических данных с результатами экспериментов<sup>2)</sup>.

Необходимо также упомянуть о рассмотренных в главе I тщательно поставленных опытах Джонсона и Чини<sup>3)</sup> в связи с тем, что часть этих опытов была проведена с двутавровыми сжатыми стержнями, эксцентрично нагруженными в плоскости стенки. Этот способ нагружения является основным для случаев бокового выпучивания в случае одновременного действия чистого изгиба и осевого сжатия. К сожалению, результаты этих экспериментов не получили правильной интерпретации в свете точной теории и не рассматривались с должным учетом действительных условий закрепления концов стержней.

В дальнейшем мы рассмотрим в общем виде задачу о боковом выпучивании, используя данные, полученные в предыдущей главе. Таким образом, будет создана общая база, на основе которой можно критически рассмотреть каждую частную задачу. Следуя методу, изложенному в главе III, можно вывести общее выражение потенциальной энергии балки в состоянии сжатия, изгиба и кручения, которое может служить основным уравнением для применения теоремы о стационарном значении потенциальной энергии. Получив выражение для потенциальной энергии, можно или вывести из него дифференциальные уравнения для любой конкретной задачи, или использовать его вместе с методом Ритца для приближенного решения частной задачи о выпучивании. В связи с тем, что в прошлом

---

<sup>1)</sup> Dumont C., Hill H. N., The Lateral Stability of Deep Rectangular Beams, NACA Tech. Note 601, 1937.

<sup>2)</sup> Dumont C., Hill H. N., The Lateral Stability of Equal Flanged Aluminum Alloy I — Beams Subjected to Pure Bending, NACA Tech. Note 770, 1940.

<sup>3)</sup> Johnston B. G., Cheney L., Steel Columns of Rolled Wide Flange Section, Committee on Tech. Research, Am. Inst. Steel Construction, Progress Rept. 2, 1942.

оба метода использовались разными исследователями, у нас имеется полная возможность для того, чтобы на основе общей теоретической базы легко получить для каждого случая соответствующие уравнения задачи.

#### 47. Боковое выпучивание двутавровых балок под действием осевой и поперечной нагрузок

Рассмотрим балку  $AB$  длиной  $l$  (рис. 76), нагруженную в плоскости стенки эксцентричной осевой силой  $P$  и распределенной поперечной нагрузкой  $w_y$ . Сосредоточенные поперечные нагрузки можно рассматривать как частный случай этого общего вида нагружения.

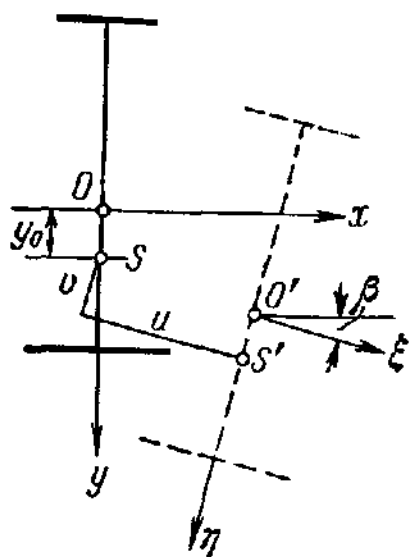


Рис. 77.

Как и в главе III,  $x$  и  $y$  являются главными осями двутаврового сечения, которое вообще имеет неодинаковые полки. Координаты центра сдвига обозначим через  $x_0$  и  $y_0$ , однако вследствие симметрии относительно оси  $y$  имеем  $x_0 = 0$ ;  $u$  и  $v$  являются компонентами перемещения центра сдвига параллельно осям  $\xi$  и  $\eta$  (рис. 77).

Исследование основывается на следующих предположениях:

1. Балка имеет постоянное поперечное сечение.
2. Напряжения в волокнах, вызванные внешней нагрузкой, не превосходят предел пропорциональности в момент выпучивания.
3. Балка деформируется так, что под действием изгиба и кручения форма ее поперечного сечения остается неизменной.
4. При перемещении точек приложения внешних нагрузок направление действия внешних сил сохраняется.

Рассмотрим балку в ее сжато-изогнутом состоянии непосредственно перед выпучиванием и найдем выражение для изменения потенциальной энергии, вызванной боковым перемещением и кручением балки при выпучивании.

Потенциальная энергия  $U$  состоит из внутренней энергии деформации  $V$  деформированной балки и потенциальной энергии внешних сил  $P$  и  $w_y$ . Для энергии деформации  $V$  применим уравнение (213) главы III, где следует опустить члены  $EJ_x v''^2$  и  $EA \varepsilon^2$ , представляющие энергию деформации изгиба и сжатия перед выпучиванием

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l (EJ_y u''^2 + EI \beta''^2 + GK \beta'^2) dz. \quad (285)$$

Вычислим потенциальную энергию внешних сил отдельно для вертикальных нагрузок  $w_y$  и отдельно для осевых сил  $P$ . Чтобы определить потенциальную энергию  $\bar{U}_w$  силы  $P$ , мы рассуждаем так же, как и при получении уравнения (242) главы III. Как показано на рис. 76, сила  $P$  имеет эксцентриситет  $e$ , который считается положительным при  $P$ , действующем выше центра тяжести; распределение напряжений, полученное от такого нагружения на торцах, равно

$$\sigma = \frac{P}{A} - \frac{eP}{J_x} y, \quad (286)$$

где положительные значения  $\sigma$  соответствуют сжатию. Работа, совершаемая напряжением  $\sigma$ , действующим на элемент площади  $dA$ , определяется уравнением (236), где  $E_t$  должно быть заменено на  $E$ , так как мы рассматриваем выпучивание только в упругой области:

$$d\bar{U}_w = -\sigma dA \left( \delta_c + \frac{1}{E} \int_0^l \Delta\sigma_z dz \right). \quad (287)$$

$\Delta\sigma_z$  есть изменение напряжения вследствие выпучивания, как и в главе III, а через  $\delta_c$  обозначено здесь добавочное укорочение волокон, вызванное деформацией при боковом выпучивании. Интегрируя по всей площади  $A$  поперечного сечения концов балки, получим:

$$\bar{U}_w = - \int_A \sigma \delta_c dA - \frac{1}{E} \int_0^l \left( \int_A \sigma \Delta\sigma_z dA \right) dz. \quad (288)$$

Изменения напряжений  $\Delta\sigma_z$  должны быть такими, чтобы их результирующая сила, параллельная оси  $z$ , и их результирующий момент относительно оси  $x$  были равны нулю:

$$\int_A \Delta\sigma_z dA = 0 \quad \text{и} \quad \int_A y \Delta\sigma_z dA = 0. \quad (289)$$

Подставляя уравнение (286) в уравнение (288) и принимая во внимание (289), находим, что второе слагаемое в уравнении (288) равно нулю:

$$\bar{U}_w = - \frac{P}{A} \int_A \delta_c dA + \frac{eP}{J_x} \int_A y \delta_c dA. \quad (290)$$

Уравнение (240) главы III выражает полное укорочение волокон от ненагруженного состояния до выпученного состояния балки; следовательно, подставляя уравнения (240) в (290), получим выражение для полного изменения потенциальной энергии, отсчитываемое от ненагруженного состояния. Используя еще уравнения (239)

и (241), получим:

$$\bar{U}_w = -\frac{1}{2} \int_0^l \left[ P(u'^2 + v'^2) + 2P(y_0 + e)u'\beta' + \right. \\ \left. + P\left(\frac{J_p}{A} + e\frac{Z}{J_x}\right)\beta'^2 \right] dz, \quad (291)$$

где  $Z$  определяется выражением

$$Z = 2y_0J_x - \int_A y(x^2 + y^2) dA. \quad (292)$$

Величина  $Z$  отражает особенность поперечного сечения балки: если оно симметрично относительно оси  $x$ , то  $Z$  равняется нулю.

Из уравнения (291), полагая  $u' = \beta' = 0$ , можно получить изменение потенциальной энергии от ненагруженного состояния до изогнутого состояния непосредственно перед выпучиванием; таким образом, получается хорошо известная формула

$$\bar{U}_w = -\frac{1}{2} \int_0^l P v'^2 dz. \quad (293)$$

Разность выражений (291) и (293) даст нам требуемое изменение потенциальной энергии в момент выпучивания

$$\bar{U}_w = -\frac{1}{2} \int_0^l \left[ P u'^2 + 2P(y_0 + e)u'\beta' + \right. \\ \left. + P\left(\frac{J_p}{A} + e\frac{Z}{J_x}\right)\beta'^2 \right] dz. \quad (294)$$

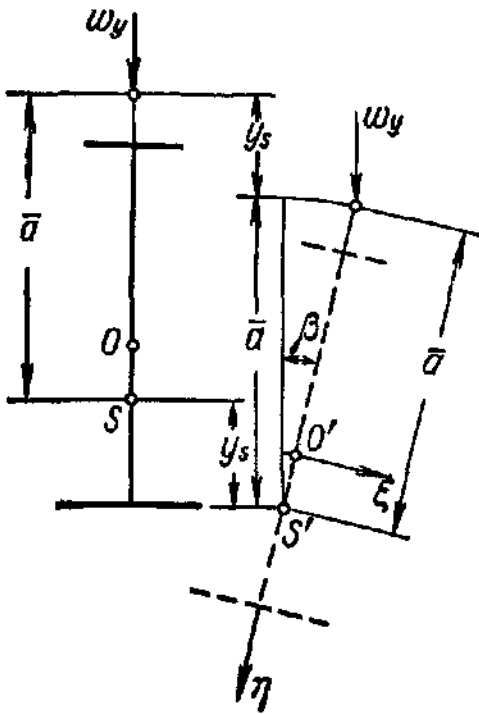


Рис. 78.

Для определения потенциальной энергии  $\bar{U}_w$  нагрузки  $w_y$  рассмотрим рис. 78.

Поперечное сечение показано в его первоначальном и деформированном положении. Для определения поведения сил  $w_y$  мы в начале этого параграфа предполагали, что линии действия этих сил остаются параллельными их первоначальному направлению. Из рис. 78 видно, что силы действуют в поперечном сечении в точке на расстоянии  $\bar{a}$  от центра сдвига. Если через  $y_s$  обозначить вертикальную составляющую перемещения центра сдвига, то изменение потенциальной энергии будет равно взятой со знаком минус работе сил  $w_y$ . Точки приложения сил опускаются на рас-



стояние, равное  $y_s + \bar{a}(1 - \cos \beta)$ ; так как  $\beta$  мало, то  $1 - \cos \beta = \beta^2/2$ , и мы получим:

$$\bar{U}_w = - \int_0^l w_y y_s dz - \frac{\bar{a}}{2} \int_0^l w_y \beta^2 dz. \quad (295)$$

Интегрированием по частям можно несколько преобразить первый интеграл в уравнении (295); обозначая через  $Q_w$  и  $M_w$  соответственно поперечную силу и изгибающий момент в свободно опертой балке длиной  $l$  под действием сил  $w_y$ , имеем соотношения:

$$\frac{dQ_w}{dz} = -w_y; \quad \frac{dM_w}{dz} = Q_w; \quad (296)$$

последовательным интегрированием по частям получим:

$$\begin{aligned} - \int_0^l w_y y_s dz &= [Q_w y_s]_0^l - \int_0^l Q_w \frac{dy_s}{dz} dz = \\ &= [Q_w y_s]_0^l - \left[ M_w \frac{dy_s}{dz} \right]_0^l + \int_0^l M_w \frac{d^2 y_s}{dz^2} dz. \end{aligned} \quad (297)$$

Первое слагаемое  $[Q_w y_s]_0^l$  равно нулю, так как на концах балки прогиб  $y_s = 0$ ; член  $\left[ M_w \frac{dy_s}{dz} \right]_0^l$  также равен нулю, так как момент  $M_w$  является изгибающим моментом свободно опертой балки и исчезает на концах балки. Таким образом, из уравнений (295) и (297) имеем:

$$\begin{aligned} \bar{U}_w &= \int_0^l M_w \frac{d^2 y_s}{dz^2} dz - \\ &- \frac{\bar{a}}{2} \int_0^l w_y \beta^2 dz. \end{aligned} \quad (298)$$

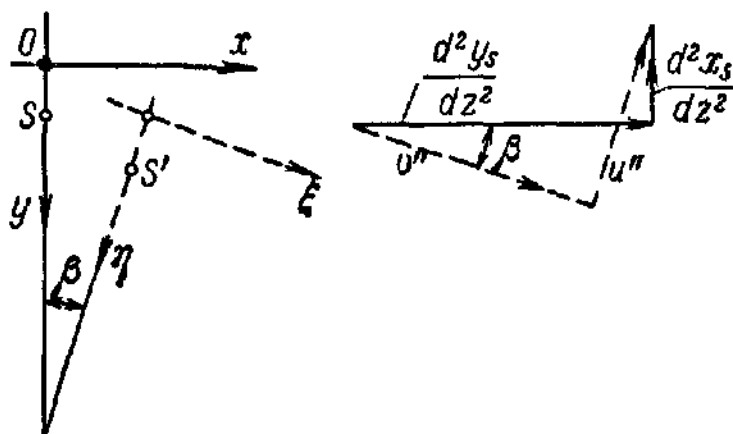


Рис. 79.

Уравнение (298) для  $\bar{U}_w$  можно видоизменить, заменяя прогиб  $y_s$  центра сдвига, параллельный к оси  $y$ , прогибами  $u$  и  $v$ , параллельными осями  $\xi$  и  $\eta$ . Член  $\frac{d^2 y_s}{dz^2}$  обозначает кривизну балки в плоскости  $yz$ ; так как все деформации малы, то эту кривизну можно рассматривать как вектор, перпендикулярный к плоскости кривизны (рис. 79). Аналогично кривизны в плоскостях  $xz$ ,  $\xi z$  и  $\eta z$  могут быть выражены соответственно через векторы  $\frac{d^2 x_s}{dz^2}$ ,  $u''$  и  $v''$ .

Ввиду малости  $\beta$   $\frac{d^2 y_s}{dz^2}$  можно выразить через  $u''$  и  $v''$  в следующем виде:

$$\frac{d^2 y_s}{dz^2} = v'' + \beta u''; \quad (299)$$

подставляя его в уравнение (298), получим:

$$\bar{U}_w = \int_0^l M_w v'' dz + \int_0^l M_w \beta u'' dz - \frac{\bar{a}}{2} \int_0^l w_y \beta^2 dz. \quad (300)$$

Уравнение (300) выражает изменение потенциальной энергии от ненагруженного состояния до выпученного состояния. Непосредственно перед выпучиванием  $\beta = u'' = 0$ , и потенциальная энергия будет

$$\bar{U}_w = \int_0^l M_w v'' dz. \quad (301)$$

Разность этих двух значений равна изменению потенциальной энергии в момент выпучивания, и окончательно имеем:

$$\bar{U}_w = \int_0^l M_w \beta u'' dz - \frac{\bar{a}}{2} \int_0^l w_y \beta^2 dz. \quad (302)$$

Во избежание недоразумения напомним еще раз, что в уравнении (302)  $M_w$  обозначает не действительный изгибающий момент в балке, а изгибающий момент свободно опертой балки, вызванный силами  $w_y$ .

Суммируя уравнения (285), (294) и (302), получим выражение полного изменения потенциальной энергии  $U$  в выпученном состоянии:

$$U = V + \bar{U}_w + \bar{U}_w = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EJ_y u''^2 + E\gamma \beta''^2 + GK \beta'^2 - P u'^2 - \right. \\ \left. - 2P(y_0 + e) u' \beta' + 2M_w u'' \beta - P \left( \frac{J_p}{A} + e \frac{Z}{J_x} \right) \beta'^2 - \bar{a} w_y \beta^2 \right] dz. \quad (303)$$

Уравнение (303) можно несколько упростить, интегрируя по частям одно из его слагаемых:

$$\int_0^l [-2P(y_0 + e) u' \beta'] dz = -2P(y_0 + e) [u' \beta]_0^l + \\ + \int_0^l 2P(y_0 + e) u'' \beta dz. \quad (304)$$

Так как при  $z=0$  или  $z=l$ ,  $\beta=0$ , то первый член равен нулю; оставшееся выражение под интегралом можно объединить с членом  $2M_w u''\beta$  уравнения (303):

$$2P(y_0 + e) u''\beta + 2M_w u''\beta = 2(P y_0 + P e + M_w) u''\beta = 2M u''\beta, \quad (305)$$

где

$$M = M_w + P y_0 + P e. \quad (306)$$

Из уравнения (306) видно, что  $M$  равно моменту внешних сил  $w_y$  и  $P$  относительно оси, проходящей через центр сдвига, параллельной оси  $x$ . Этот момент  $M$  отличается от обычного изгибающего момента в балке относительно оси  $x$ , проходящей через центр тяжести. Если поперечное сечение симметрично и  $y_0=0$  или если  $P=0$ , это различие исчезает и  $M$  становится равным обычному изгибающему моменту.

Окончательное выражение потенциальной энергии имеет следующий вид:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ E J_y u''^2 + E T \beta''^2 + G K \beta'^2 - P u'^2 + 2M u''\beta - \right. \\ \left. - P \left( \frac{J_p}{A} + \frac{eZ}{J_x} \right) \beta'^2 - \bar{a} w_y \beta^2 \right] dz. \quad (307)$$

Применение теоремы о стационарном значении потенциальной энергии к уравнению (307) даст нам критерий устойчивости для выпучивания балки. Вместо использования уравнения (307) для нахождения критической силы методом Ритца (или каким-нибудь другим аналогичным методом) мы применим основы вариационного исчисления и получим дифференциальные уравнения задачи.

Согласно главе II уравнения Эйлера имеют вид:

$$E J_y u^{IV} + P u'' + \frac{d}{dz^2} (M \beta) = 0; \quad (308a)$$

$$E T \beta^{IV} + \left( P \frac{J_p}{A} - G K + e P \frac{Z}{J_x} \right) \beta'' - \bar{a} w_y \beta + M u'' = 0. \quad (308b)$$

Уравнение (308a) можно дважды проинтегрировать

$$E J_y u'' + P u + M \beta = C_1 + C_2 z, \quad (309)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  являются произвольными постоянными. При обычных граничных условиях на обоих концах балки  $u = u'' = \beta = 0$  постоянные  $C_1 = C_2 = 0$ , и дифференциальные уравнения примут вид

$$E J_y u'' + P u + M \beta = 0; \quad (310a)$$

$$E T \beta^{IV} + \left( P \frac{J_p}{A} - G K + e P \frac{Z}{J_x} \right) \beta'' - \bar{a} w_y \beta + M u'' = 0. \quad (310b)$$

#### 48. Балка под действием только осевых сил

Если на балку не действует поперечная нагрузка, а действует только осевая нагрузка  $P$  с эксцентриситетом  $e$  в плоскости стенки, то из уравнений (310), имея в виду, что  $w_y = 0$  и  $M = P(y_0 + e)$ , получим:

$$EJ_y u'' + Pu + P(y_0 + e)\beta = 0; \quad (311a)$$

$$E\gamma\beta^{IV} + \left(P \frac{J_p}{A} - GK + eP \frac{Z}{J_x}\right)\beta'' + P(y_0 + e)u'' = 0. \quad (311b)$$

При центрально действующей нагрузке ( $e = 0$ ) эти уравнения совпадают с уравнениями (255) главы III для крутильного выпучивания балок с поперечными сечениями, имеющими одну ось симметрии.

Мы можем также сравнить уравнения (311) с результатами Гудьера<sup>1)</sup>; полученные им дифференциальные уравнения являются более общими, так как им не использовалось свойство симметрии поперечного сечения, а нагрузка в направлениях  $x$  и  $y$  была приложена эксцентрично. Множители  $eP$  и  $P(y_0 + e)$  и  $Z$  в уравнениях (311) соответствуют  $M_2$ ,  $M_2 - Py$  и  $k_2$  в формулах Гудьера. Множитель  $Z$  встречается только при несимметричных сечениях и не был получен другими исследователями. Интересно отметить, что этот член был получен нами, исходя из энергетического метода, тогда как Гудьер установил его независимо от соображений равновесия.

Уравнения (311) можно также сравнить с результатами Хвалла<sup>2)</sup>, который получил дифференциальное уравнение шестого порядка относительно  $\beta$ . Если из уравнений (311) исключить  $u$  и вследствие предполагаемой симметрии положить  $z = 0$ , то полученное уравнение все же отличается от результата Хвалла, так как члены, содержащие выражение  $PJ_p/A$  в уравнении (311), в его формуле отсутствуют. Относительно члена  $PJ_p/A$  не может быть сомнения, так как он встречается не только в решении Гудьера, но и в теории крутильного выпучивания сжатых стержней. Отсутствие этого члена в уравнении Хвалла не является ошибкой, но обусловлено тем, что он заменил балку линейным телом, имеющим изгибную и крутильную жесткости, тогда как в действительности балка является трехмерным телом.

Если балка шарнирно оперта и не скручивается на концах, то можно найти простые решения уравнений (311). В этом случае мы имеем следующие граничные условия:  $u = u'' = \beta = 0$ . Легко видеть, что выражения

$$u = C_1 \sin \frac{\pi z}{e} \quad \text{и} \quad \beta = C_2 \sin \frac{\pi z}{e} \quad (312)$$

<sup>1)</sup> Гудьер, цит. выше, стр. 175.

<sup>2)</sup> Хвалла, цит. выше, стр. 175 [уравнение (3)].

удовлетворяют уравнениям (311). Подставляя (312) в (311), получим систему двух однородных линейных уравнений относительно произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$ ; ненулевое решение для  $C_1$  и  $C_2$  существует при условии равенства нулю детерминанта этой системы. Это условие приводит к следующему квадратному уравнению для критической силы  $P_{кр}$ :

$$(P_E - P_{кр}) \left[ E\Gamma \frac{\pi^2}{l^2} + GK - P_{кр} \frac{J_p}{A} \left( 1 + e \frac{AZ}{J_p J_x} \right) \right] - P_{кр}^2 (y_0 + e)^2 = 0, \quad (313)$$

где  $P_E = \pi^2 EJ_y / l^2$  является эйлеровой силой при выпучивании в направлении оси  $x$ .

Исследование уравнений (313) показывает, что оно всегда имеет корень  $P_{кр} \leq P_E$ ; наибольшее возможное значение  $P_{кр} = P_E$  получается, когда второй член уравнений (313) равняется нулю, т. е. для  $e = -y_0$ . Это означает (см. рис. 76 и 77), что при условии действия нагрузки в центре сдвига балка способна выдержать полную эйлерову силу; указанный факт является интересным и мало известным.

#### 49. Балка под действием только поперечных нагрузок

Если осевая сила  $P$  отсутствует, то уравнения (310) упрощаются:

$$EJ_y u'' + M\beta = 0; \quad (314a)$$

$$E\Gamma\beta^{IV} - GK\beta'' - \bar{a}w_y\beta + Mu'' = 0, \quad (314b)$$

где  $M$  обозначает теперь внешний изгибающий момент в плоскости стенки.

Эти уравнения можно сравнить с уравнением, полученным Тимошенко<sup>1)</sup> для симметричных двутавровых балок, несущих в середине сосредоточенную нагрузку. Так как  $M$  не что иное, как  $-\frac{P}{2} \left( \frac{l}{2} - z \right)$ , то легко видеть, что уравнение (314a) идентично уравнению Тимошенко, а уравнение (314b) получено дифференцированием второго уравнения (а) упомянутой работы.

Из системы дифференциальных уравнений (314) можно исключить  $u$  и получить одно дифференциальное уравнение для угла закручивания  $\beta$ :

$$E\Gamma\beta^{IV} - GK\beta'' - \left( \bar{a}w_y + \frac{M^2}{EJ_y} \right) \beta = 0. \quad (315)$$

<sup>1)</sup> Timoshenko S., Theory of Elastic Stability, стр. 265, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1936; русский перевод: Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, 1955, стр. 274.

Уравнения этого типа были получены и использованы многими исследователями. Следует обратить внимание на член  $\bar{a}w_y\beta$ , который определяет положение нагрузки; этот член имеет большое влияние на величину критической силы и им нельзя пренебрегать.

Если изгибающий момент  $M$  постоянен (сила  $w_y$  равна нулю), уравнение (315) запишется следующим образом:

$$E\Gamma\beta^{IV} - GK\beta'' - \frac{M^2}{EJ_y}\beta = 0. \quad (316)$$

Это дифференциальное уравнение имеет постоянные коэффициенты и легко может быть проинтегрировано. Для свободно опертой на концах балки длиной  $l$ :  $\beta = \beta'' = 0$ , и следовательно, критический момент равен

$$M_{кр} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EJ_y GK} \sqrt{1 + \pi^2 \frac{E\Gamma}{l^2 GK}}. \quad (317)$$

Если изгибающий момент  $M$  непостоянен, то не существует простых точных решений уравнения (315). В этом случае можно воспользоваться приближенными решениями, полученными методом Ритца или другими аналогичными методами. Значения критических сил для балок с одинаковыми полками для случаев сосредоточенной нагрузки  $W$  в середине (рис. 80) и равномерно распределенной

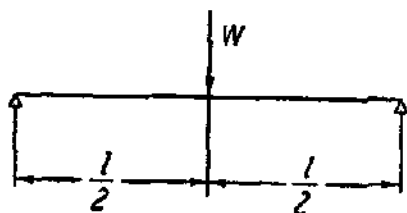


Рис. 80.

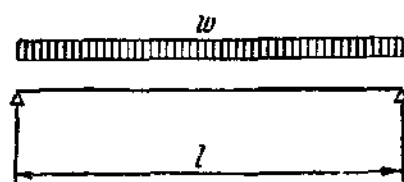


Рис. 81.

нагрузке  $w$  (рис. 81) были определены Тимошенко<sup>1)</sup>. С помощью таблиц 5 и 6 можно определить критические значения нагрузок в следующих трех случаях: нагрузка действует в центре тяжести, на верхней полке и на нижней полке. Как было указано, различие между этими тремя случаями довольно существенно.

Для случая сосредоточенной нагрузки, действующей в середине балки (рис. 80), значение критической силы равно

$$W_{кр} = k \frac{\sqrt{EJ_y GK}}{l^2}, \quad (318)$$

где значение коэффициента  $k$  можно взять из таблицы 5. Величина  $k$  есть функция параметра  $GKl^2/E\Gamma$ ; для симметричных сечений  $\Gamma = J_y d^2/4$ , где  $d$  обозначает высоту сечения.

<sup>1)</sup> Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, 1955, стр. 277, 278.

Таблица 5. Значения коэффициента  $k$  в уравнении (318)

$\frac{GK}{EI} l^2$	Нагрузка действует в:		
	центре тяжести	верхнем поясе	нижнем поясе
0,4	86,4	51,3	145,6
4	31,9	20,2	50,0
8	25,6	17,0	38,2
16	21,8	15,4	30,4
24	20,3	15,0	27,2
32	19,6	14,8	26,3
48	19,0	14,8	23,5
64	18,3	14,9	22,4
80	18,1	14,9	21,7
96	17,9	15,1	21,1
160	17,5	15,3	20,0
240	17,4	15,6	19,3
320	17,2	15,7	18,9
400	17,2	15,8	18,7

В случае же равномерно распределенной нагрузки (рис. 81) значение критической силы будет

$$\omega_{кр} = k \frac{\sqrt{EJ_y GK}}{l^3}, \quad (319)$$

где значения коэффициента  $k$  даны в таблице 6.

Уравнения (318) и (319) были получены для балок с одинаковыми верхними и нижними полками; однако тот факт, что основное дифференциальное уравнение (315) не меняется, если полки неодинаковы, показывает, что уравнения (318) и таблицы 5 и 6 можно также использовать, когда сечение не является симметричным относительно оси  $x$ , но со следующими изменениями: значения  $k$ , данные для нагрузок, действующих на верхнем поясе, в центре тяжести сечения и на нижнем поясе, нужно применить соответственно для случаев, когда нагрузка действует на расстоянии  $\bar{a} = \sqrt{\Gamma/J_y}$  выше центра сдвига, в центре сдвига и на расстоянии  $\bar{a} = -\sqrt{\Gamma/J_y}$  ниже центра сдвига. Значения  $k$  для нагрузок, действующих в других точках, можно приближенно найти с помощью интерполяций.

Для наглядного представления теоретических расчетов на рис. 82 и 83 показаны максимальные напряжения  $\sigma_{кр}$ , при которых происходит боковое выпучивание балки № 60 с погонным весом 103 кг/м и такой же балки с накладкой размерами 225×12,5 мм на верхнем поясе. В обоих случаях разница между нагрузками, действующими

Таблица 6. Значение коэффициента  $k$  в уравнении (319)

$\frac{GK}{EG} \cdot l^2$	Нагрузка действует в:		
	центре тяжести	верхнем поясе	нижнем поясе
0,4	143,0	92,9	222,0
4	53,0	36,3	77,3
8	42,6	30,4	59,4
16	36,3	27,4	48,0
24	33,8	26,6	43,4
32	32,6	26,1	40,4
48	31,5	25,8	37,6
64	30,5	25,7	36,2
80	30,1	25,7	35,1
128	29,0	26,0	33,3
200	29,0	26,4	32,1
280	28,8	26,5	31,4
360	28,7	26,6	31,0
400	28,6	26,6	30,7

на верхнем поясе и в центре тяжести сечения (или в центре сдвига), очень существенна.

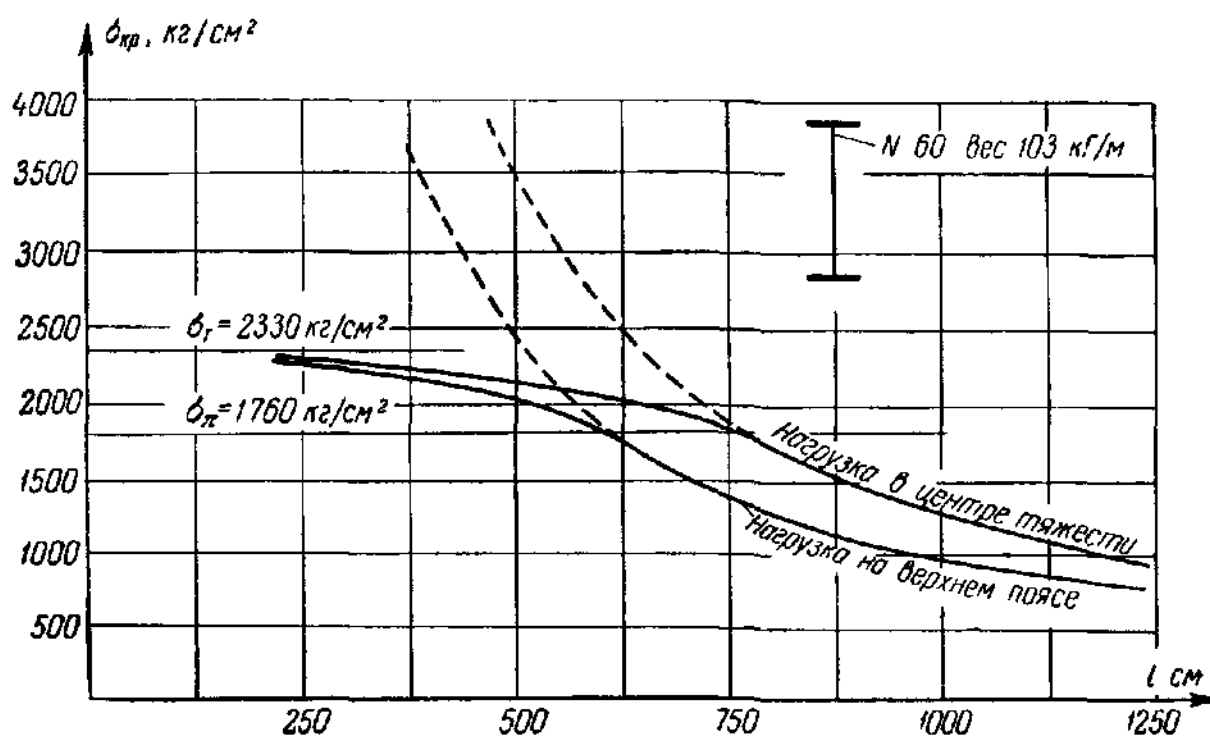


Рис. 82.

Эти напряжения были определены из уравнения (319) и таблицы 6; очевидно, они пригодны, если их значения не превосходят предел пропорциональности  $\sigma_{\pi}$ .



Случай балки без накладки (рис. 82), когда критические напряжения превосходят предел пропорциональности, рассмотрим ниже в § 51. В случае балки с накладкой вопроса о неупругом боковом выпучивании не возникает, так как нижняя полка балки начнет течь

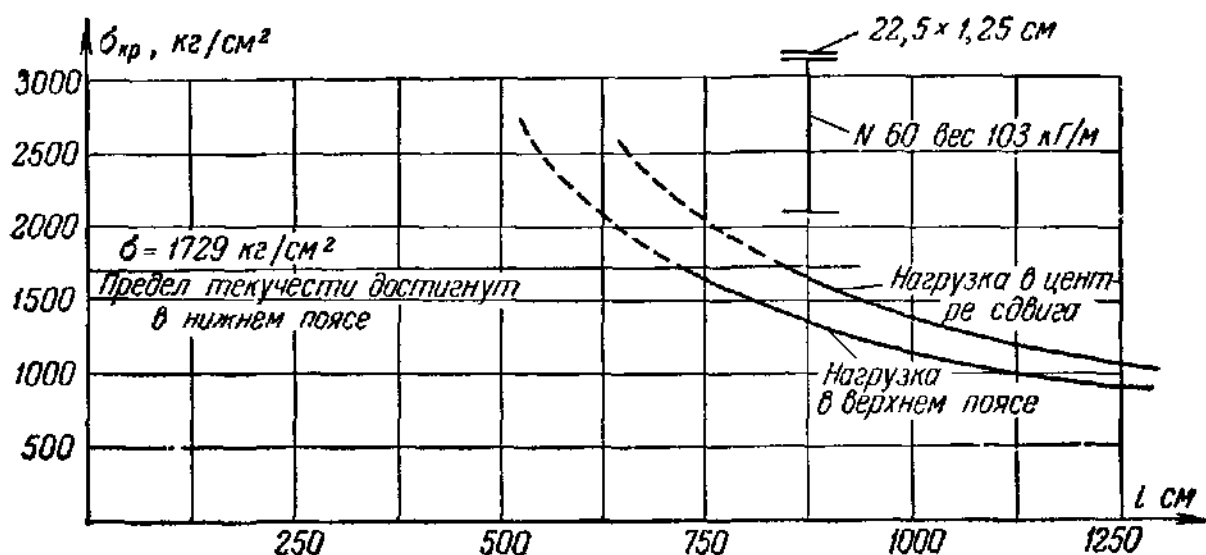


Рис. 83.

прежде, чем предел пропорциональности будет достигнут в верхней полке. Этот факт исключает в некоторых практических случаях необходимость рассмотрения трудного вопроса о неупругом боковом выпучивании.

### 50. Боковое выпучивание с фиксированным центром вращения; другие уточнения теории

Если балка закреплена так, что каждое ее поперечное сечение вращается вокруг некоторой точки  $C_E$ , расположенной на расстоянии  $a$  ниже центра сдвига (рис. 84), то имеем следующее соотношение:

$$u = a\beta. \quad (320)$$

Подставляя (320) в уравнение (307), получим выражение для потенциальной энергии  $U$ :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ E(\Gamma + a^2 J_y) \beta''^2 + \right. \\ \left. + \left( GK + Pa^2 - P \frac{J_p}{A} - P \frac{eZ}{J_x} \right) \beta'^2 + \right. \\ \left. + 2aM\beta\beta'' - \bar{a}w_y\beta^2 \right] dz. \quad (321)$$

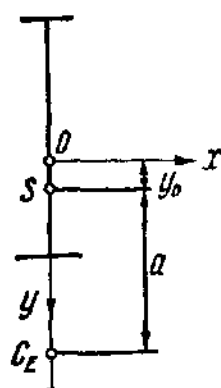


Рис. 84.

$U$  является функцией только угла закручивания  $\beta$ .

Критические значения  $P$  и  $M$  можно вывести из уравнения (321), применяя любой из методов, рассмотренных в главе II. Добавляя

соответствующие члены к выражению (321), можно также исследовать случаи добавочных упругих заделок. Подобные случаи изучались Найландером<sup>1)</sup>, который рассматривал случай бокового выпучивания с фиксированным центром вращения и упругими заделками по отношению к кручению.

Он же исследовал вопрос о влиянии деформаций стенки на критическую силу при боковом выпучивании. Это влияние является незначительным для балок обычной конструкции, но может стать существенным для нестандартных тонкостенных сварных конструкций.

В той же статье Найландер рассматривает также проблему влияния различных подкреплений, предотвращающих искажение поперечного сечения; предложенные им формы связей увеличивают крутильную жесткость и, следовательно, критическую силу при боковом выпучивании.

Хвалла<sup>2)</sup> исследовал влияние прогиба перед выпучиванием на критическую силу балки с поперечным сечением в виде узкого прямоугольника. Мы не располагаем подобным исследованием для двутавровых балок, но Хвалла отмечает, что это влияние для случая двутавровых балок можно приближенно учитывать, заменяя в уравнении (310) момент инерции  $J_y$  выражением  $J_y \frac{1}{1 - J_y/J_x}$ . Это изменение дает несколько завышенные значения критических сил. Как правило, член  $J_y/J_x$  мал, но существуют некоторые, редко используемые прокатные сечения с широкими полками, в которых его влияние заметно. Холл<sup>3)</sup> и Джулян<sup>4)</sup> вывели эквивалентные поправочные члены для двутавровых балок. Особое значение исследования Хваллы состоит в том, что оно указывает на существенное влияние прогиба балки перед выпучиванием на величину критической силы.

## 51. Боковое выпучивание в неупругой области

В том случае, когда в момент выпучивания напряжения в балке превышают предел пропорциональности в любом элементе балки, модули упругости  $E$  и сдвига  $G$  нужно заменить их эффективными значениями  $E_t$  и  $G_t$  в соответствии с теорией касательного модуля. При сравнении с решением задачи неупругого выпучивания сжатых стержней в данном случае возникает дополнительное затруднение из-за того, что в различных сечениях балки напряжения различны

1) Nylander H., *Drehungsvorgänge und gebundene Kippung bei geraden, doppelsymmetrischen I—Trägern*, Ingeniörs Vetenskaps Akademiens Handlingar 174, Stockholm, 1943.

2) Хвалла, цит. выше, стр. 175.

3) Trans. ASCE, т. 112, стр. 1276, 1947.

4) Там же, стр. 1303 и Errata, т. 113, стр. XIII, 1948.

и, следовательно, величины  $E_t$  и  $G_t$  являются переменными; этот факт усложняет задачу и затрудняет ее эффективное решение.

Существует возможность получить нижнюю границу критической силы, предположив, что значения  $E$  и  $G$  во всех точках балки равняются  $E_t = E\tau$  и  $G_t = G\tau$ , где  $\tau$  соответствует значению максимального сжимающего напряжения в балке. При такой замене общее выражение для потенциальной энергии принимает вид

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ E\tau J_y u''^2 + E\tau \Gamma \beta''^2 + G\tau K \beta'^2 + P u'^2 + 2Mu''\beta - \right. \\ \left. - P \left( \frac{J_p}{A} + e \frac{Z}{J_x} \right) \beta'^2 - \bar{a} w_y \beta^2 \right] dz. \quad (322)$$

Величину критической силы можно определить из уравнения (322), причем полученные новые значения критической силы или критического напряжения совпадут с их значениями при упругом выпучивании, умноженными на  $\tau$ . Следовательно, можно найти значение критического напряжения  $\sigma_{кр}/\tau$ , а  $\sigma_{кр}$  определить так же, как и для случая неупругого выпучивания сжатых стержней.

Рассмотрим, например, случай свободно опертой балки, подверженной равномерно распределенной нагрузке (рис. 81). Критическую силу при упругом выпучивании можно определить из уравнения (319); заменяя  $E$  и  $G$  на  $E\tau$  и  $G\tau$ , получим:

$$w_{кр} = k\tau \frac{\sqrt{EJ_y GK}}{\beta}. \quad (323)$$

Напряжение в балке равно

$$\sigma_{кр} = k\tau \frac{\sqrt{EJ_y GK}}{8Sl}, \quad (324)$$

где  $S$  — величина, характеризующая поперечное сечение балки, а значения коэффициента  $k$  даны в таблице 6. Необходимо отметить, что приведенное в таблице значение  $(GK/E\Gamma)l^2$  не меняется, так как мы предположили, что отношение  $G\tau/E\tau = G/E$  остается неизменным.

В левой части рис. 82 показано значение критического напряжения, определенного таким способом для балки № 24. Как было сказано выше, это напряжение представляет собой только нижний предел для действительного критического напряжения, но между ними не может существовать большой разницы, так как действительное критическое напряжение должно быть меньше напряжения текучести. Аналогичный метод расчета можно использовать и для других случаев, получая всегда более низкие значения критических напряжений.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Prescott J., Applied Elasticity, стр. 499, Chapman & Hall, Ltd., London, 1924.

Richmond H. S., Elastic Equilibrium in the Theory of Structures, Trans. ASCE т. 94, стр. 845, 1930.

Trayer G. W., March H. W., Elastic Instability of Members Having Sections Common in Aircraft Construction, NACA Tech. Rept. 382, 1931.

Stüssi F., Excentrisches Kippen, Schweizerische Bauzeitung, т. 105, стр. 123, 1935.

Hartmann F., Knickung, Kippung und Beulung, F. Deuticke, Leipzig und Wien, 1937; русский перевод: Гартман Ф., Устойчивость инженерных сооружений, М. — Л., Стройиздат, 1939.

Dohrenwend C. O., Action of Deep Beams under Combined Vertical, Lateral and Torsional Loads, Jour. Applied Mechanics, 1941, стр. A-130.

Madsen I., Report of Crane Girder Tests, Iron Steel Engr., ноябрь, 1941.

Johnston B. G., Lateral Buckling of I-section Columns with Eccentric Loads in Plane of Web, Jour. Applied Mechanics, 1941, стр. 180.

Winter G., Strength of Slender Beams, Trans. ASCE, т. 109, стр. 1321, 1944.

Hill H. N., Clark J. W., Lateral Buckling of Eccentrically Loaded I-section Columns, Proc. ASCE 34, 1950.

---

## ГЛАВА V

### СОСТАВНЫЕ СЖАТЫЕ СТЕРЖНИ И СЖАТЫЕ СТЕРЖНИ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

#### 52. Введение

Влияние поперечных сил при изгибе сжатого стержня в момент выпучивания было рассмотрено в главе I. Было установлено, что в сжатых стержнях со сплошными поперечными сечениями типа используемых обычно при проектировании конструкций их влияние на величину критической осевой силы практически пренебрежимо мало, что объясняется крайней малостью касательных напряжений и обусловленных ими деформаций. Это имеет место даже в наиболее неблагоприятном случае двутавровой балки, выпучивающейся в плоскости стенки. В составных сжатых стержнях дело обстоит иначе. Влияние поперечных сил на полный прогиб сжатого стержня намного больше, когда элементы сжатого стержня соединены между собой системой раскосов и планок. Следовательно, уменьшение устойчивости вследствие изгиба от поперечных сил более значительно, чем в случае сжатых стержней со сплошными поперечными сечениями, и зависит от размеров и конструкции соединительных элементов. Разрушение составных сжатых элементов в свое время позволило обратить внимание на некоторые недостатки сжатых стержней этого типа и явилось причиной развития различных теоретических и экспериментальных исследований поведения составных сжатых стержней.

Энгессер<sup>1)</sup> в работе, опубликованной в 1889 г., впервые исследовал такую задачу, в которой он привел приближенные формулы для расчета критической силы решетчатых сжатых стержней, а также сжатых стержней с соединительными планками. Позже<sup>2)</sup> он опубликовал усовершенствованное исследование той же задачи, содержащее оценку влияния вторичного эффекта поперечных сил.

---

<sup>1)</sup> Engesser F., Die Knickfestigkeit gerader Stäbe, Zentralblatt der Bauverwaltung, т. 11, стр. 483, 1891 и Zeitschrift des Architekten und Ingenieur Vereins zu Hannover, т. 35, стр. 455, 1889.

<sup>2)</sup> Engesser F., Über die Knickfestigkeit von Rahmenstäben, Zentralblatt der Bauverwaltung, т. 29, стр. 136, 1909.

Составной сжатый стержень представляет собой рамную систему, и методами расчета рам, развитыми в главе VI, его устойчивость может быть исследована более точно. Было сделано много попыток идти этим путем и получить точные решения задачи о сжатом стержне. Прежде всего следует упомянуть работу Манна<sup>1)</sup>, содержащую точный метод расчета сжатых стержней с планками. Лjungберг<sup>2)</sup> в 1922 г. и Мизес и Ратцердорфер<sup>3)</sup> в 1925 г. развили теорию решетчатого стержня, рассматривая его как шарнирную треугольную раму. Дальнейшее усовершенствование этой теории было сделано Вентцелом<sup>4)</sup>, который исследовал ферму с треугольной решеткой при более реальном условии, считая пояса фермы неразрезными, а элементы соединительной решетки—шарнирно соединенными с поясами. Задача о составных сжатых стержнях была рассмотрена Мизесом и Ратцердорфером<sup>5)</sup>, которые получили формулу для критической силы, по существу идентичную формуле, полученной Манном. Хвалла<sup>6)</sup> исследовал влияние податливости заклепок соединяющих связей элементов сжатого стержня. Он также подтвердил результаты Манна.

Вышеперечисленные исследования, в которых сжатый стержень рассматривался как рамная система, не содержат заметных результатов о поведении составных сжатых стержней по сравнению с упоминавшейся работой Энгессера. Ценность их в том, что все они подтвердили результаты, впервые полученные Энгессером. Отличие точных решений от приближенных выражается в том, что число  $n$  панелей, на которое разделен сжатый стержень, входит лишь в формулы для критической силы, выведенные на основе теории стержневых систем; число  $n$  влияет на результаты только в случае малого числа панелей. На практике  $n$  обычно больше 4, поэтому точные и приближенные методы дают почти одни и те же результаты. Формулу Энгессера, полученную весьма простым путем, можно считать достаточно точной для практического использования.

В §§ 53 и 54 будут рассмотрены решетчатые сжатые стержни и сжатые рамные стержни. Выражения для критической силы будут

<sup>1)</sup> Mann L., Die Berechnung steifer Vierecknetze, Zeitschrift für Bauwesen, т. 59, стр. 539, 1909.

<sup>2)</sup> Ljungberg K., Auf Knickung beanspruchte Gitterstäbe, Der Eisenbau, т. 13, стр. 100, 1922.

<sup>3)</sup> Von Mises R., Ratzersdorfer J., Die Knicksicherheit von Fachwerken, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. 5, стр. 218, 1925.

<sup>4)</sup> Wentzel W., Über die Stabilität des Gleichgewichtes ebener elastischer Stabwerke und die Knickfestigkeit des Gitterträgers, Thesis, Berlin, 1929.

<sup>5)</sup> Von Mises R., Ratzersdorfer J., Die Knicksicherheit von Rahmentragwerken, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. 6, стр. 181, 1926.

<sup>6)</sup> Chwalla E., Die Stabilität des Rahmenstabes, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, т. 136, стр. 487, 1927.

выведены на основе энергетического метода. Однако при рассмотрении составных сжатых стержней является также существенным вопрос о расчете их соединительных элементов; при этом должна быть проверена прочность связей перед исчерпанием несущей способности всего сжатого стержня. Этот вопрос и задача об определении вторичных напряжений в решетчатых сжатых стержнях перед выпучиванием будут рассмотрены соответственно в §§ 55 и 56.

В последние годы применяются сжатые стержни, в которых вместо соединителей элементов используются перфорированные пластинки. Расчет таких сжатых стержней зависит от эффективной площади перфорированных пластин. Опыты, проведенные с такими сжатыми стержнями, не показали уменьшения прочности обусловленного деформациями сдвига<sup>1)</sup>. Рассмотренные в этой главе методы по существу оценивают влияние на устойчивость деформаций сдвига, и эти методы можно распространить на составные стержни с перфорированными пластинами.

Последний параграф этой главы посвящается исследованию сжатых стержней с переменными моментами инерции. Поперечные размеры составных сжатых элементов часто меняются с длиной, и моменты инерции становятся переменными величинами; поэтому целесообразно рассмотреть в этой главе устойчивость таких сжатых стержней.

### 53. Устойчивость решетчатых сжатых стержней

Нижеизложенное исследование основывается на предположении тождественности форм изогнутой оси решетчатого сжатого стержня при выпучивании в плоскости соединительных элементов и сжатого стержня со сплошным поперечным сечением. Рассматривая шарнирно опертый сжатый стержень как основной случай, примем изогнутую ось сжатого стержня в форме полуволны синusoида.

Для любой упругой системы переход от устойчивого положения равновесия к неустойчивому положению характеризуется энергетическим условием<sup>2)</sup>

$$V - W = 0, \quad (325)$$

где  $V$  есть энергия деформации изгиба, а  $W$  — работа, сделанная внешними силами при перемещении их точек приложения вследствие изгиба.  $V$  и  $W$  являются функциями прогиба  $y$  и нагрузки  $P$  (рис. 85). Предполагая, что

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (326)$$

<sup>1)</sup> Stang A. H., Greenspan M., Perforated Cover Plates for Steel Columns, Natl. Bur. Standards (U. S.), Journ. Research., т. 28, 1942, Research Papers RP 1473 and RP 1474; т. 40, 1948, Research Papers RP 1861 and RP 1880.

<sup>2)</sup> См. уравнение (93) главы II,

из уравнения (325) можно определить значение критической силы  $P_{кр}$ , при которой существуют прогибы, отличные от нуля, указывающие на переход от прямой устойчивой формы к неустойчивой форме равновесия<sup>1)</sup>.

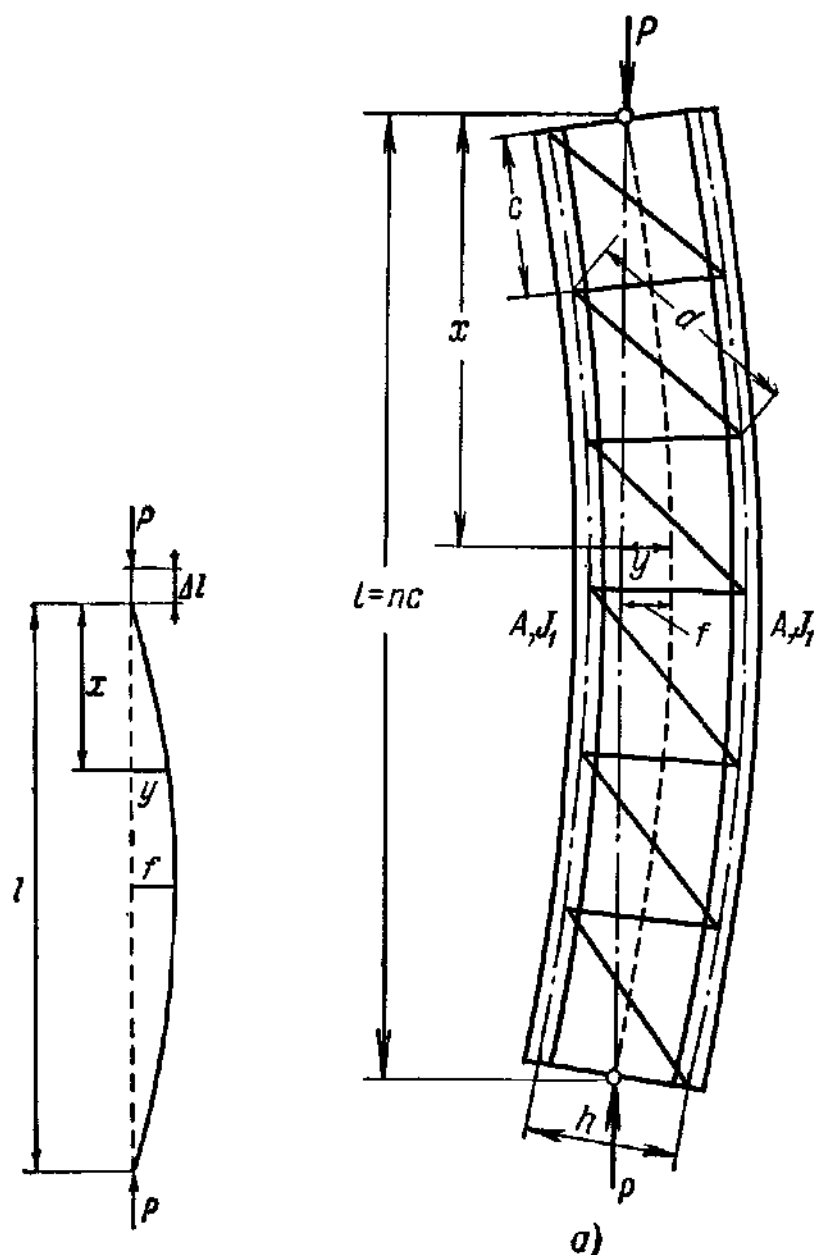


Рис. 85.

Рис. 86.

На рис. 86, а показан сжатый стержень в его изогнутом состоянии. Согласно теории Шэнли предполагается, что рассмотренная в главе I зависимость между напряжением и деформацией в обоих поясах, когда значение критического напряжения  $P_{кр}/A$  превосходит предел пропорциональности, определяется касательным модулем  $E_t$ . Из предположения о достаточной малости амплитуды прогиба  $f$  вытекает, что деформация соединительных элементов упруга, и при

<sup>1)</sup> См. последний абзац § 25, стр. 92.



выводе выражений для энергии деформации этих элементов следует вводить модуль Юнга  $E$ .

Введем следующие обозначения (см. рис. 86):

$F$  — изменение осевой силы в одном поясе при изгибе сжатого стержня в момент выпучивания;

$A$  — площадь поперечного сечения пояса;

$J$  — момент инерции сечения одного пояса стержня относительно центральной оси  $I—I$  (см. рис. 86,  $b$ );

$D$  и  $A_d$  — усилия и площадь поперечного сечения раскосов;

$B$  и  $A_b$  — сила и площадь поперечного сечения распорок;

$h$  — расстояние между центральными осями поясов стержня;

$d$  — длина наклонных стержней;

$c = l/n$  — длина панели.

Для стержня с двумя плоскостями решетчатых систем  $D$ ,  $B$  и  $A_d$ ,  $A_b$  обозначают силы и площади поперечных сечений двух раскосов и двух распорок.

Энергия деформации  $V$ . При выводе уравнения для энергии деформации мы сначала пренебрежем энергией изгиба поясов стержня, учитывая только работу осевых сил, возникающих в поясах и в элементах решетки, пренебрегая при этом неразрезностью поясов. Влияние неразрезности поясов будет учтено позже в окончательной формуле простым путем. Выражение для энергии деформации будет

$$V = \frac{1}{2} \left( 2 \sum \frac{F_c^2}{E_t A} + \sum \frac{D^2 d}{E A_d} + \sum \frac{B^2 h}{E A_b} \right), \quad (327)$$

где первый член в скобках представляет собой энергию деформации, накопленную в элементах пояса, а последние два члена — энергию деформации соединительных стержней.

Изгибающий момент в любой точке оси сжатого стержня равен

$$M_x = P_{кр} y = P_{кр} f \sin \frac{\pi x}{l},$$

а поперечная сила

$$Q_x \frac{dM_x}{dx} = P_{кр} f \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l},$$

где

$$F = \frac{M_x}{h} = \pm P_{кр} \frac{f}{h} \sin \frac{\pi x}{l}; \quad (328a)$$

$$D = Q_x \frac{d}{h} = \pm P_{кр} f \frac{d}{h} \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}; \quad (328b)$$

$$B = Q_x = \pm P_{кр} f \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}. \quad (328c)$$

Знаки  $\pm$  в уравнениях (328) показывают на то, что одни элементы растягиваются, другие сжимаются в зависимости от их положения.

При определении величин  $F$ ,  $D$  и  $B$  в каждой панели  $x$  будем отсчитывать от центра панели. Получаемая в результате этого допущения ошибка незначительна, когда число панелей  $n$  больше четырех. Поэтому, вводя соотношение  $\frac{\pi x}{l} = \frac{2r-1}{2n} \pi$ , где  $r=1, 2, \dots, n-1$ ,  $n$  обозначают номера точек панелей, напомним уравнение (327) в следующем виде:

$$V = \frac{P_{кр}^2 f^2}{2} \frac{c}{h^2} \frac{2}{E_t A} \sum_{r=1}^n \sin^2 \frac{2r-1}{2n} \pi + \frac{P_{кр} f^2}{2} \frac{d^3}{h^2} \frac{\pi^2}{l^2} \frac{l}{E A_d} \times \\ \times \sum_{r=1}^n \cos^2 \frac{2r-1}{2n} \pi + \frac{P_{кр}^2 f^2}{2} \frac{\pi^2}{l^2} \frac{h}{E A_b} \sum_{r=1}^n \cos^2 \frac{2r-1}{2n} \pi.$$

Подставляя значение момента инерции  $J_0 = Ah^2/2$ , легко увидеть

$$\frac{P_{кр}^2 f^2}{2} \frac{c}{h^2} \frac{2}{E_t A} = \frac{P_{кр}^2 f^2}{2} \frac{c}{E_t J_0},$$

и так как

$$\sum_{r=1}^n \sin^2 \frac{2r-1}{2n} \pi = \sum_{r=1}^n \cos^2 \frac{2r-1}{2n} \pi = \frac{n}{2} = \frac{l}{2c}, \quad (329)$$

выражение для энергии деформации  $V$  принимает следующий вид:

$$V = P_{кр}^2 \frac{f^2 l}{4} \left( \frac{1}{E_t J_0} + \frac{d^3}{ch^2} \frac{\pi^2}{l^2} \frac{1}{E A_d} + \frac{h}{c} \frac{\pi^2}{l^2} \frac{1}{E A_b} \right). \quad (330)$$

Работа внешних сил  $W$ . Работа, проделанная внешними силами, согласно рис. 85 будет

$$W = P_{кр} \Delta l = \frac{P_{кр}}{2} \int_0^l y'^2 dx,$$

и так как  $y' = (\pi/l) f \cos(\pi x/l)$ , после интегрирования получим:

$$W = P_{кр} \frac{\pi^2 f^2}{4l}. \quad (331)$$

Подставляя значения  $V$  и  $W$  из уравнений (330) и (331) в уравнение (325), получим условие устойчивости, которое после деления на  $P_{кр}^2 f^2/4$  примет следующий вид:

$$\frac{\pi^2}{l} - P_{кр} l \left( \frac{1}{E_t J_0} + \frac{\pi^2 d^3}{l^2 ch^2} \frac{1}{E A_d} + \frac{\pi^2 h}{l^2 c} \frac{1}{E A_b} \right) = 0.$$

В результате находим следующее выражение для критической силы:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E_t J_0}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 E_t J_0}{l^2} \frac{1}{E c h^2} \left( \frac{d^3}{A_d} + \frac{h^3}{A_b} \right)}. \quad (332)$$

Если бы соединительные элементы были абсолютно жесткими ( $A_d = A_b = \infty$ ), то из уравнения (332) мы получили бы значение критической силы  $\pi^2 E_t J_0 / l^2$ , которое является значением критической силы для сжатого стержня с моментом инерции  $J_0 = Ah^2/2$ . Однако действительное значение момента инерции поперечного сечения сжатого стержня равно

$$J = J_0 + 2J_1, \quad (333)$$

где  $J_1$  есть момент инерции каждого из поясов относительно оси  $I-I$ , как показано на рис. 86, *b*. До сих пор мы пренебрегали жесткостью пояса  $J_1$ ; по-видимому, чтобы учесть ее влияние, естественно ввести в первом члене уравнения (332) вместо величины  $J_0$  значение  $J_2$  <sup>1)</sup>. В результате значение критической силы  $P_{кр}$  для составного сжатого стержня можно представить в следующем виде:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E_t J}{(kl)^2}, \quad (334)$$

где

$$k = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 E_t J_0}{l^2} \frac{1}{Ech^2} \left( \frac{d^3}{A_d} + \frac{h^3}{A_b} \right)}. \quad (335)$$

Для заданного материала значение критической силы при выпучивании в плоскости решетки можно вычислить на основе формулы для сжатого стержня, используя эффективную длину  $kl$ , где  $k$  определяется формулой (335). Значение  $k$  всегда больше единицы. Выражение  $\pi^2 E_t J_0 / l^2$  в уравнении (335) представляет собой критическую силу  $P_0$  сжатого стержня со сплошным поперечным сечением, момент инерции которого равен  $J_0 = Ah^2/2$ . Выведенная выше формула была получена Энгессером в 1891 г. другим путем.

Уравнение (335) пригодно для решетки типа, показанного на рис. 86. В случае решетки, показанной на рис. 87, *a*, значение коэффициента  $k$  равно

$$k = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 E_t J_0}{l^2} \frac{d^3}{Ech^2 A_d}}, \quad (336)$$

а в случае двойной решетки (рис. 87, *b* и *c*)

$$k = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 E_t J_0}{l^2} \frac{d}{2Ech^2 A_d}}. \quad (337)$$

Сжатые стержни с решетками, изображенными на рис. 87, *a*, были исследованы на основе теории ферм Вентцеля <sup>2)</sup>. Уравнение

<sup>1)</sup> Может показаться необоснованным, что в знаменателе уравнения (332)  $J_0$  не заменено на  $J$ . Такое значение момента инерции, входящего в этот член, сохранено вследствие того, что оно получается по точному расчету ферм [см. уравнение (338)]. В любом случае влияние замены  $J_0$  на  $J$  во втором члене на критическую силу  $P$  будет очень мало, так как значение знаменателя близко к единице.

<sup>2)</sup> Вентцел, цит. выше, стр. 194.

(336) и выражение, выведенное на основе теории ферм

$$k = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 E_t J_0}{l^2} \frac{d}{E c h^3 A_d} \frac{1}{1 + 4 J_1 / A h^2}} \quad (338)$$

в случае большого числа  $n$  панелей дают хорошо согласующиеся результаты.

Уравнение (338) отличается от уравнения (336) коэффициентом  $\frac{1}{1 + 4 J_1 / A h^2}$ , находящимся под радикалом, значение которого близко к единице. Его влияние на величину  $k$  для практически употребляющихся сжатых стержней незначительно.

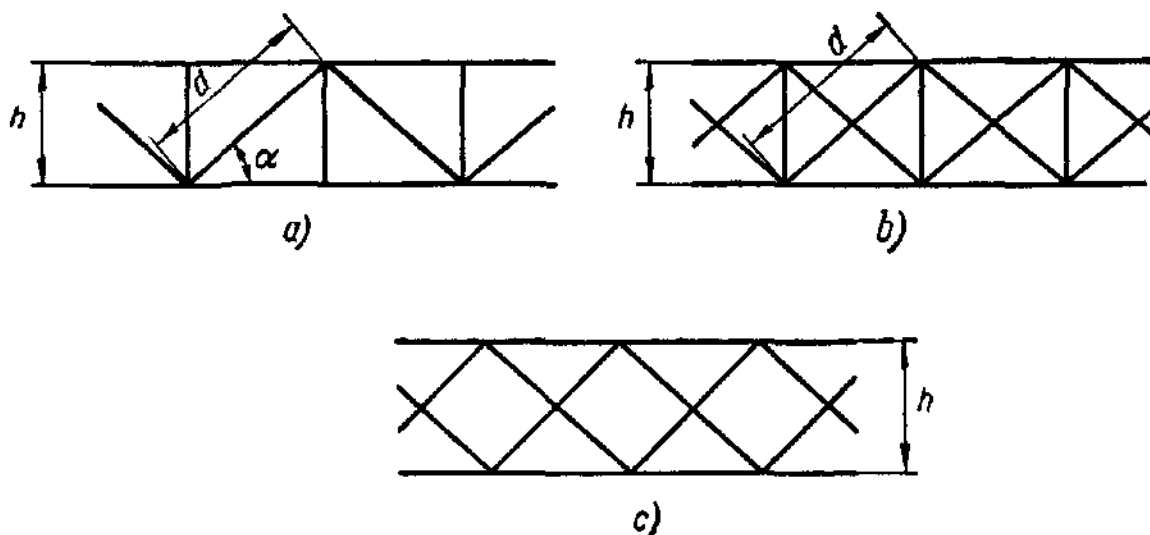


Рис. 87.

Для того чтобы показать влияние поперечных сил на критическую силу решетчатого стержня, можно рассмотреть случай, показанный на рис. 87, а. Выражение  $\pi^2 E_t J_0 / l^2$  в уравнении (336) можно заменить выражением  $2A\sigma_{кр}^0$ , где  $2A$  обозначает площадь поперечного сечения сжатого стержня, а  $\sigma_{кр}^0$  — критическое напряжение сжатого стержня сплошного поперечного сечения, момент инерции которого равен  $J_0$ . Выразив далее отношение  $d^3 / c h^2$  в функции угла  $\alpha$  между наклонным стержнем и осью сжатого стержня и уменьшив, таким образом, число параметров в выражении для  $k$ , получим:

$$k = \sqrt{1 + \frac{\sigma_{кр}^0}{E} \frac{2A}{A_d} \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}} \quad (339)$$

В таблице 7 показано влияние  $\alpha$  и отношения  $2A/A_d$  на коэффициент  $k$  при двух выбранных значениях  $\sigma_{кр}^0$ . Эти значения равны  $\sigma_{кр}^0 = 2260 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$  (несколько меньше предела текучести, равного  $2330 \text{ кг/см}^2$ ) и  $\sigma_{кр}^0 = 1760 \text{ кг/см}^2$  (значение, равное пределу пропорциональности строительной стали).

Таблица 7. Значения  $k$ , вычисленные из уравнения (339)

Напряже- ние $\sigma_{кр}^0$ , $\frac{кг}{см^2}$	$\alpha$ , градусы	Отношение $2A/A_d$				
		30	25	20	15	10
2260	30	1,072	1,061	1,049	1,037	1,025
	45	1,045	1,038	1,030	1,023	1,015
	60	1,042	1,035	1,028	1,021	1,014
1760	30	1,057	1,048	1,039	1,029	1,019
	45	1,035	1,030	1,024	1,018	1,012
	60	1,033	1,028	1,023	1,017	1,011

Вследствие того, что коэффициент длины  $k$  имеет малое влияние на критическую силу коротких сжатых стержней, значения  $P_{кр}$  коротких решетчатых сжатых стержней будут лишь незначительно отличаться от значения силы сжатых стержней со сплошными поперечными сечениями, обладающих такими же моментами инерции  $J$ . Однако решетка имеет большее влияние в случае гибких сжатых стержней, где уменьшение прочности в предельных случаях составляет около 10%.

#### 54. Рамные стержни

Процесс вывода формулы для критической силы, по существу, тот же, что и в предыдущем параграфе. Рамный стержень представляет собой многократно статически неопределимую конструкцию, разделенную на панели распорками. Точный расчет ее достаточно трудоемок. Однако при исследовании задачи устойчивости этой системы можно получить приближенные соотношения, определяющие внутренние силы путем некоторых упрощающих предположений относительно местных деформаций фермы. Из теории прямоугольных рам известно, что их деформированное состояние характеризуется точками перегиба в центре поперечных элементов и приблизительно в средней точке каждого пояса; следовательно, можно заменить статически неопределимую конструкцию статически определимой рамой с шарнирами в средней точке каждого элемента, как это показано на рис. 88.

На рис. 89, где изображены две смежные панели сжатого стержня, показаны поперечные силы и моменты, действующие в элементах фермы в деформированном состоянии.

Отметим величины, которые будут фигурировать в следующих ниже формулах, и приведем их условные обозначения:

$F_r$  — изменение осевой силы в поясе между узлами  $r-1$  и  $r$ , вызванное изгибом сжатого стержня в состоянии выпучивания;

- $Q_r$  — поперечная сила, между узлами  $r-1$  и  $r$ ;  
 $Q_{br}$  — поперечная сила, действующая на поперечный элемент в узле  $r$ ;  
 $M_r$  — изгибающий момент в любой точке  $\xi$  элемента пояса  $r-1, r$ ;  
 $M_{br}$  — изгибающий момент в любой точке  $\eta$  поперечного элемента  $r$ ;  
 $A$  — площадь поперечного сечения одного пояса;  
 $J_1, J_b$  — моменты инерции соответственно пояса и поперечного элемента, каждый относительно центральной оси их поперечного сечения, перпендикулярной к плоскости выпучивания;  
 $J_0 = Ah^2/2$ .

Упругая энергия деформированного сжатого стержня состоит из работы, проделанной осевыми силами  $F_r$  в двух поясах, и из энергии

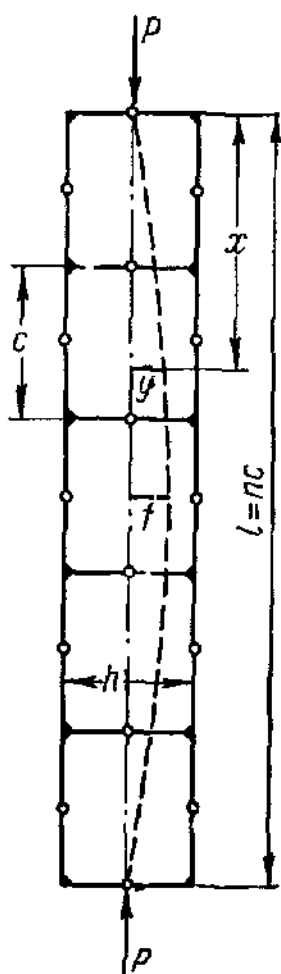


Рис. 88.

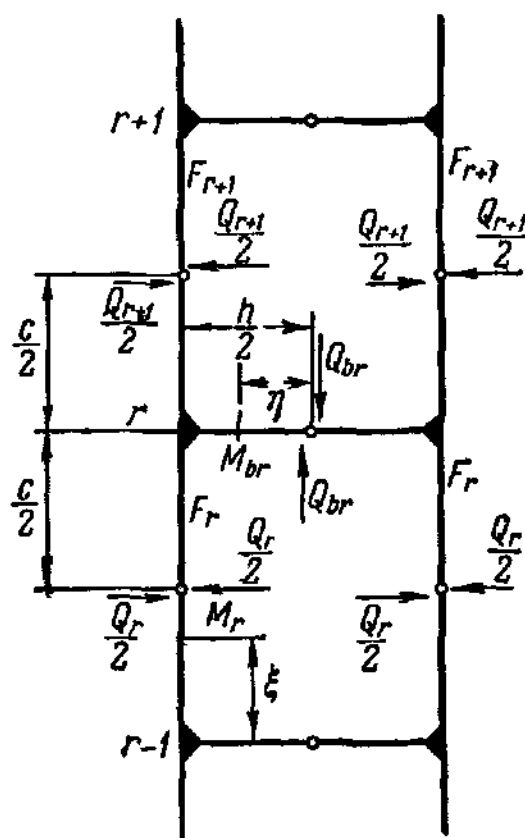


Рис. 89.

местного изгиба, накопленной в поясах и в распорках. Энергией изгиба поясов вместе с синусоидальной деформацией оси сжатого стержня мы сначала пренебрежем, но позже примем во внимание в окончательной формуле для критической силы. Влиянием деформации элементов пояса и распорок, обусловленной касательными напряжениями, возникающими при изгибе, пренебрегается. Тогда уравне-

ние для  $V$  будет

$$V = \frac{1}{2} \left( 2 \sum_{r=1}^n \frac{F_r^2 c}{E_t A} + 2 \sum_{r=1}^n \int_0^c \frac{M_r^2}{E_t J_1} d\xi + \sum_{r=1}^n \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{M_{br}^2}{E J_b} d\eta \right). \quad (340)$$

Первые два члена относятся к поясам, деформация которых, вызванная осевой силой и изгибом, в момент выпучивания зависит от касательного модуля  $E_t$ . Третий член выражает энергию деформации распорок, которые в момент выпучивания предполагаются ненапряженными, и поэтому в знаменателе этого члена фигурирует модуль Юнга.

Предполагая, что сжатый стержень изгибается по синусоидальной кривой  $y = f \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ , изображенной на рис. 88, получим для изгибающего момента  $M_r$  в точке  $x = (2r - 1/2n)l$ , соответствующей серединной точке панели  $r - 1, r$ , выражение

$$M_r = P_{кр} y = P_{кр} f \sin \frac{2r-1}{2n} \pi, \quad (341)$$

а для поперечной силы  $Q_r$  в той же самой точке выражение

$$Q_r = \frac{dM_r}{dx} = P_{кр} f \frac{\pi}{l} \cos \frac{2r-1}{2n} \pi, \quad (342)$$

Рассматривая равновесие моментов в узле  $r$ , из рис. 89 получим:

$$Q_{br} \frac{h}{2} - \left( \frac{Q_r}{2} + \frac{Q_{r+1}}{2} \right) \frac{c}{2} = 0,$$

откуда следует, что

$$Q_{br} = \frac{Q_r + Q_{r+1}}{2} \frac{c}{h}.$$

Для упрощения расчета это выражение заменим следующим приближенным:

$$Q_{br} = \frac{c}{h} \bar{Q}_r, \quad (343)$$

где

$$\bar{Q}_r = P_{кр} f \frac{\pi}{l} \cos \frac{r}{n} \pi. \quad (344)$$

Так как  $F_r = M_r/h$ , на основе уравнений (341) и (329) получим:

$$\sum_{r=1}^n \frac{F_r^2 c}{E_t A} = \frac{P_{кр}^2 f^2 c}{E_t A} \sum_{r=1}^n \sin^2 \frac{2r-1}{2n} \pi = \frac{P_{кр}^2 f^2 l}{E_t A} \frac{1}{2h^2} = \frac{P_{кр}^2 f^2 l}{4E_t J_0}, \quad (345)$$

где  $J_0 = Ah^2/2$ .

Из рассмотрения рис. 89 имеем:

$$\int_0^c \frac{M_r^2}{E_t J_1} d\xi = \int_0^c \frac{Q_r^2 \left(\xi - \frac{c}{2}\right)^2}{4E_t J_1} d\xi = \frac{Q_r^2 c^3}{48E_t J_1}$$

и

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{M_{br}^2}{E J_b} d\eta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\bar{Q}_r^2 c^2}{E J_b h^2} \eta^2 d\eta = \frac{\bar{Q}_r^2 c^2 h}{12E J_b};$$

следовательно, используя уравнения (342) и (329), получим:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \int_0^c \frac{M_r^2}{E_t J_1} d\xi &= \sum_{r=1}^n \frac{Q_r^2 c^3}{48E_t J_1} = \\ &= \frac{\pi^2 P_{кр}^2 f^2 c^3}{48E_t J_1 l^2} \sum_{r=1}^n \cos^2 \frac{2r-1}{2n} \pi = \frac{\pi^3 P_{кр}^2 f^2 c^2}{96 E_t J_1 l}. \end{aligned} \quad (346)$$

Принимая во внимание уравнения (344) и учитывая, что

$$\sum_{r=1}^n \cos^2 \pi \frac{r}{n} = \frac{n}{2} = \frac{l}{2c},$$

имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{M_{br}^2}{E J_b} d\eta &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \frac{\bar{Q}_r^2 c^2 h}{12E J_b} = \\ &= \frac{\pi^2 P_{кр}^2 f^2 c^2 h}{24E J_b l^2} \sum_{r=1}^n \cos^2 \pi \frac{r}{n} = \frac{\pi^2 P_{кр}^2 f^2 c h}{48 E J_b l}. \end{aligned} \quad (347)$$

Выражение для работы  $W$  внешних сил снова дается уравнением (331). Используя уравнения (340), (345), (346) и (347) и исключая коэффициент  $P_{кр} f^2/4$ , для энергетического условия (325) найдем выражение

$$\frac{\pi^2}{l} - P_{кр} \left( \frac{l}{E_t J_0} + \frac{\pi^2 c^2}{24 E_t J_1 l} + \frac{\pi^2 c h}{12 E J_b l} \right) = 0.$$

Разрешая его относительно  $P_{кр}$ , получим:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E_t J_0}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 J_0}{24 J_1} \left( \frac{c}{l} \right)^2 + \frac{\pi^2 E_t J_0}{l^2} \frac{c h}{12 E J_b}}. \quad (348)$$



Рассуждая так же, как и в предыдущем разделе, в числителе  $J_0$  можно заменить моментом инерции стержня  $J = J_0 + 2J_1$ , учтя, таким образом, изгибную жесткость пояса, которой пренебрегли в предшествующем исследовании.  $P_{кр}$  можно выразить следующим образом:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E_t J}{(kl)^2}, \quad (349)$$

где  $k$  равно

$$k = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 J_0}{24 J_1} \left(\frac{c}{l}\right)^2 + \frac{\pi^2 J_0}{12 J_b} \frac{ch}{l^2}}. \quad (350)$$

В последнем члене уравнения (350) отношение  $E_t/E$  заменено единицей; это упрощение приводит к несколько большему значению  $k$ .

Второй член под радикалом в уравнении (350) зависит от гибкости пояса; последний член — от изгибной жесткости распорок. В случае точного расчета сжатого стержня значение этого последнего члена мало по сравнению с  $1 + \frac{\pi^2 J_0}{24 J_1} \left(\frac{c}{l}\right)^2$  и, как правило, им можно пренебрегать.

Формула (348) была получена Энгессером, а ее пригодность была доказана путем сравнения с результатами точных исследований Манна и других. Она также хорошо подтверждается опытами.

Умножая обе части уравнения (350) на гибкость  $l/r$  сжатого стержня ( $r = \sqrt{J/2A}$ ) и опуская последний член, получим:

$$\frac{kl}{r} = \sqrt{\left(\frac{l}{r}\right)^2 + \frac{\pi^2 J_0}{24 J_1} \left(\frac{c}{r}\right)^2}.$$

Подставляя во втором члене  $2A/J$  вместо  $1/r^2$ , заменяя приближенно  $J_0/J$  единицей и вводя радиус инерции пояса  $r_1 = \sqrt{J_1/A}$ , придадим этому уравнению следующий вид:

$$\frac{kl}{r} = \sqrt{\left(\frac{l}{r}\right)^2 + \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{c}{r_1}\right)^2}, \quad (351)$$

где  $c/r_1$  есть гибкость пояса. Из уравнения (351) в очень удобной форме получим эквивалентную гибкость  $kl/r$  рамного сжатого стержня.

В таблице 8 приведены значения  $k$ , вычисленные на основе уравнения (351) для различных гибкостей  $l/r$  в предположении, что  $c/r_1 = 40$ . В следующем параграфе увидим, что рамные сжатые стержни должны быть рассчитаны с учетом того, что значения  $c/r_1$  заметно не превосходят значения  $l/r$ . Для того чтобы оценить влияние  $k$  на критическую силу, значения  $\sigma_{кр}$ , соответствующие гибкостям  $l/r$ , сравнены со значениями  $\sigma'_{кр}$ , вычисленными для гибкостей  $kl/r$ . В таблице 8 приведено отношение  $\sigma'_{кр}/\sigma_{кр}$ .

Уменьшение критической силы для сжатых стержней со значениями гибкости  $l/r \leq 80$  составляет около 3% и достигает максимального значения 10% для гибких стержней. Однако нужно помнить, что вышеприведенные данные получены в предположении, что

Таблица 8\*)

$\frac{l}{r}$	40	50	60	80	100	108**)	120	140	160
$k \dots \dots \dots$	1,350	1,235	1,168	1,099	1,064	1,056	1,045	1,032	1,025
Отношение $\frac{\sigma'_{кр}}{\sigma_{кр}}$	0,97	0,97	0,97	0,97	0,96	0,90	0,92	0,94	0,95

\*) Вычислена для строительной стали  $\sigma_{\pi} = 1760 \text{ кг/см}^2$ ,  $\sigma_{\tau} = 2330 \text{ кг/см}^2$ .

\*\*) Соответствует условию  $\sigma_{кр} = \sigma_{\pi}$ .

$c/r_1 = 40$ . Увеличение расстояния  $c$  приводит к еще большему уменьшению несущей способности рамного сжатого стержня.

### 55. Местная потеря устойчивости составных сжатых стержней

Цель исследований, рассмотренных в §§ 53 и 54, заключалась в определении критической силы составного сжатого стержня с учетом влияния, которое может иметь

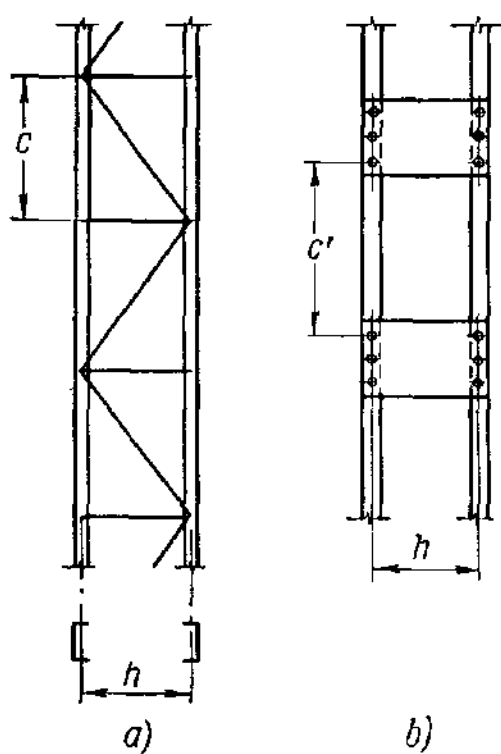


Рис. 90.

решетка или планка на его несущую способность. Но эти исследования не дают возможности точного расчета самой поперечной системы, чтобы предотвратить потерю устойчивости этих элементов до начального разрушения сжатого стержня. Составной сжатый стержень представляет собой ферму, которая разрушится, если в каком-либо элементе ее конструкции возникнет местная текучесть, прежде чем будет достигнута расчетная критическая сила  $P_{кр}$ . Следовательно, для предотвращения внезапного разрушения сжатого составного стержня необходимо установить правила расчета его элементов.

Очевидно, что каждый из двух поясов должен безопасно принимать нагрузку  $P_{кр}/2$  на длине  $c$  между двумя смежными узлами решетки (рис. 90, а) или на длине расстояния  $c'$  между заклепками в планках (рис. 90, б). Если  $kl/r$  критическое значение гибкости сжатого стержня и  $c/r_1$  — гибкость одного пояса решетчатого сжатого стержня, где  $r_1$  отсчитывается от центральной оси  $I—I$ , как

это показано на рис. 86, *b*, то должно удовлетворяться следующее неравенство:

$$\frac{c}{r_1} \leq \frac{kl}{r}.$$

Это условие остается в силе, независимо от того, происходит ли выпучивание до или после достижения предела упругости. Так как на практике значение  $k$  близко к единице, то обычно верхний предел значения  $c$  вычисляется из уравнения

$$c = \frac{r_1 l}{r}. \quad (352)$$

Аналогичное рассуждение можно применить в случае сжатых стержней с планками. Критическое значение гибкости пояса должно быть меньше, чем значение гибкости сжатого стержня

$$\frac{k_1 c'}{r_1} \leq \frac{kl}{r};$$

здесь  $k_1$  обозначает влияние заделки планки. Значение  $k_1$  лежит между единицей и 0,7. Для целей проектирования безопаснее пользоваться значением  $k_1 = 1$ , и если также положить  $k = 1$ , то в результате получим:

$$c' = \frac{r_1 l}{r}. \quad (353)$$

Во избежание всякого недоразумения будем считать, что уравнения (352) и (353) дают верхний предел значения  $c$  или  $c'$  для предотвращения местного выпучивания пояса. Но действительное значение  $c$  или  $c'$  нужно выбрать ниже этого предела с тем, чтобы уменьшение критической силы составного сжатого стержня было малым по сравнению с таковым для сплошного сжатого стержня, имеющего такую же гибкость  $l/r$ .

Роль соединительных элементов сжатого решетчатого или рамного стержня состоит в сопротивлении поперечным силам, возникающим в момент изгиба сжатого стержня при критической силе. Поперечные силы  $Q$  на концах сжатого стержня (рис. 91) представляют собой составляющие критической силы  $P_{кр}$ , перпендикулярные к изогнутой осевой линии сжатого стержня, и являются функциями прогиба  $f$ . Поскольку в положении неустойчивого равновесия  $f$  неопределенно, нельзя указать единственным образом определенного значения  $Q$ , отвечающего величине поперечных сил. Тем не менее при помощи следующего рассуждения можно получить рациональный критерий для определения величины  $Q$ . Основываясь на этом, мы сможем произвести правильный расчет соединительных элементов в целях предотвращения внезапного выпучивания любого

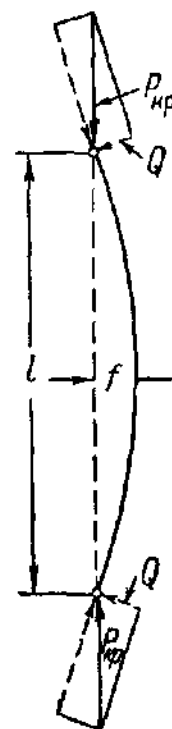


Рис. 91.

элемента соединительной решетки. Представляется целесообразным рассчитывать соединительную решетку так, чтобы ее элементы оказались способными сопротивляться поперечным силам, возникающим, когда прогиб достигает величины, отвечающей началу текучести, наблюдаемой на вогнутой стороне изогнутого сжатого стержня. Тогда наиболее напряженные части сжатого стержня будут течь или разрушаться одновременно <sup>1)</sup>.

Максимальное напряжение  $\sigma_1$  в поясе, соответствующее прогибу  $f$ , равно

$$\sigma_1 = \frac{P_{кр}}{2A} + \frac{P_{кр}f}{Ah} = \sigma_{кр} + \frac{P_{кр}f}{Ah};$$

здесь пренебрегается влиянием жесткости пояса. Из этого уравнения получается значение  $f$ , при котором  $\sigma_1$  равно пределу текучести  $\sigma_T$ :

$$f = \frac{\sigma_T - \sigma_{кр}}{P_{кр}} Ah. \quad (354)$$

В предположении синусоидального прогиба поперечная сила  $Q$  достигает своего максимального значения на концах стержня

$$Q_{\max} = P_{кр} \frac{\pi}{l} f.$$

Подставляя значение  $f$  из уравнения (354) и выразив приблизительно  $h$  через  $2r$ , где  $r$  есть радиус инерции стержня в плоскости решетки, получим следующую расчетную формулу:

$$Q_{\max} = (\sigma_T - \sigma_{кр}) \frac{\pi}{l} Ah = 2\pi (\sigma_T - \sigma_{кр}) A \frac{r}{l}. \quad (355)$$

Из кривой на рис. 92, где приведены значения  $Q_{\max}/A$  в зависимости от значений гибкости  $l/r$ , очевидно, что  $Q_{\max}$  значительно меняется с гибкостью  $l/r$ . Кривая построена на основе уравнения (355) для строительной стали ( $\sigma_{кр} = 1760 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$  и  $\sigma_T = 2330 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ ) при значении  $l/r$  между 40 и 200. Ниже значения  $l/r = 40$   $\sigma_1$  становится больше, чем  $\sigma_T$ , и уравнение (355) неприменимо. Часть кривой  $Q_{\max}/A$ , приближающейся к нулю при убывании и находящейся между значениями гибкости  $l/r = 0$  и 40, заменена несколько произвольным образом горизонтальной линией.

Были сделаны попытки определить значения поперечных сил, исходя из того, что несовершенства сжатого стержня, такие, как начальная кривизна или начальный эксцентриситет осевой нагрузки, вызывают поперечные силы, воспринимаемые элементами соедини-

<sup>1)</sup> Engesser F., Zum Einsturz der Brücke über den St. Lorenzstrom bei Quebeck, Zentralblatt der Bauverwaltung, т. 27, стр. 609, 1907.

тельной решетки<sup>1)</sup>. При этом предполагается, что начальный прогиб или эксцентриситет составляют незначительную долю длины  $l$ . Но, идя таким путем, мы вводим в расчет произвольный коэффициент, не имеющий никакого отношения к задаче о выпучивании, тогда как в вышеприведенном методе рассматривается действительное поведение конструкции в положении неустойчивости.

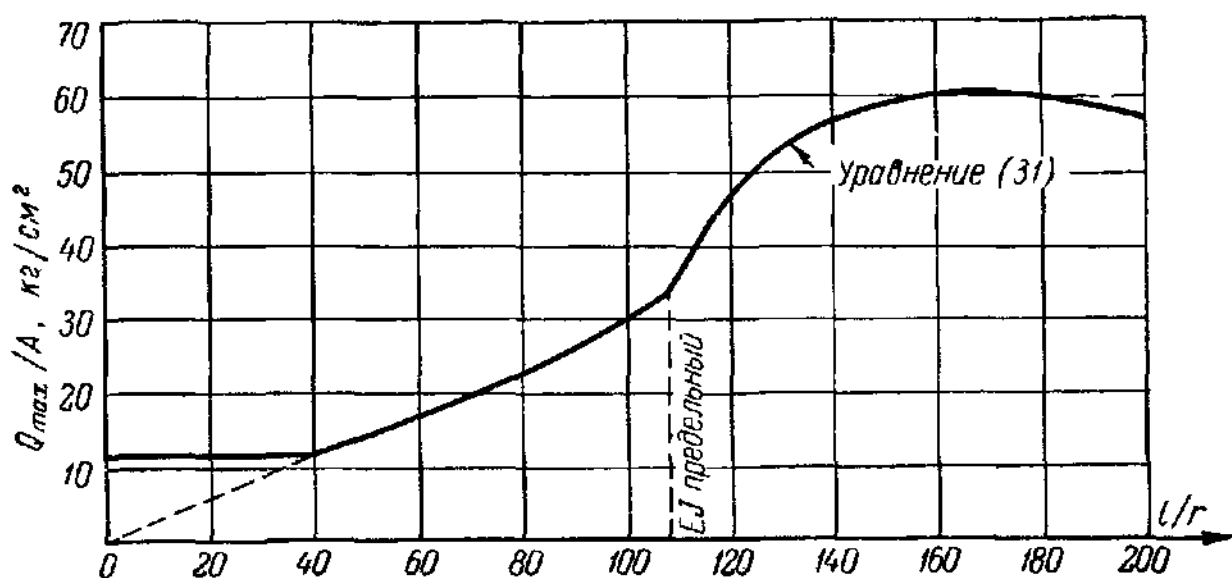


Рис. 92.

Используя уравнение (355) при проектировании элементов составных стержней, мы должны растягиваемые и изгибаемые элементы рассчитывать по пределу текучести, а сжатые элементы — по критической силе.

**Раскосы в решетчатых сжатых стержнях.** Если значение  $Q_{\max}$  вычислено по уравнению (355), то наибольшее усилие в раскосах решетки типа, показанного на рис. 86 и 87, а, определится соотношением

$$D_{\max} = Q_{\max} \frac{d}{h}, \quad (356)$$

а для сжатых стержней с двойной решеткой (рис. 87, б) будем иметь:

$$D_{\max} = Q_{\max} \frac{d}{2h}. \quad (357)$$

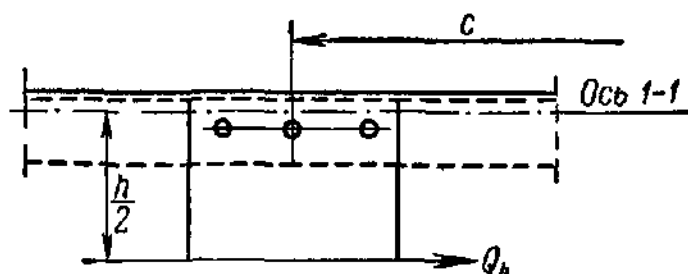


Рис. 93.

В случае сжатых стержней, имеющих двойную решетку, как это показано на рис. 87, б, следует принимать во внимание добавочные усилия в соединительных стержнях, вызванные вторичными напряжениями, которые будут рассмотрены в следующем параграфе.

<sup>1)</sup> Young D. H., Rational Design of Steel Columns, Trans. ASCE, т. 101, стр. 422, 1936.

Следует заметить, что неизбежные эксцентриситеты при монтаже соединительных стержней и поясов сжатого стержня должны быть сведены по возможности к минимуму, ибо они увеличивают деформации сдвига и уменьшают значение критической силы сжатого стержня <sup>1)</sup>.

**Соединительные планки.** Максимальное значение поперечной силы  $Q_b$ , вызывающей изгиб планок (см. рис. 89 и 93), будет

$$Q_{b \max} = Q_{\max} \frac{c}{h}. \quad (358)$$

## 56. Вторичные напряжения в решетчатых сжатых стержнях

Поскольку решетчатый сжатый стержень, по существу, представляет собой раму с треугольной решеткой и с жесткими узлами, в нем возникают вторичные напряжения, обусловленные деформацией поясов, вследствие осевой силы  $P$  перед выпучиванием. Напряжения в раскосах или распорках могут, как будет показано в дальнейшем, достигать значительных величин, особенно в случае двойной решетки.

Рассмотрим панель  $abcd$  сжатого стержня, имеющую систему двойной решетки, как это показано на рис. 94,  $a$ , в его первоначальной и деформированной после приложения нагрузки  $P$  форме. Вследствие укорочения элементов пояса  $ac$  и  $bd$  прямоугольная панель деформируется, как это показано пунктирными линиями, вызывая сжимающие напряжения в раскосах и растягивающие напряжения в вертикальных и горизонтальных элементах. Если через  $X$  обозначить неизвестное напряжение в наклонном стержне, то  $-X \sin \alpha$  будет добавочное напряжение в каждом поясе, а  $-2X \cos \alpha$  — напряжение в горизонтальных стержнях; разумеется, что последнее должно уравновесить силы в наклонных стержнях двух смежных панелей (рис. 94,  $b$ ). Можно предположить, что сила  $X$  в наклонном стержне одинакова во всех панелях и при определении этой силы достаточно рассмотреть только одну панель независимо от других.

Применяя принцип наименьшей работы, статически неопределимую силу  $X$  в раме, показанной на рис. 94,  $c$ , можно выразить в следующей форме:

$$X = \frac{\sum F_0 F_1 l}{\frac{EA'}{\sum F_1^2 l}}, \quad (359)$$

где  $F_0$  обозначает усилия в основной системе, обусловленные нагрузкой  $P$ , а  $F_1$  — усилия в той же системе при приложении

<sup>1)</sup> A m s t ü t z E., Die Knicklast gegliederter Stäbe, Schweizerische Bauzeitung, т. 118, стр. 97, 1941.

силы  $X=1$ . Здесь  $l$  обозначает длину элементов ( $l_c$ ,  $l_h$  или  $l_d$ ), а  $A'$  — их площадь (соответственно  $A$ ,  $A_h$  или  $A_d$ ). Сумма распространяется на пять элементов основной системы. В результате силы в статически неопределимой системе даются соотношением

$$F = F_0 - F_1 X. \quad (360)$$

Упрощенный расчет дает следующее выражение для напряжения  $X$  в наклонном стержне:

$$X = \frac{\frac{P}{2A_c}}{\frac{\sin \alpha}{A} + 2 \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha \cos \alpha}{A_h} + \frac{1}{A_d \sin^2 \alpha}}, \quad (361)$$

здесь  $A$ ,  $A_h$  и  $A_d$  обозначают соответственно площади поперечного сечения одного пояса, одного горизонтального стержня и одного

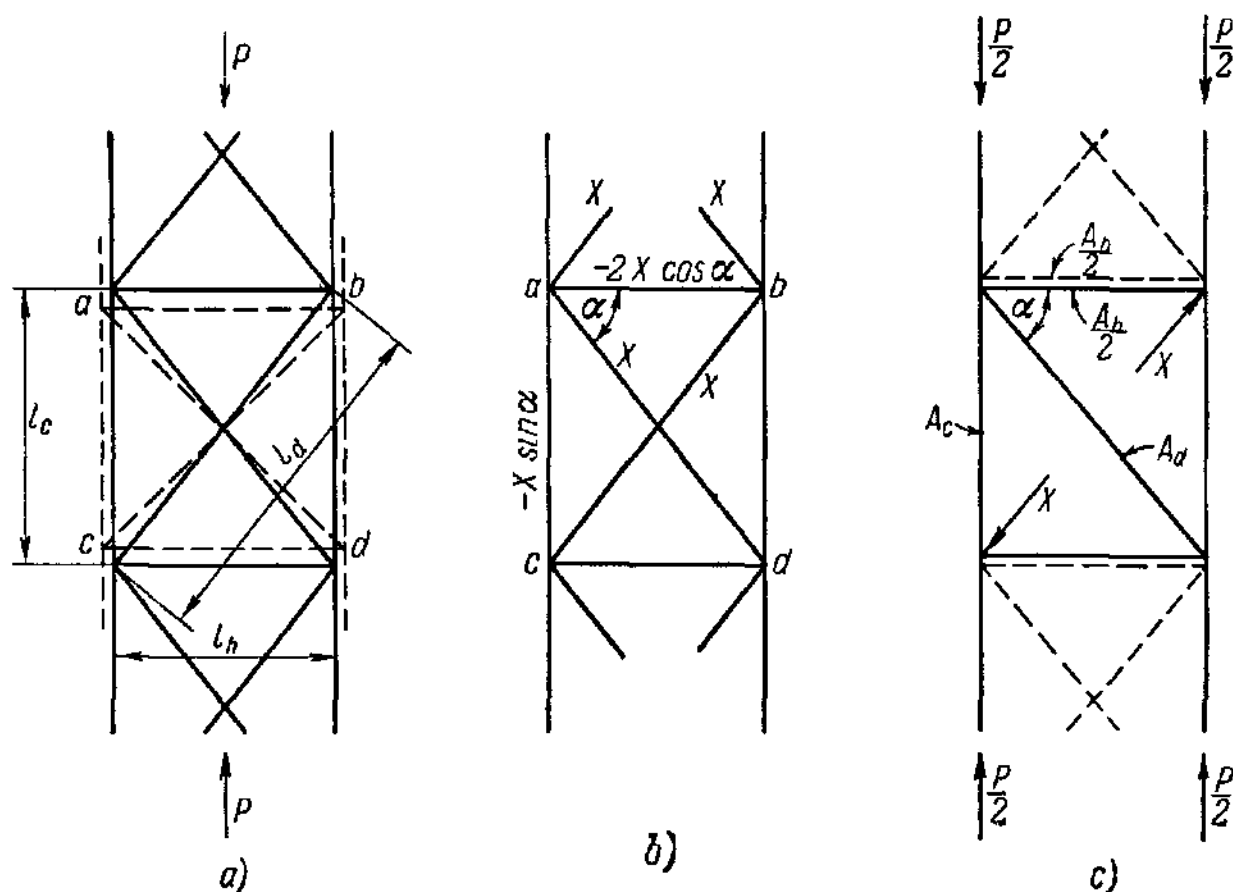


Рис. 94.

наклонного стержня. Коэффициент 2 в среднем члене знаменателя обусловлен тем, что при выводе члена предполагается, что горизонтальный элемент состоит из двух частей, площадью поперечного сечения  $0,5A_h$  каждая, принадлежащих одной из двух смежных панелей (см. рис. 94, c).

Следовательно, усилие в поясе будет

$$F_c = \frac{P}{2} - X \sin \alpha, \quad (362)$$

а в горизонтальных элементах оно равно

$$F_h = -2X \cos \alpha. \quad (363)$$

При обозначениях  $\sigma_0 = P/2A$  и  $\sigma_d = X/A_d$  уравнение (361) примет вид

$$\frac{\sigma_d}{\sigma_0} = \frac{1}{\frac{A_d}{A} \sin \alpha + 2 \frac{A_d}{A_h} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha}}. \quad (364)$$

Отношение  $\sigma_d/\sigma_0$  зависит от угла  $\alpha$  и от отношений  $A_d/A$  и  $A_d/A_h$ . Так как отношение  $A_d/A$  мало по сравнению с единицей, первым членом можно пренебречь и упростить таким образом уравнение (364):

Таблица 9. Значения отношения  $\frac{\sigma_d}{\sigma_0}$

$$\frac{\sigma_d}{\sigma_0} = \frac{\sin^2 \alpha}{1 + 2 \frac{A_d}{A_h} \cos^3 \alpha}. \quad (365)$$

$\alpha$ , градусы	30	45	60
$A_d/A_h = 1$	0,268	0,354	0,464
$A_d/A_h = 2$	0,183	0,234	0,317

В таблице 9 даны значения  $\sigma_d/\sigma_0$  для  $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  и для

$$\frac{A_d}{A_h} = 1 \text{ и } 2.$$

Эти значительные напряжения существуют в соединительных элементах перед выпучиванием, и при пренебрежении ими сопротивление соединительной системы может оказаться уменьшенным. Чтобы удержать эти напряжения в допустимых пределах, рекомендуется избегать углов  $\alpha$  больше  $45^\circ$  и по возможности уменьшить поперечные сечения горизонтальных элементов. При расчете размеров наклонных стержней в двойной решетке по уравнению (355) целесообразно предусматривать некоторый запас площади поперечного сечения этих элементов, имея в виду начальные напряжения, величина которых дается уравнением (365). Поскольку площадь поперечного сечения поясов в несколько раз больше площади поперечных сечений наклонных стержней, влияние второго члена в уравнении (362) составляет только незначительный процент от  $P/2$ . Таким образом, часть осевой силы  $P$ , воспринимаемая наклонными элементами, сравнительно мала и не имеет заметного влияния на критическую силу сжатого стержня.

Опыты, проведенные Хартманном, Муром и Холтом<sup>1)</sup> с решетчатыми рамными конструкциями, показывают, что около 6% полной осевой нагрузки воспринимается наклонными соединительными элементами решетки. Для испытанного образца вышеизложенный расчет дает напряжение в поясе, уменьшенное на 5,8 %.

<sup>1)</sup> Hartmann E. C., Moore R. L., Holt M., Model Tests of Latticed Structural Frames, Aluminum Research Lab., Tech. Paper 2, Aluminum Company of America, 1938.



### 57. Составные сжатые стержни с переменным моментом инерции

Практические нужды заставляют иногда проектировать составные сжатые стержни с переменной шириной или высотой. На рис. 95 показаны некоторые примеры. При постоянном поперечном сечении  $2A$  сжатого стержня эффективный момент инерции при изгибе

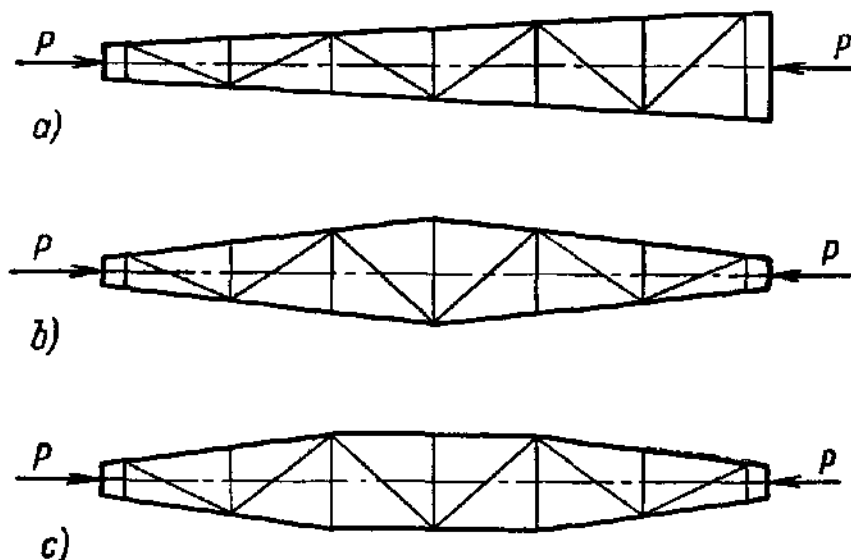


Рис. 95.

в плоскости решетки изменяется пропорционально квадрату расстояния  $h$ :

$$J = \frac{2Ah^2}{4}. \quad (366)$$

Точное решение рассмотренной частной задачи о сжатом стержне требует определения характеристических значений однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. В некоторых практически важных случаях удастся получить решение этого уравнения в элементарных трансцендентных функциях, как это будет показано в последующем.

Задача устойчивости составных сжатых стержней с переменной жесткостью была рассмотрена Динником<sup>1)</sup> в 1914 г. и Бэрстоу и Стедманом<sup>2)</sup>. Динник дал числовые таблицы для обобщенного типа сжатого стержня, показанного на рис. 95, с. Он предполагал различные параболические законы изменения жесткости в концевых частях сжатого стержня. В 1924 г. автором<sup>3)</sup> книги были даны

<sup>1)</sup> Динник А. Н., Изв. Горного ин-та, Екатеринослав, 1914; «Вестник инженеров», Москва, 1916. См. также английский перевод: Dinnik A. N., Design of Columns of Varying Cross Sections, Trans. ASME, т. 51, ч. 1, APM-51-11, 1929 и т. 54, APM-54-16, 1932.

<sup>2)</sup> Critical Loads for Long Struts of Varying Sections, Engineering, т. 98, стр. 403, 1914.

<sup>3)</sup> Bleich F., Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, стр. 136, Julius Springer, Berlin, 1924.

приближенные решения для некоторых форм сжатых стержней, основанные на энергетическом методе. Ньюмарком <sup>1)</sup> и Салвадори <sup>2)</sup> для этой задачи были разработаны мощные численные методы.

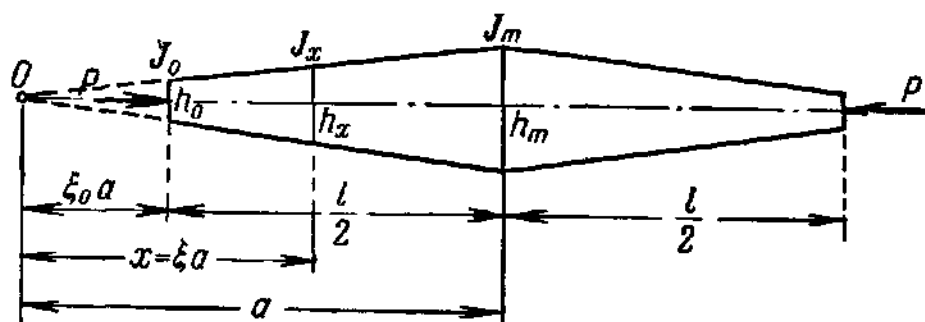


Рис. 96.

Симметричные сжатые стержни с прямыми поясами (рис. 96). Обозначая через  $J_m$  момент инерции в середине и через  $J_x$  его значение в текущей точке  $x$ , можно написать:

$$J_x = J_m \frac{h_x^2}{h_m^2} = J_m \frac{x^2}{a^2} = J_m \xi^2, \quad (367)$$

где  $\xi = \frac{x}{a}$  — безразмерная величина. Дифференциальное уравнение задачи о сжатом стержне будет

$$E_t J_x \frac{d^2 y}{dx^2} + P y = 0.$$

Подставляя  $J_x$  из уравнения (367) и вводя обозначения

$$\alpha^2 = \frac{P a^2}{E_t J_m}, \quad (368)$$

получим следующее дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами:

$$\xi^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \alpha^2 y = 0. \quad (369)$$

Общее решение этого уравнения, содержащее две произвольные постоянные  $A$  и  $B$ , будет

$$y = \sqrt{\xi} [A \sin(k \log_e \xi) + B \cos(k \log_e \xi)], \quad (370)$$

где параметр  $k$  определяется соотношением

$$k = \sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{4}}. \quad (371)$$

<sup>1)</sup> Newmark N. M., Numerical Procedure for Computing Deflections, Moments and Buckling Loads, Trans. ASCE, т. 108, стр. 1172, 1943.

<sup>2)</sup> Salvadori M. G., Numerical Computation for Buckling Loads by Finite Differences, Trans. ASCE, т. 116, 1951.

Подставляя уравнение (370) в граничные условия (рис. 96)

$$\begin{aligned}\xi = \xi_0 = \frac{h_0}{h_m} : \quad y &= 0; \\ \xi = 1 : \quad \frac{dy}{d\xi} &= 0,\end{aligned}$$

получим два однородных уравнения относительно постоянных  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned}A \sin \left( k \log_e \frac{h_0}{h_m} \right) + B \cos \left( k \log_e \frac{h_0}{h_m} \right) &= 0; \\ Ak + B/2 &= 0.\end{aligned}$$

Отличные от нуля решения для  $A$  и  $B$  существуют только, если выполняется следующее детерминантное условие:

$$\operatorname{tg} \left( k \log_e \frac{h_0}{h_m} \right) - 2k = 0. \quad (372)$$

Это уравнение имеет бесконечное число корней  $k$ , наименьший из которых  $k_1$  определяет критическую силу  $P_{\text{кр}}$ . Из уравнений (368) и (371) получим следующее выражение для критической силы

$$P_{\text{кр}} = \frac{E_t J_m}{4a^2} (1 + 4k_1^2),$$

которое можно написать также в виде

$$P_{\text{кр}} = \mu \frac{\pi^2 E_t J_m}{l^2}, \quad (373)$$

где коэффициент  $\mu$  определяется соотношением

$$\mu = \frac{1 + 4k_1^2}{4\pi^2} \left( \frac{l}{a} \right)^2 = \frac{1 + 4k_1^2}{\pi^2} \left( 1 - \frac{h_0}{h_m} \right)^2. \quad (374)$$

Таким образом,  $P_{\text{кр}}$  определяется как критическая сила сжатого стержня постоянного поперечного сечения с эквивалентным моментом инерции  $J = \mu J_m$ ; коэффициент  $\mu$  определяется уравнением (374). В таблице 10 приведены значения  $\mu$  для различных отношений  $h_0/h_m$ .

Т а б л и ц а 10. Значения коэффициента  $\mu$  в уравнении (373) для сжатых стержней, показанных на рис. 96

$h_0/h_m$	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\mu^*)$	0,101	0,349	0,449	0,610	0,749	0,881	1,000

\*) Для промежуточных значений  $h_0/h_m$  следует использовать линейную интерполяцию.

**Несимметричные сжатые стержни с прямыми поясами (рис. 97).** Исследование сжатого стержня этого типа приводит опять к решению,

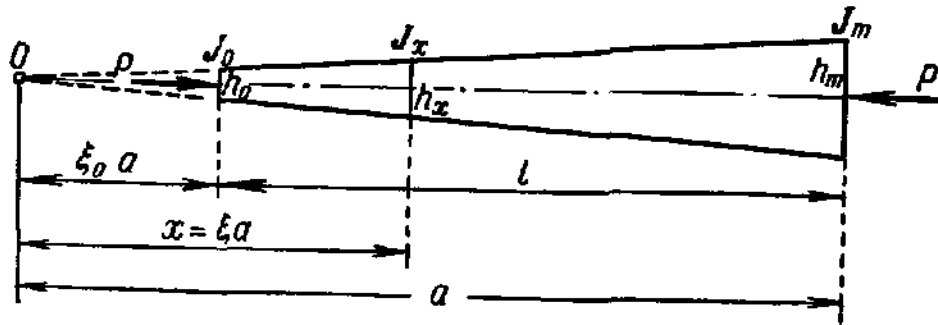


Рис. 97.

данному уравнению (370). Требование выполнения граничных условий

$$\begin{aligned} \xi = \xi_0 = \frac{h_0}{h_m}: \quad y &= 0; \\ \xi = 1: \quad y &= 0 \end{aligned}$$

приводит к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} A \sin \left( k \log_e \frac{h_0}{h_m} \right) + B \cos \left( k \log_e \frac{h_0}{h_m} \right) &= 0; \\ B &= 0, \end{aligned}$$

относительно  $A$  и  $B$ . Следовательно, условие устойчивости будет

$$\sin \left( k \log_e \frac{h_0}{h_m} \right) = 0. \quad (375)$$

Наименьший нетривиальный корень этого уравнения равен

$$k_1 = \frac{\pi}{\log_e h_0 - \log_e h_m}.$$

Используя уравнения (368) и (371), получим следующее выражение для критической силы:

$$P_{кр} = \mu \frac{\pi^2 E_t J_m}{l^2}, \quad (376)$$

где

$$\mu = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{h_0}{h_m} \right)^2 \left[ \frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{(\log_e h_0 - \log_e h_m)^2} \right]. \quad (377)$$

В таблице 11 приведены значения  $\mu$ , вычисленные на основе уравнения (377) для различных отношений  $h_0/h_m$ .

**Симметричные сжатые стержни с параболическими поясами (рис. 98).** В обозначениях, приведенных на рис. 98, момент инерции будет равен

$$J_x = J_m \frac{h_x^3}{h_m^3} = \frac{16 J_m}{a^4} x^2 (a - x)^2.$$

Таблица 11. Значения коэффициента  $\mu$  в уравнении (376) для сжатых стержней, показанных на рис. 97

$h_0/h_m$	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\mu$ *)	0,025	0,173	0,263	0,438	0,618	0,804	1,000

\*) Для промежуточных значений  $h_0/h_m$  следует использовать линейную интерполяцию.

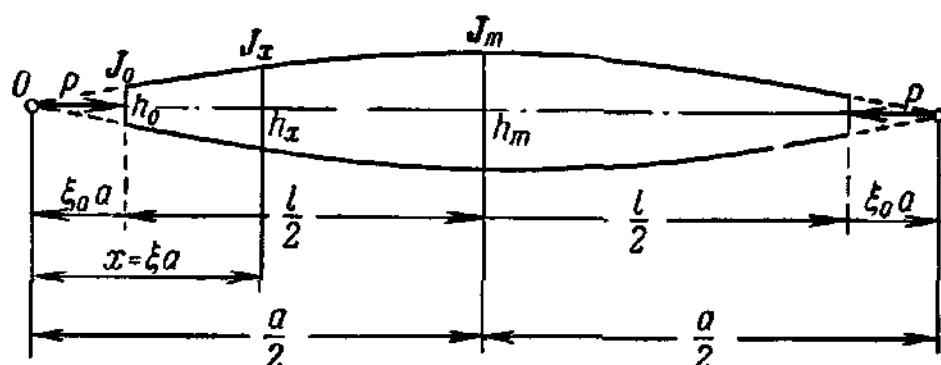


Рис. 98.

Дифференциальное уравнение задачи устойчивости при  $x = \xi a$  принимает следующий вид:

$$\xi^2 (1 - \xi)^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \alpha^2 y = 0, \quad (378)$$

где

$$\alpha^2 = \frac{Pa^2}{16E_t J_m}. \quad (379)$$

Общим решением уравнения (378) будет

$$y = \sqrt{\xi(1-\xi)} \left[ A \cos\left(\frac{k}{2} \log_e \frac{\xi}{1-\xi}\right) + B \sin\left(\frac{k}{2} \log_e \frac{\xi}{1-\xi}\right) \right]; \quad (380)$$

здесь

$$k = \sqrt{4\alpha^2 - 1}.$$

Используя граничные условия

$$\begin{aligned} \xi = \xi_0: & \quad y = 0; \\ \xi = 1 - \xi_0: & \quad y = 0, \end{aligned}$$

получим два линейных однородных уравнения:

$$\begin{aligned} A \cos\left(\frac{k}{2} \log_e \frac{\xi_0}{1-\xi_0}\right) + B \sin\left(\frac{k}{2} \log_e \frac{\xi_0}{1-\xi_0}\right) &= 0; \\ A \cos\left(\frac{k}{2} \log_e \frac{1-\xi_0}{\xi_0}\right) + B \sin\left(\frac{k}{2} \log_e \frac{1-\xi_0}{\xi_0}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Равенство нулю детерминанта, составленного из коэффициентов этих двух уравнений, даст нам условие устойчивости

$$\sin\left(k \log_e \frac{\xi_0}{1-\xi_0}\right) = 0. \quad (381)$$

Наименьший корень этого уравнения

$$k_1 = \frac{\pi}{\log_e (\xi_0/1-\xi_0)} \quad (382)$$

определяет характеристическое значение  $k_1$ , которое соответствует критической силе  $P_{кр}$ .

Опять мы можем написать:

$$P_{кр} = \mu \frac{\pi^2 E_t J_m}{l^2}, \quad (383)$$

где  $\mu$  определяется соотношением

$$\mu = \frac{4(k_1^2 + 1)}{\pi^2} \left(\frac{l}{a}\right)^2. \quad (384)$$

Значение  $k_1$  дано уравнением (382). В таблице 12 показаны значения  $\mu$  в функции от отношения  $h_0/h_m$ .

Т а б л и ц а 12. Значения коэффициента  $\mu$  в уравнении (383) для сжатых стержней, показанных на рис. 98

$h_0/h_m$	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\mu^*)$	0,405	0,636	0,709	0,807	0,882	0,945	0,000

\*) Для промежуточных значений  $h_0/h_m$  следует использовать линейную интерполяцию.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

К §§ 52—56

Von E m p e r g e r F., Welchen Querverband bedarf eine Eisensäule, Beton und Eisen, т. 7, стр. 71, 96, 119, 148, 193, 1908.

T a l b o t A. N. and H. F. M o o r e, An Investigation of Built-up Columns under Load, Univ. Illinois Eng. Expt. Sta. Bull. 44, 1910.

R u d e l o f f H., Knickversuch mit einer Strebe des eingestürzten Hamburger Gasbehälters, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, т. 57, стр. 615, 1913.

P e t e r m a n n A., Müller-Breslau's Knickversuche mit Rahmenstäben. Der Bauingenieur, т. 7, стр. 979, 1009, 1926.

K a y s e r H., Knickversuche mit doppelteiligen Rahmenstäben, Die Bau-technik, т. 12, 1930.

American Society of Civil Engineers, Steel Column Research, 2d Progress Rept. Special Committee, Trans. ASCE, т. 95, стр. 1152, 1931.

American Society of Civil Engineers, Steel Column Research, Final Rept. Special Committee, Trans. ASCE, т. 98, стр. 1414—1432, 1933.

Ratzersdorfer J., Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken, стр. 201—243, Julius Springer, Vienna, 1936.

Sergev S. I., Shear Effect on the Strength of Struts, Trans. ASCE, т. 110, стр. 391, 1945.

### К § 57

Morley A., Critical Loads for Long Tapering Struts, Engineering, т. 104, стр. 295, 1917.

Barling W. H., Webb H. A., Design of Aeroplane Struts, Jour. Roy. Aeronaut. Soc., т. 22, стр. 313, 1918.

Webb H. A., Long E. D., Struts of Conical Taper, Jour. Roy. Aeronaut. Soc., т. 23, стр. 179, 1919.

Ono A., On the Stability of Long Struts of Variable Section, Mem. Coll. Eng., Kyushu Imp. Univ., т. 1, No. 5, 1919.

Boyd J. E., Tapered Struts, a Theoretical and Experimental Investigation, Ohio State Univ. Eng. Exp. Sta. Bull., 25, 1923.

Wilcken J. A., The Bending of Columns of Varying Cross Section, Phil. Mag., Series 7, т. 3, стр. 418, 1065, 1927 и т. 13, стр. 845, 1932.

Lockschin A., Ueber die Knickung eines doppelwandigen Druckstabes mit parabolisch veränderlicher Querschnittshöhe, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. 10, стр. 160, 1930.

Kiessling F., Eine Methode zur approximativen Berechnung einseitig eingespannter Druckstäbe mit veränderlichem Querschnitt, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. 10, стр. 594, 1930.

Radomski B., Compression Struts with Non Progressively Variable Moment of Inertia, NACA Tech. Mem. 861, 1938, translated from Luftfahrt—Forschung, т. 14, стр. 438, 1937.

Harris C. O., Suggestions for Columns of Varying Sections, Jour. Aeronaut. Sci., т. 9, стр. 97, 1942.

Turton F. J., Pinned-pinned Solid Strut with Parabolic Taper, Jour. Roy. Aeronaut. Soc., т. 46, стр. 146, 1942.

Ratzersdorfer J., Determination of the Buckling Load of Struts by Successive Approximations, Jour. Roy. Aeronaut. Soc., т. 47, стр. 103, 1943.

Templeton H., Approximate Solution for Tapered Pin Ended Struts, Jour. Roy. Aeronaut. Soc., т. 48, стр. 6, 1944.

Young D. H., Inelastic Buckling of Variable Section Columns, Trans. ASME, т. 67, стр. A-165, 1945.

Miesse C. C., Determination of the Buckling Load for Columns of Variable Stiffness, Jour. Applied. Mechanics, т. 71, стр. 406, 1949.

---

## ГЛАВА VI УСТОЙЧИВОСТЬ РАМ

### 58. Введение

Различные типы стержневых систем, такие, как заклепочные или сварные фермы, жесткие рамы, сжатые стержни с промежуточными жесткими или упругими опорами, и другие подобные конструкции играют важную роль в строительном деле. Поэтому такие вопросы, как поведение сжатого стержня как части фермы или устойчивость всей системы жесткой рамы, для инженера-строителя являются важнейшими. Жесткие соединения элементов стержневой системы являются причиной того, что изгиб одного элемента в состоянии выпучивания вызывает деформацию других элементов конструкции. Каждый элемент связан упругой заделкой с остальными, и степень заделки какого-либо одного элемента зависит от изгибной жесткости и осевой нагрузки всех остальных. Отсюда ясно, что для получения истинного условия выпучивания всей системы или для удовлетворительного анализа реального поведения сжатого элемента или некоторой группы таких элементов, входящих в стержневую систему, необходимо исследование ее устойчивости. Эта глава посвящается главным образом изложению общих методов исследования, которые были разработаны для решения различных задач о выпучивании, возникающих при изучении рамных конструкций. Применение этих методов к исследованию специальных типов стержневых систем составит содержание двух следующих глав.

Теория устойчивости стержневых систем обстоятельно разработана для конструкций, где элементы подвержены действию только осевых сил. Ниже рассматриваются главным образом такие системы. Изучение влияния начальных или вторичных изгибающих моментов, действующих на стержневую систему в период ее перехода от устойчивого равновесия к неустойчивому, не связано с большими трудностями. Значение этой очень важной задачи и изыскание возможности ее решения будут рассмотрены в последнем параграфе этой главы.

Рассматривая различные методы решения задач устойчивости стержневых систем, можно отчетливо увидеть три существенно раз-



личных подхода к вопросу соответственно методам исследования статически неопределимых жестких рам. Сюда относятся:

1. Прямое аналитическое рассмотрение вопроса путем установления и решения системы линейных однородных уравнений, связывающих осевые силы перемещения и вращения жестких узлов и моменты, действующие в них. Критерий устойчивости выражается равенством нулю некоторого детерминанта.

2. Энергетический метод, основанный на энергетическом критерии устойчивости, также приводит к системе линейных уравнений. Критерий устойчивости снова получается в виде равенства нулю соответствующего детерминанта.

3. Метод последовательных приближений, использующий принципы распределения моментов, видоизмененных для учета изгибного влияния осевых сил.

Задача о выпучивании стержневой системы была рассмотрена Циммерманном<sup>1)</sup>, который в ряде работ исследовал прямые сжатые стержни с промежуточными жесткими или упругими опорами. Он отчетливо сформулировал задачу устойчивости системы жестко соединенных стержней, образующих прямой сжатый стержень, и получил выражение для критической осевой силы в виде детерминанта. Задачи, связанные с устойчивостью систем жестко соединенных стержней, были рассмотрены Мюллер-Бреслау<sup>2)</sup> в связи с исследованием выпучивания верхнего пояса ферм открытого моста.

В 1919 г. Блейх<sup>3)</sup> опубликовал систематическое исследование устойчивости плоских стержневых систем с жесткими узлами, проведенное применительно к общему решению задачи для всех типов рамных конструкций, рассмотренных в этой главе. Благодаря введению понятия приведенного модуля оказалось возможным применить теорию в упругой и пластической областях выпучивания. Осгуд<sup>4)</sup> применил уравнения четырех моментов этой теории к специальной задаче об определении свободных длин сжатых элементов в авиационных конструкциях. В 1928 г. Ф. Блейх и Г. Блейх<sup>5)</sup> опубликовали

---

<sup>1)</sup> Zimmermann H., Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit mehreren Feldern, Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, 1909, стр. 180; Die Knickfestigkeit der Druckgurte offener Brücken, W. Ernst und Sohn, Berlin, 1910; Die Knickfestigkeit der Stabverbindungen, W. Ernst und Sohn, Berlin, 1925.

<sup>2)</sup> Müller-Breslau H., Die graphische Statik der Bau-Konstruktionen, т. II-2, A. Kröner, Berlin, 1908.

<sup>3)</sup> Bleich F., Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen, Der Eisenbau, т. 10, стр. 27, 1919; Einige Aufgaben über die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen, Der Eisenbau, т. 13, стр. 34, 1922.

<sup>4)</sup> Osgood W. R., Contribution to the Design of Compression Members in Aircraft, Natl. Bur. Standards (U. S.), Journ. Research, Research Paper RP 698, 1934.

<sup>5)</sup> Bleich F., Bleich H., Die Stabilität räumlicher Stabverbindungen, Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur-und Architektenvereines, 1928, стр. 345.

общий метод решения задач выпучивания в смежной области пространственных стержневых систем, основанный на тех же принципах, что и вышеупомянутая двумерная теория.

В общем виде задача устойчивости шарнирных стержневых систем была рассмотрена Мизесом и Ратцерсдорфером<sup>1)</sup>, которые использовали ее для всестороннего исследования шарнирной фермы с параллельными поясами, схематизируя ее решетчатой стойкой.

В другой работе Мизес и Ратцерсдорфер<sup>2)</sup> дали детальное изложение задачи о стержневых системах с жесткими узлами, распространяя исследования также на системы, в которых изменение длин элементов, обусловленное осевыми силами, влияет на условие устойчивости. Математически это исследование идентично исследованию Блейха и отличается от последнего лишь выбором типа основных моментных соотношений, на которых оно базируется.

Метод деформаций, примененный Хвалла и Йокиш<sup>3)</sup> к изучению устойчивости многоэтажных рам, также принадлежит к категории рассмотренных выше аналитических методов. В 1936 г. Прагер<sup>4)</sup> разработал метод исследования устойчивости стержневых систем, отправляясь от аналитического условия устойчивости сжатого стержня с упруго вращающимися и перемещающимися узлами.

Казарновский и Зеттергольм<sup>5)</sup> применили энергетический метод к исследованию устойчивости длинных сжатых стержней, упруго опертых на промежуточных равноудаленных точках. В 1937 г. Ф. Блейх и Г. Блейх<sup>6)</sup> опубликовали более общее решение этой задачи, полученное энергетическим методом.

В 1937 г. Лундквист<sup>7)</sup>, используя метод расчета статически неопределимых систем, основанный на принципе распределения моментов, разработал метод для исследования устойчивости стержневых

---

<sup>1)</sup> Von Mises R., Ratzersdorfer J., Die Knicksicherheit von Fachwerken, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. 5, стр. 218, 1925.

<sup>2)</sup> Von Mises R., Ratzersdorfer J., Die Knicksicherheit von Rahmentragwerken, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. 6, стр. 181, 1926. Ratzersdorfer J., Die Knicksicherheit von Stäben und Stabwerken, Julius Springer, Vienna, 1936.

<sup>3)</sup> Chwalla E., Jokisch F., Über das ebene Knickproblem des Stockwerkrahmens, Der Stahlbau, т. 14, стр. 33, 1941.

<sup>4)</sup> Prager W. Elastic Stability of Plane Frameworks, Jour. Aeronaut. Sci., т. 3, стр. 388, 1936.

<sup>5)</sup> Kasarnowsky S., Zetterholm D., Zur Theorie der Seitensteifigkeit offener Fachwerkbrücken, Der Bauingenieur, т. 8, стр. 760, 1927.

<sup>6)</sup> Bleich F., Bleich H., Beitrag zur Stabilitätsuntersuchung des punktwise elastisch gestützten Stabes, Der Stahlbau, т. 10, стр. 17, 1937.

<sup>7)</sup> Lundquist E. E., Stability of Structural Members under Axial Load, NACA Tech. Note 617, 1937; Method for Estimating the Critical Buckling Load for Structural Members, NACA Tech. Note 717, 1939; Principles of Moment Distribution Applied to Stability of Structural Members, Proc. 5th Intern. Congr. Applied Mechanics, 1938, стр. 145.

систем с жесткими узлами и установил при этом критерий жесткостей и критерий рядов.

Исходя из энергетических соображений, Хофф<sup>1)</sup> дал строгое доказательство сходимости и единственности решения для метода распределения моментов в случае устойчивого равновесия под действием внешних сил. Из этого доказательства непосредственно вытекает критерий устойчивости Хоффа.

Недавно Боли<sup>2)</sup> применил к исследованию устойчивости стержневых систем метод релаксации Саутвелла.

Антисимметричное выпучивание (боковое) простых прямоугольных жестких рам было рассмотрено Винтером и др.<sup>3)</sup>

Исследованию устойчивости стержневых систем были посвящены также немногие экспериментальные работы. В 1918 г. Энгессер<sup>4)</sup> сообщил об опытах, проведенных на малых моделях упруго заделанных сжатых стержней. Недавно Хофф<sup>5)</sup> в целях проверки вычисленного значения разрушающей нагрузки провел тщательные опыты на моделях фермы и получил обнадеживающие результаты.

## 59. Аналитический критерий устойчивости плоских рамных систем. Метод Блейха

В излагаемой ниже теории<sup>6)</sup> мы ограничимся исследованием устойчивости плоских рамных систем в их плоскости. В теории предполагается, что перед выпучиванием элементы подвержены действию только осевых сил и что действующие на систему внешние силы никаких изгибающих моментов не вызывают в элементах конструкции. Кроме того, мы считаем, что все элементы прямые, имеют постоянные поперечные сечения, центрально нагружены и что направление внешних сил остается при деформации конструкции неизменным.

Обычно внешние и внутренние силы находятся в положении устойчивого равновесия. Однако при некоторых условиях нагружения существует другое положение равновесия, характеризующееся

1) Hoff N. J., Instability of Aircraft Frameworks, статья представлена the 2d Annual Summer Meeting of the Institute of Aeronautical Sciences, California, 1940; Stable and Unstable Equilibrium of Plane Frameworks, Jour. Aeronaut. Sci., т. 8, стр. 115, 1941; The Proportioning of Aircraft Frameworks, Jour. Aeronaut. Sci., т. 8, стр. 319, 1941; Stress Analysis of Aircraft Frameworks, Proc. Roy. Aeronaut. Soc., т. 45, № 367, стр. 241, 1941.

2) Boley B. A., Numerical Methods for the Calculation of Elastic Instability; Paper presented at the Institute of Aeronautical Sciences, January, 1947.

3) Winter G., Hsu P. T., Koo B., Loh M. H., Buckling of Trusses and Rigid Frames, Cornell Univ. Eng. Expt. Sta. Bull. 36, Ithaca, N. Y.

4) Engesser F., Versuche und Untersuchungen über den Knickwiderstand des selbstlich gestützten Stabes, Der Eisenbau, т. 9, стр. 28, 1918.

5) Hoff N. J., Boley B. A., Nardo S. V., Kaufman S., Summary of Buckling of Rigid Jointed Plane Trusses, Trans. ASCE, 1951.

6) Блейх, цит. выше, стр. 221.

появлением изгибающих моментов в элементах рамной системы. На рис. 99 изображен такой случай. Как будет показано в последующем, это есть случай неустойчивого равновесия между внутренними и внешними силами. Примером этого случая может служить рас-

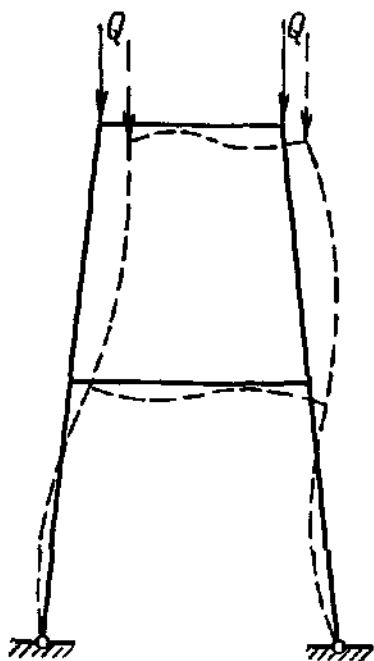


Рис. 99.

смотренный в главе I шарнирно опертый сжатый стержень. В таком состоянии неустойчивости внешние нагрузки и осевые силы в элементах, находящиеся в равновесии непосредственно перед переходом от устойчивого к неустойчивому положению, больше не образуют уравновешенной группы сил, так как внешние силы вследствие деформации всей системы меняют свое положение (но не направление), чтобы восстановить равновесие. Возникающие добавочные осевые и поперечные силы и добавочные моменты<sup>1)</sup> обуславливают тенденцию системы к состоянию равновесия. Их величины имеют порядок, соответствующий перемещениям в положении неустойчивого равновесия.

Соотношения между перемещениями узлов и добавочными силами и моментами образуют основные уравнения, из которых получается условие устойчивости рамы. Эти соотношения, называемые уравнениями устойчивости, образуют систему линейных однородных уравнений. Неизвестными в этих уравнениях являются добавочные силы и моменты, перемещения узлов и вращения стержней, а коэффициенты при этих неизвестных являются функциями размеров конструкции и осевых сил  $P$ , обусловленных нагрузками, действующими на конструкции.

В силу линейности и однородности уравнений устойчивости они удовлетворяются нулевыми значениями неизвестных. Это соответствует отсутствию деформаций и добавочных сил и отвечает устойчивому положению рамы. Конечные значения неизвестных, указывающие на появление добавочных сил и деформаций, существуют только тогда, когда детерминант  $\Delta$  системы уравнений устойчивости равен нулю. Следовательно, критерий  $\Delta = 0$  дает те частные значения внешних сил, которые соответствуют рассмотренному здесь особому положению равновесия. Вообще существует бесконечное число решений уравнения  $\Delta = 0$ , определяющих бесконечное число различных форм неустойчивого равновесия. Форма, соответствующая наименьшему значению нагрузки, и определяет критическое нагружение рамы.

<sup>1)</sup> Силы и моменты, возникающие в выпученном положении, рассматриваются добавочными поперечными силами и добавочными моментами, хотя перед выпучиванием никакие перерезывающие силы и моменты на элементы не действуют.

Формы равновесия, определяемые условием  $\Delta = 0$ , характеризуются тем, что деформация системы не определена по величине, так как ненулевые решения системы однородных линейных уравнений всегда содержат произвольный множитель. Далее, значения решений системы уравнений становятся бесконечными, если заменить один из нулей в левой части уравнений членом, содержащим нагрузку — малую нагрузку, прибавленную к уже имеющейся критической силе. Физически это означает, что достаточно воздействия на элемент малейшего возмущающего момента, чтобы он не смог вернуться к своему первоначальному положению, когда возмущающие силы перестанут действовать. Как было уже указано, такая система находится в положении неустойчивого равновесия.

Уравнение  $\Delta = 0$  определяет критическое состояние или, говоря более точно, переход из устойчивого равновесия к неустойчивому и представляет собой аналитический критерий устойчивости для рамы.

Детерминант  $\Delta$  является функцией системы нагрузок, действующих на раму. Это нагружение может быть охарактеризовано параметром нагрузки  $\lambda$ , который в результате представляет собой неизвестную величину в условии устойчивости  $\Delta = 0$ . Так как  $\Delta$  является трансцендентной функцией  $\lambda$ , из условия устойчивости получается бесконечное число корней  $\lambda$ , определяющих, таким образом, бесконечное число форм неустойчивого равновесия. Форма, соответствующая наименьшему корню  $\lambda_1$ , определяет первое возможное выпученное состояние, указывающее на существование положения неустойчивого равновесия, находящегося бесконечно близко к устойчивой его форме (бифуркация равновесного состояния). Следовательно,  $\lambda_1$  определяет критическое нагружение.

Аналогическое решение задачи устойчивости простой рамы, состоящей из нескольких элементов, нетрудно. Исходя из дифференциального уравнения изогнутой осевой линии прямого стержня и решая получающуюся в результате систему совместных дифференциальных уравнений с учетом особых концевых условий каждого из элементов, получим систему линейных уравнений, детерминант которой приводит к условию устойчивости. Подобные исследования содержатся в некоторых более ранних работах. Однако в случае более сложной рамы этот метод становится весьма трудоемким и малодоступным.

Изложенный ниже метод основывается на идее установления системы линейных соотношений между моментами в узлах и углами поворота стержней. Этих двух групп параметров, как будет показано ниже, достаточно, чтобы единственным образом описать любую форму неустойчивого положения рамы. В качестве параметров выбраны моменты и углы поворота стержней, ибо с их помощью напряжения и деформации рамы могут быть описаны наиболее естественно, в простой математической форме.

Вводимые в теории ограничения были уже перечислены в начале этого параграфа: прямолинейность стержней постоянного поперечного сечения, их центральное нагружение и неизменность направления внешних сил при деформациях. Добавим еще следующие условия:

Узлы рамы являются абсолютно жесткими, но отдельные элементы могут быть шарнирно соединены с узлами.

Элементы центрально сжаты или растянуты, но некоторые элементы могут вовсе не воспринимать нагрузки.

Теория устойчивости плоской рамы, составленной из прямолинейных элементов и подверженной действию нагрузок, находящихся в ее плоскости, опирается на основное дифференциальное уравнение теории касательного модуля, изложенной в главе I <sup>1)</sup>:

$$EJ_{\tau} \frac{d^2 y}{dx^2} + M_x = 0, \quad (385)$$

где  $y$  — прогиб на расстоянии  $x$  от левого конца элемента;  $M_x$  — изгибающий момент в точке  $x$ , обусловленный силами, действующими на изогнутый элемент в его деформированном состоянии;  $J$  — постоянный момент инерции элемента при изгибе в плоскости рамы;

$\tau = E_t/E$  ( $E_t$  — касательный модуль); величина  $\tau$  равна единице, если среднее напряжение  $P/A$  лежит в упругой области, но является функцией от  $P/A$ , если значение среднего напряжения превышает предел пропорциональности.

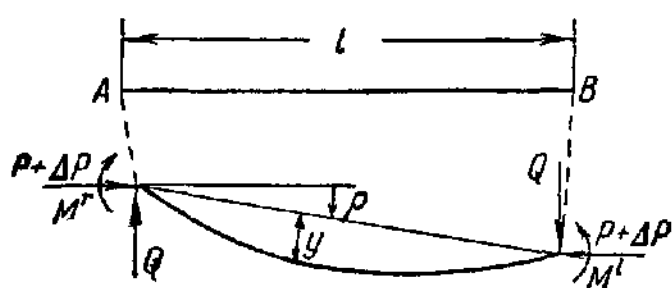


Рис. 100

Рассмотрим элемент  $AB$  длиной  $l$ , показанный на рис. 100.

В его изогнутом состоянии на него действуют следующие силы: первоначальная осевая сила  $P$ , обусловленная нагрузками, действующими на раму; добавочные силы  $\Delta P$  и  $Q$  и добавочные моменты  $M^r$  и  $M^l$ . На рис. 100 показаны прогибы, силы и моменты с положительными знаками. В случае, когда стержень является частью замкнутой жесткой рамы, вышеприведенное правило знаков следует применять, рассматривая каждый элемент изнутри рамы. Таким образом, прогиб  $y$  считается положительным, когда стержень изгибается внутрь, а момент — когда он вызывает растяжение во внутреннем поясе элемента. Вращение хорды стержня  $\rho$  положительно, когда он вращается по часовой стрелке вокруг левого конца. Перемещения, добавочные силы и моменты предполагаются малыми по сравнению с размерами стержня, так что можно пренебречь их произведениями и квадратами; это предположение приводит к линейной теории устойчивости рам.

<sup>1)</sup> Уравнение (19) получается из уравнения (385), если подставить  $M_x = Py$ .

Изгибающий момент на расстоянии  $x$  от точки  $A$  после исключения поперечной силы  $Q$  можно написать в следующем виде:

$$M_x = M^r \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M^l \frac{x}{l} + Py;$$

здесь опущено произведение второго порядка  $\Delta P y$ . Следовательно, уравнение (385) будет

$$EJ\tau \frac{d^2 y}{dx^2} + Py + M^r \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M^l \frac{x}{l} = 0. \quad (386)$$

Легко проверить, что выражение

$$y = \frac{M^r}{P} \left[ \frac{\sin \varphi \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{\sin \varphi} - 1 + \frac{x}{l} \right] + \frac{M^l}{P} \left[ \frac{\sin \varphi \frac{x}{l}}{\sin \varphi} - \frac{x}{l} \right] \quad (387)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (386) и условиям на концах  $y=0$  при  $x=0$  и  $x=l$ . Параметр  $\varphi$ , называемый коэффициентом устойчивости, определяется соотношением

$$\varphi = l \sqrt{\frac{P}{EJ\tau}}. \quad (388)$$

Уравнение (387) применимо, когда второй член  $Py$  в уравнении (386) положителен, т. е. когда  $P$  есть сжимающая сила. В случае растягивающей силы  $P$  отрицательно и  $\varphi$  мнимо, но выражение (387) останется пригодным, если только тригонометрические функции заменить соответствующими гиперболическими функциями.

**Уравнения четырех моментов.** Первую группу уравнений устойчивости, выражающих условие непрерывности в узле, где соединяются два или более элементов, можно получить из уравнения (387). На рис. 101 показаны два последовательных стержня  $l_k$  и  $l_{k+1}$  рамы под действием сил  $P_k$  и  $P_{k+1}$  в их первоначальном перемещенном и деформированном положениях в состоянии выпучивания. Изгибные жесткости двух элементов равны  $EJ_k \tau_k$  и  $EJ_{k+1} \tau_{k+1}$  (с учетом того, что  $\tau$  может меняться от элемента к элементу).

Оба стержня соединены жестким узлом  $k$ , и, ради общности, предполагается, что и другие стержни также жестко присоединены в той же точке. Добавочные концевые моменты в рассмотренных двух элементах обозначим через  $M_{k-1}^r$ ,  $M_k^l$  и  $M_k^r$ ,  $M_{k+1}^l$ . Так как предполагается, что  $k$  является абсолютно жестким узлом, то угол  $\theta_k = \rho_k + \psi_k$  равен углу  $\theta_{k+1} = \rho_{k+1} + \psi_{k+1}$ . Следовательно, условие непрерывности выражается в виде

$$\rho_k + \psi_k = \rho_{k+1} + \psi_{k+1}; \quad (389)$$

здесь  $\rho_k$  и  $\rho_{k+1}$  углы поворота хорд стержней;  $\psi_k$  и  $\psi_{k+1}$  — углы наклона упругих линий в узле  $k$ . Так как

$$\psi_k = \left[ \frac{dy_k}{dx} \right]_{x=l_k} \quad \text{и} \quad \psi_{k+1} = \left[ \frac{dy_{k+1}}{dx} \right]_{x=0},$$

то из уравнения (387) можно получить следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \psi_k &= \frac{M_{k-1}^r}{P_k l_k} \left( -\frac{\varphi_k}{\sin \varphi_k} + 1 \right) + \frac{M_k^l}{P_k l_k} (\varphi_k \operatorname{ctg} \varphi_k - 1); \\ \psi_{k+1} &= \frac{M_k^r}{P_{k+1} l_{k+1}} (-\varphi_{k+1} \operatorname{ctg} \varphi_{k+1} + 1) + \frac{M_{k+1}^l}{P_{k+1} l_{k+1}} \left( \frac{\varphi_{k+1}}{\sin \varphi_{k+1}} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (390)$$

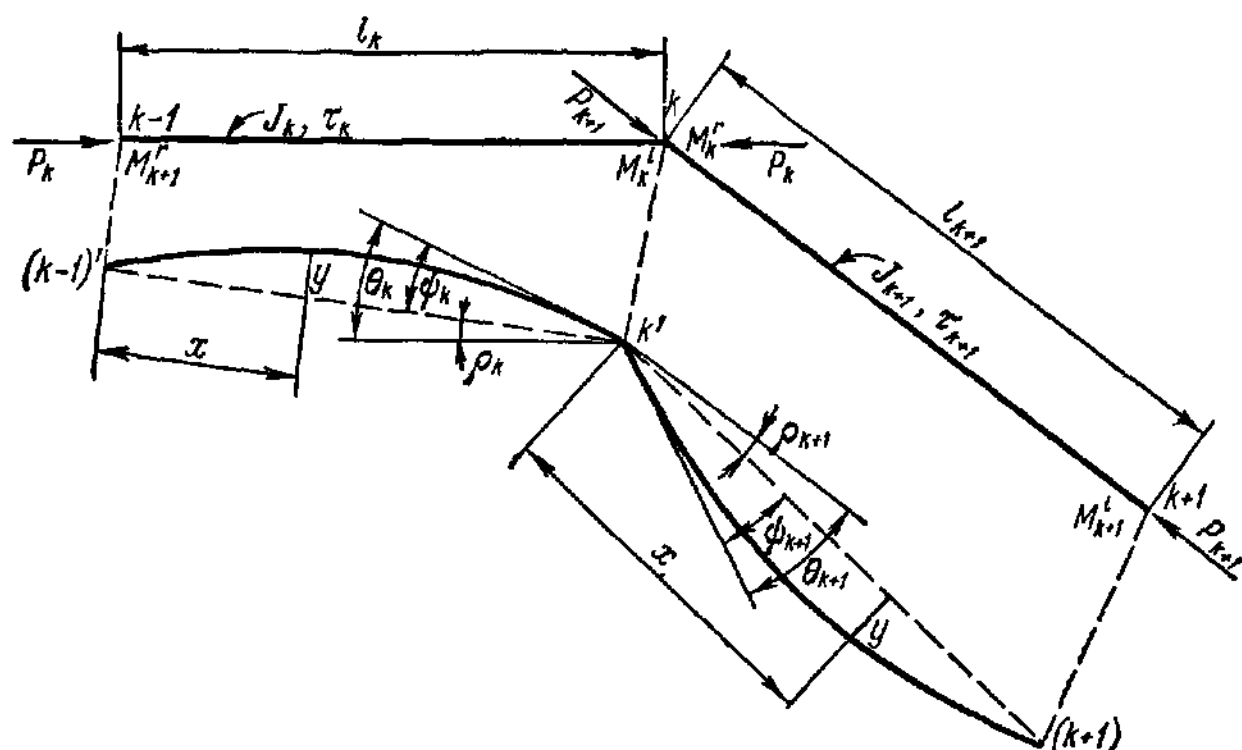


Рис. 101.

Согласно определению (388) имеем:

$$P_k l_k = \frac{E J_k \tau_k}{l_k} \varphi_k^2 \quad \text{и} \quad P_{k+1} l_{k+1} = \frac{E J_{k+1} \tau_{k+1}}{l_{k+1}} \varphi_{k+1}^2. \quad (391)$$

Удобно ввести «приведенные длины»:

$$l'_k = \frac{J}{J_k \tau_k} l_k \quad \text{и} \quad l'_{k+1} = \frac{J}{J_{k+1} \tau_{k+1}} l_{k+1}, \quad (392)$$

где  $J$  — произвольный момент инерции. Следовательно, уравнения (391) можно написать в следующем виде:

$$P_k l_k = \frac{E J}{l'_k} \varphi_k^2 \quad \text{и} \quad P_{k+1} l_{k+1} = \frac{E J}{l'_{k+1}} \varphi_{k+1}^2. \quad (393)$$

Вводя выражения (393) и трансцендентные функции

$$s = \frac{1}{\varphi^2} \left( \frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1 \right) \quad \text{и} \quad c = \frac{1}{\varphi^2} (1 - \varphi \operatorname{ctg} \varphi) \quad (394)$$



в уравнение (390), приведем их к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \psi_k &= -\frac{1}{EJ} (M_{k-1}^r l'_k s_k + M_k^l l'_k c_k); \\ \psi_{k+1} &= \frac{1}{EJ} (M_k^r l'_{k+1} c_{k+1} + M_{k+1}^l l'_{k+1} s_{k+1}). \end{aligned} \right\} \quad (395)$$

Подставляя значения  $\psi_k$  и  $\psi_{k+1}$  в условие непрерывности (389), в результате получим:

$$M_{k-1}^r l'_k s_k + M_k^l l'_k c_k + M_k^r l'_{k+1} c_{k+1} + M_{k+1}^l l'_{k+1} s_{k+1} - EJ(\rho_k - \rho_{k+1}) = 0. \quad (396)$$

Уравнение (396) представляет собой соотношение между четырьмя концевыми моментами двух жестко соединенных смежных стержней и углами поворотов  $\rho$ . Оно называется *уравнением четырех моментов*<sup>1)</sup>. Уравнения этого типа образуют первую группу уравнений устойчивости.

В случае, когда в  $k$  соединены только два элемента,  $M_k^l$  равняется  $M_k^r$  и уравнение (396) сводится к уравнению трех моментов:  $M_{k-1}^r l'_k s_k + M_k (l'_k c_k + l'_{k+1} c_{k+1}) + M_{k+1}^l l'_{k+1} s_{k+1} - EJ(\rho_k - \rho_{k+1}) = 0$ . (397)

Уравнения (396) и (397) были получены в предположении, что рассмотренные два элемента находятся под действием осевой сжимающей силы. В случае растяжения осевыми силами функции  $s$  и  $c$  в соответствующих членах должны быть заменены на

$$s = \frac{1}{\varphi^2} \left( 1 - \frac{\varphi}{\operatorname{sh} \varphi} \right) \quad \text{и} \quad c = \frac{1}{\varphi^2} (\varphi \operatorname{cth} \varphi - 1). \quad (398)$$

Если  $P=0$ , т. е. когда осевой силы, обусловленной внешними нагрузками, нет, имеем:

$$s = \frac{1}{6} \quad \text{и} \quad c = \frac{1}{3}. \quad (399)$$

В случае, когда стержень зашпелен в точке  $k$  (рис. 102), имеет место условие непрерывности, отличное от уравнения (396). Заменяя

<sup>1)</sup> Это уравнение известно в механике. См. Niles A. S., Newell J. S., *Airplane Structures*, 3d. ed., т. II, John. Wiley & Sons. Inc., New York, 1943, где рассматривается частный случай этого уравнения  $\rho_k = \rho_{k+1} = 0$ . Используя вышеприведенные обозначения для моментов, уравнение запишем в виде

$$M_{k-1}^r \frac{l_k}{J_k} \alpha_k + 2M_k^l \frac{l_k}{J_k} \beta_k + 2M_k^r \frac{l_{k+1}}{J_{k+1}} \beta_{k+1} + M_{k+1}^l \frac{l_{k+1}}{J_{k+1}} \alpha_{k+1} = W,$$

где  $W$  — параметр, зависящий от нагрузки; в рассмотренном здесь случае он равен нулю. Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  связаны с  $s$  и  $c$  следующими уравнениями:

$$\alpha = 6s \quad \text{и} \quad \beta = 3c.$$

жесткую опору фиктивным элементом  $k+1$ , который жестко оперт и имеет бесконечную жесткость  $J_{k+1} = \infty$ , получим  $l'_{k+1} = l_{k+1}/J_{k+1} = 0$  и  $\rho_{k+1} = 0$ , следовательно, будем иметь:

$$M_{k-1}^r l'_k s_k + M_k^l l'_k c_k - EJ \rho_k = 0. \quad (400)$$

Число уравнений непрерывности, которые можно записать, зависит от числа жестких узлов и от числа стержней, соединенных

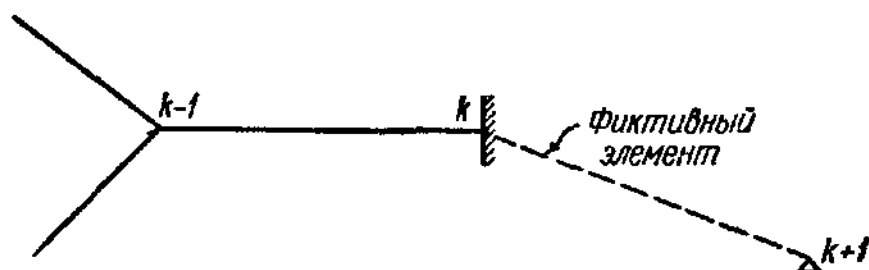


Рис. 102.

в каждом узле. Для каждого узла, в котором жестко закреплены  $n$  стержней, можно написать  $n-1$  независимых уравнений четырех моментов (396).

В целях облегчения применения уравнения четырех моментов в таблице 13 (стр. 232) приведены значения коэффициентов  $s$  и  $c$  согласно уравнению (394).

**Геометрические соотношения.** Некоторые типы рам можно рассматривать как замкнутый контур, составленный из стержней, или можно разделить на серию таких замкнутых контуров. Любой ломаный стержень с незамкнутым контуром можно представить как многоугольник с фиктивным элементом. Например, жесткую раму  $A-B$ , изображенную на рис. 103, защемленную в левой опоре, можно представить как некоторый замкнутый контур, добавив фиктивный элемент  $A-B$  с  $J = A = \infty$ .

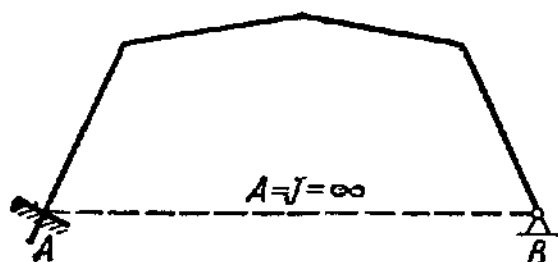


Рис. 103.

Рассмотрим замкнутый контур жестко соединенных элементов, как показано на рис. 104. Пронумеруем углы последовательно слева направо по контуру, рассматривая его изнутри. Углы  $\gamma$ , определяющие наклоны элементов в недеформированном положении, отсчитываются по направлению часовой стрелки от произвольно выбранной оси  $x$ , проведенной от конца элемента с наименьшим номером. Вращения стержней предполагаются положительными, когда они увеличивают углы  $\gamma$ <sup>1)</sup>. Обозначим через  $\Delta l$  изменение длины

<sup>1)</sup> Правило знаков относительно углов вращений стержней согласуется с уже принятым правилом знаков для этих углов при выводе уравнений четырех моментов.

элемента вследствие добавочной силы  $\Delta P$ ;  $\Delta l$  положительно для растягиваемых элементов.

Сумма соответствующих ортогональных проекций всех элементов перед выпучиванием на произвольные оси  $x$  и  $y$  должна быть равной нулю. Следовательно,

$$\sum l \cos \gamma = 0 \quad \text{и} \quad \sum l \sin \gamma = 0. \quad (401)$$

Так как замкнутый контур должен остаться замкнутым после

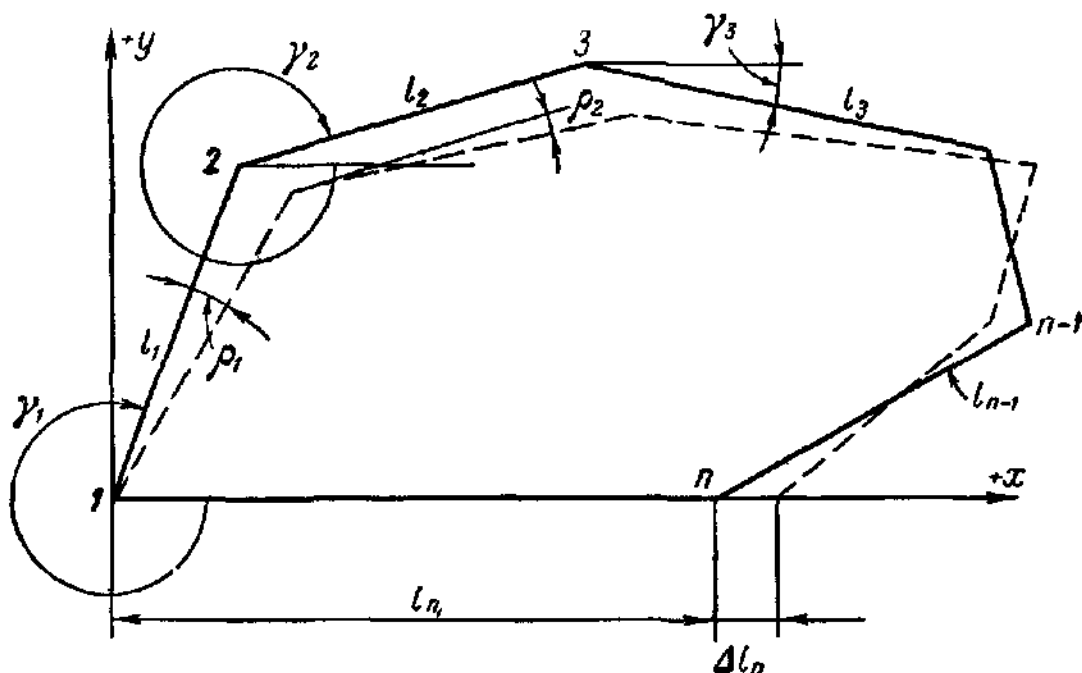


Рис. 104.

деформации, длины  $l$  изменяются на  $l + \Delta l$ , а углы  $\gamma$  — на  $\gamma + \rho$ , и мы, таким образом, получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum (l + \Delta l) \cos (\gamma + \rho) &= 0; \\ \sum (l + \Delta l) \sin (\gamma + \rho) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (402)$$

Величины  $\Delta l$  и  $\rho$  малы по сравнению с  $l$ . Подставляя  $\cos \rho = 1$  и  $\sin \rho = \rho$  и пренебрегая произведениями  $\rho \Delta l$ , можно написать:

$$\begin{aligned} \sum l \cos \gamma + \sum \Delta l \cos \gamma - \sum \rho l \sin \gamma &= 0, \\ \sum l \sin \gamma + \sum \Delta l \sin \gamma + \sum \rho l \cos \gamma &= 0. \end{aligned}$$

В силу уравнений (401) первый член в каждом уравнении равен нулю и геометрические соотношения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \sum \Delta l \cos \gamma - \sum \rho l \sin \gamma &= 0, \\ \sum \Delta l \sin \gamma + \sum \rho l \cos \gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (403)$$

Для каждой замкнутой стержневой системы можно написать два уравнения типа (403).

Таблица 13. Значения  $s$  и  $c$  согласно уравнению (394)

$\varphi$	$s(\varphi)$	$c(\varphi)$	$\varphi$	$s(\varphi)$	$c(\varphi)$
0	0,1667	0,3333	0,80	0,1800	0,3485
0,02	0,1667	0,3333	0,82	0,1807	0,3493
0,04	0,1667	0,3334	0,84	0,1815	0,3501
0,06	0,1667	0,3334	0,86	0,1823	0,3510
0,08	0,1668	0,3335	0,88	0,1831	0,3519
0,10	0,1669	0,3336	0,90	0,1839	0,3529
0,12	0,1670	0,3337	0,92	0,1847	0,3538
0,14	0,1671	0,3338	0,94	0,1856	0,3548
0,16	0,1672	0,3339	0,96	0,1865	0,3558
0,18	0,1673	0,3341	0,98	0,1874	0,3568
0,20	0,1675	0,3342	1,00	0,1884	0,3579
0,22	0,1676	0,3344	1,02	0,1894	0,3590
0,24	0,1678	0,3346	1,04	0,1904	0,3602
0,26	0,1680	0,3348	1,06	0,1914	0,3613
0,28	0,1682	0,3351	1,08	0,1925	0,3625
0,30	0,1684	0,3353	1,10	0,1936	0,3638
0,32	0,1687	0,3356	1,12	0,1948	0,3650
0,34	0,1689	0,3359	1,14	0,1959	0,3663
0,36	0,1692	0,3362	1,16	0,1971	0,3677
0,38	0,1695	0,3366	1,18	0,1984	0,3690
0,40	0,1698	0,3369	1,20	0,1997	0,3705
0,42	0,1702	0,3373	1,22	0,2010	0,3719
0,44	0,1705	0,3377	1,24	0,2023	0,3734
0,46	0,1709	0,3381	1,26	0,2037	0,3750
0,48	0,1713	0,3386	1,28	0,2051	0,3765
0,50	0,1717	0,3390	1,30	0,2066	0,3781
0,52	0,1721	0,3395	1,32	0,2081	0,3798
0,54	0,1725	0,3400	1,34	0,2097	0,3816
0,56	0,1730	0,3405	1,36	0,2113	0,3833
0,58	0,1735	0,3411	1,38	0,2129	0,3851
0,60	0,1739	0,3416	1,40	0,2146	0,3870
0,62	0,1745	0,3422	1,42	0,2164	0,3889
0,64	0,1750	0,3428	1,44	0,2182	0,3909
0,66	0,1755	0,3434	1,46	0,2200	0,3929
0,68	0,1761	0,3441	1,48	0,2219	0,3950
0,70	0,1767	0,3448	1,50	0,2239	0,3972
0,72	0,1773	0,3455	1,52	0,2259	0,3994
0,74	0,1780	0,3462	1,54	0,2280	0,4017
0,76	0,1786	0,3469	1,56	0,2302	0,4040
0,78	0,1793	0,3477	1,58	0,2324	0,4064

Продолжение

$\varphi$	$s(\varphi)$	$c(\varphi)$	$\varphi$	$s(\varphi)$	$c(\varphi)$
1,60	0,2346	0,4089	2,40	0,4433	0,6285
1,62	0,2370	0,4114	2,42	0,4548	0,6404
1,64	0,2394	0,4141	2,44	0,4670	0,6530
1,66	0,2419	0,4168	2,46	0,4800	0,6663
1,68	0,2445	0,4196	2,48	0,4937	0,6804
1,70	0,2472	0,4225	2,50	0,5084	0,6955
1,72	0,2499	0,4254	2,52	0,5240	0,7115
1,74	0,2527	0,4285	2,54	0,5406	0,7285
1,76	0,2557	0,4316	2,56	0,5585	0,7467
1,78	0,2587	0,4349	2,58	0,5776	0,7663
1,80	0,2618	0,4383	2,60	0,5982	0,7873
1,82	0,2651	0,4417	2,62	0,6203	0,8098
1,84	0,2684	0,4453	2,64	0,6443	0,8342
1,86	0,2719	0,4490	2,66	0,6703	0,8607
1,88	0,2755	0,4529	2,68	0,6986	0,8894
1,90	0,2792	0,4568	2,70	0,7294	0,9210
1,92	0,2830	0,4609	2,72	0,7633	0,9549
1,94	0,2870	0,4652	2,74	0,8005	0,9926
1,96	0,2911	0,4696	2,76	0,8417	1,0342
1,98	0,2954	0,4741	2,78	0,8874	1,0807
2,00	0,2999	0,4788	2,80	0,9386	1,1321
2,02	0,3045	0,4837	2,82	0,9962	1,1902
2,04	0,3093	0,4888	2,84	1,0614	1,2559
2,06	0,3143	0,4941	2,86	1,1360	1,3310
2,08	0,3195	0,4996	2,88	1,2220	1,4175
2,10	0,3249	0,5053	2,90	1,3224	1,5183
2,12	0,3305	0,5112	2,92	1,4409	1,6374
2,14	0,3364	0,5174	2,94	1,5830	1,7800
2,16	0,3425	0,5238	2,96	1,7566	1,9541
2,18	0,3489	0,5305	2,98	1,9731	2,1712
2,20	0,3556	0,5375	3,00	2,2509	2,4495
2,22	0,3626	0,5448	3,02	2,6203	2,8195
2,24	0,3699	0,5524	3,04	3,1353	3,3350
2,26	0,3776	0,5604	3,06	3,9029	4,1031
2,28	0,3856	0,5688	3,08	5,1693	5,3701
2,30	0,3940	0,5775	3,10	7,6539	7,8553
2,32	0,4029	0,5867	3,12	14,7421	14,9440
2,34	0,4122	0,5964	3,14	199,862	200,064
2,36	0,4220	0,6065	$\pi$	$\pm \infty$	$\pm \infty$
2,38	0,4323	0,6172	3,16	-17,2929	-17,0898

Продолжение

$\varphi$	$s(\varphi)$	$c(\varphi)$	$\varphi$	$s(\varphi)$	$c(\varphi)$
3,18	—8,2885	—8,0847	4,00	—0,3928	—0,1534
3,20	—5,4511	—5,2466	4,02	—0,3851	—0,1444
3,22	—4,0614	—3,8563	4,04	—0,3777	—0,1358
3,24	—3,2367	—3,0310	4,06	—0,3706	—0,1275
3,26	—2,6908	—2,7844	4,08	—0,3639	—0,1195
			4,10	—0,3576	—0,1119
3,28	—2,3028	—2,0957			
3,30	—2,0128	—1,8051	4,12	—0,3515	—0,1044
3,32	—1,7880	—1,5796	4,14	—0,3457	—0,0973
3,34	—1,6086	—1,3995	4,16	—0,3402	—0,0904
3,36	—1,4622	—1,2524	4,18	—0,3349	—0,0837
			4,20	—0,3299	—0,0772
3,38	—1,3403	—1,1298			
3,40	—1,2375	—1,0262	4,22	—0,3251	—0,0710
3,42	—1,1494	—0,9375	4,24	—0,3205	—0,0649
3,44	—1,0733	—0,8606	4,26	—0,3161	—0,0590
3,46	—1,0068	—0,7933	4,28	—0,3119	—0,0532
			4,30	—0,3079	—0,0476
3,48	—0,9481	—0,7339			
3,50	—0,8961	—0,6811	4,32	—0,3041	—0,0422
3,52	—0,8497	—0,6339	4,34	—0,3005	—0,0369
3,54	—0,8080	—0,5913	4,36	—0,2970	—0,0317
3,56	—0,7703	—0,5528	4,38	—0,2937	—0,0267
3,58	—0,7361	—0,5178	4,40	—0,2905	—0,0217
3,60	—0,7049	—0,4858	4,42	—0,2875	—0,0169
3,62	—0,6764	—0,4564	4,44	—0,2846	—0,0122
3,64	—0,6502	—0,4293	4,46	—0,2818	—0,0076
3,66	—0,6261	—0,4043	4,48	—0,2792	—0,0030
3,68	—0,6038	—0,3812	4,50	—0,2767	0,0015
3,70	—0,5832	—0,3596	4,52	—0,2744	0,0059
3,72	—0,5640	—0,3395	4,54	—0,2721	0,0102
3,74	—0,5461	—0,3207	4,56	—0,2700	0,0144
3,76	—0,5295	—0,3031	4,58	—0,2679	0,0186
3,78	—0,5139	—0,2865	4,60	—0,2660	0,0227
3,80	—0,4994	—0,2709	4,62	—0,2642	0,0268
3,82	—0,4857	—0,2563	4,64	—0,2625	0,0308
3,84	—0,4728	—0,2424	4,66	—0,2609	0,0348
3,86	—0,4607	—0,2292	4,68	—0,2594	0,0387
3,88	—0,4493	—0,2167	4,70	—0,2581	0,0426
3,90	—0,4386	—0,2049	4,72	—0,2568	0,0465
3,92	—0,4284	—0,1936	4,74	—0,2556	0,0503
3,94	—0,4188	—0,1829	4,76	—0,2545	0,0542
3,96	—0,4097	—0,1726	4,78	—0,2535	0,0579
3,98	—0,4010	—0,1628	4,80	—0,2525	0,0617

Продолжение

$\varphi$	$s(\varphi)$	$c(\varphi)$	$\varphi$	$s(\varphi)$	$c(\varphi)$
4,82	-0,2517	0,0655	5,62	-0,3207	0,2594
4,84	-0,2510	0,0692	5,64	-0,3271	0,2680
4,86	-0,2504	0,0729	5,66	-0,3339	0,2770
4,88	-0,2498	0,0767	5,68	-0,3414	0,2866
4,90	-0,2494	0,0804	5,70	-0,3494	0,2967
4,92	-0,2490	0,0841	5,72	-0,3580	0,3075
4,94	-0,2488	0,0879	5,74	-0,3674	0,3189
4,96	-0,2486	0,0916	5,76	-0,3776	0,3311
4,98	-0,2485	0,0954	5,78	-0,3887	0,3442
5,00	-0,2486	0,0992	5,80	-0,4008	0,3583
5,02	-0,2487	0,1030	5,82	-0,4141	0,3736
5,04	-0,2489	0,1068	5,84	-0,4286	0,3901
5,06	-0,2493	0,1107	5,86	-0,4447	0,4080
5,08	-0,2497	0,1146	5,88	-0,4624	0,4276
5,10	-0,2502	0,1185	5,90	-0,4821	0,4492
5,12	-0,2509	0,1225	5,92	-0,5040	0,4730
5,14	-0,2517	0,1265	5,94	-0,5287	0,4995
5,16	-0,2525	0,1306	5,96	-0,5565	0,5291
5,18	-0,2535	0,1348	5,98	-0,5881	0,5625
5,20	-0,2547	0,1390	6,00	-0,6243	0,6005
5,22	-0,2559	0,1433	6,02	-0,6661	0,6441
5,24	-0,2573	0,1476	6,04	-0,7150	0,6948
5,26	-0,2588	0,1521	6,06	-0,7728	0,7543
5,28	-0,2605	0,1566	6,08	-0,8421	0,8254
5,30	-0,2623	0,1613	6,10	-0,9268	0,9118
5,32	-0,2643	0,1660	6,12	-1,0325	1,0191
5,34	-0,2664	0,1709	6,14	-1,1679	1,1562
5,36	-0,2687	0,1759	6,16	-1,3475	1,3375
5,38	-0,2712	0,1811	6,18	-1,5971	1,5888
5,40	-0,2739	0,1864	6,20	-1,9672	1,9605
5,42	-0,2768	0,1919	6,22	-2,5720	2,5669
5,44	-0,2800	0,1975	6,24	-3,7377	3,7343
5,46	-0,2833	0,2034	6,26	-6,9160	6,9142
5,48	-0,2869	0,2094	6,28	-50,0163	50,0160
5,50	-0,2908	0,2157	$2\pi$	$\pm \infty$	$\pm \infty$
5,52	-0,2949	0,2222			
5,54	-0,2994	0,2290			
5,56	-0,3041	0,2361			
5,58	-0,3093	0,2435			
5,60	-0,3148	0,2513			

В большинстве случаев первый член в каждом из уравнений (403) мал по сравнению со вторым членом и им можно пренебречь. Исключение составляют рамы, размеры которых в направлении действующих внешних сил в несколько раз больше, чем в перпендикулярном направлении к нему.

**Уравнения равновесия.** В любом замкнутом контуре, составленном из стержней, перемещенном и деформированном в выпученном

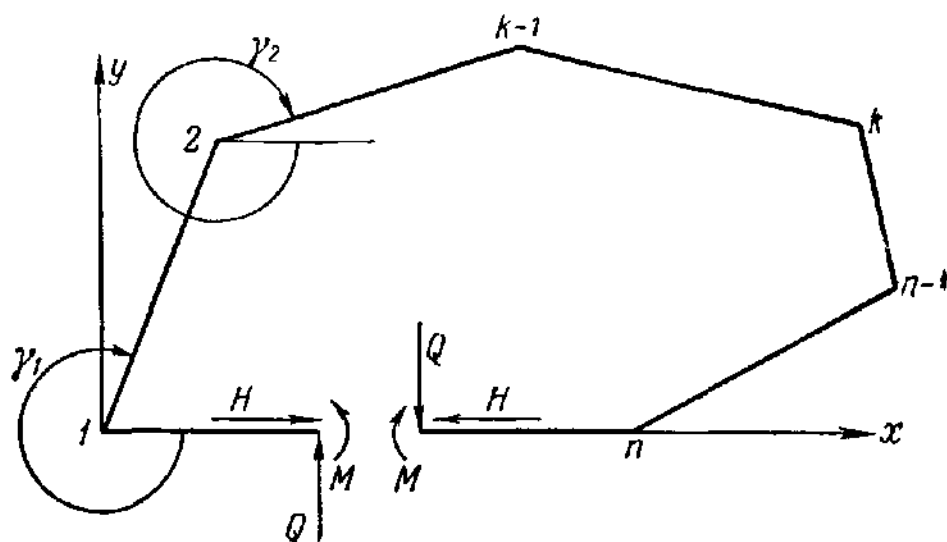


Рис. 105.

состоянии, кроме моментов в жестких узлах, возникают также силы  $H$  и  $Q$ , как это показано на рис. 105. Из рис. 106, где показан удаленный из контура элемент  $k-1, k$ , для каждого отдельного элемента можно написать следующее уравнение равновесия:

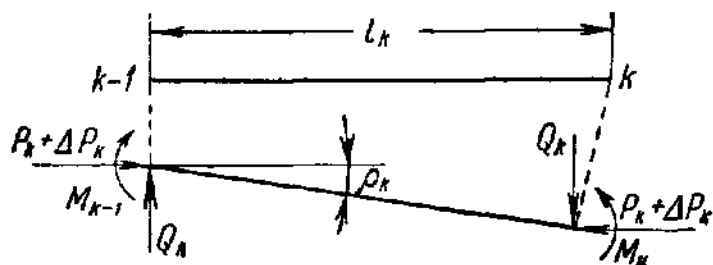


Рис. 106.

мента можно написать следующее уравнение равновесия:

$$M_k = M_{k-1} + P_k l_k \rho_k + Q_k l_k, \quad (404)$$

где член  $\Delta P_k l_k \rho_k$  опущен как малая величина второго порядка.

В случае, когда  $P_k$  — растягивающая сила, второй член в правой части отрицателен.

Пользуясь рис. 105, можно написать следующее соотношение:

$$Q_k = Q \cos \gamma_k + H \sin \gamma_k, \quad (405)$$

выражающее  $Q_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) через силы  $Q$  и  $H$ , связанные с рассмотренным контуром. Знаки тригонометрических функций в уравнении (405) определяются углами  $\gamma_k$ , отсчитываемыми в направлении часовой стрелки от оси  $x$  на конце элемента, имеющего меньший номер, как это показано на рис. 104.

**Уравнения устойчивости.** Выведенные выше три группы уравнений — уравнения четырех моментов, геометрические соотношения



и уравнения равновесия — составляют полную систему уравнений устойчивости, связывающую следующие неизвестные: величины моментов  $M$ , добавочных сил  $Q$  и  $H$  и углов поворота стержней  $\rho$ . Можно показать, что этих уравнений, а именно уравнений типа (396), (400), (403), (404) и (405), достаточно для определения неизвестных  $M$ ,  $Q$ ,  $H$  и  $\rho$ .

Ограничиваясь сначала случаем одного замкнутого контура, составленного из  $n$  стержней, имеем  $n$  моментов  $M$ ,  $n$  углов поворота стержней  $\rho$  и две добавочные силы  $Q$  и  $H$  — всего  $2n + 2$  неизвестных. Они определяются при помощи  $n$  уравнений четырех моментов,  $n$  уравнений равновесия и двух геометрических соотношений, или в сумме при помощи  $2n + 2$  уравнений. Если два стержня шарнирно соединены в некотором узле, то для каждого шарнирного соединения отпадает один неизвестный момент и одно уравнение четырех моментов.

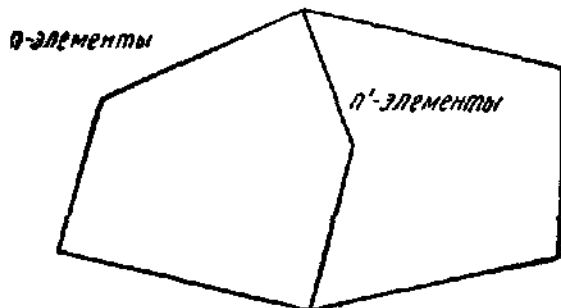


Рис. 107.

В случае, когда одноконтурная рама превращается в двухконтурную путем добавления  $n'$  стержней, как это показано на рис. 107,

мы получаем  $n' + 1$  добавочных моментов,  $n'$  добавочных углов поворота стержней  $\rho$  и другую систему двух сил  $Q$  и  $H$  — всего  $2n' + 3$  добавочных неизвестных, которые определяются при помощи  $n' + 1$  уравнений четырех моментов,  $n'$  уравнений равновесия и двух геометрических соотношений, т. е. в итоге  $2n' + 3$  добавочными уравнениями.

Так как любую раму можно образовать, повторяя вышеописанный процесс, очевидно, что три совокупности уравнений, которые составляют систему уравнений устойчивости, достаточны для определения внутренних сил и деформаций выпученной рамы.

Заканчивая рассмотрение уравнений устойчивости, необходимо сделать некоторые общие замечания относительно применения этих уравнений в любом частном случае. При установлении уравнений четырех моментов нужно соблюдать следующее правило знаков. Отправляясь в каждом замкнутом контуре из любого узла, следует непрерывным образом пронумеровать узлы в направлении часовой стрелки. При написании уравнений четырех моментов для каждого контура в последовательности, данной номерами узлов, все концевые моменты считаются положительными, и уравнения (396) можно применять, не заботясь о знаках моментов или вращений стержней. Исключение составляют элементы, общие для двух контуров, концевые моменты которых нужно считать положительными для одного контура и, следовательно, отрицательными для другого. Что касается геометрических соотношений, то в каждом замкнутом контуре для

первоначальных углов  $\gamma$  (см. рис. 104) нужно соблюдать установленное выше правило знаков, с помощью которого автоматически получается совокупность геометрических соотношений, совместных с уравнениями четырех моментов.

**Условие устойчивости.** Нетрудно заметить, что уравнения (396), (403), (404) и (405) линейны, однородны и их ненулевые решения существуют только в случае, когда детерминант  $\Delta$ , составленный из коэффициентов этих уравнений, равен нулю. Условие  $\Delta = 0$  представляет собой условие устойчивости и определяет, как уже было указано, условие критического нагружения рамы.

С первого взгляда, число уравнений устойчивости кажется громадным. Однако во многих практически важных случаях можно существенно сократить их число простыми методами исключения. Кроме того, иногда применение уравнений в конечных разностях позволяет получить в простом виде решение задачи устойчивости независимо от числа уравнений устойчивости. Преимущество вышеприведенного метода и связанных с ним аналитических методов заключается в том, что они облегчают установление эффективных методов расчета и правил практических расчетов, основанных на рациональном решении задачи. В этой особенности аналитических методов и заключается их важность в проектировании гражданских инженерных сооружений. Исследование условия устойчивости  $\Delta = 0$  в общем случае невозможно, так как оно в большой степени зависит от частного характера задачи. В главах VII и VIII будет рассмотрено применение аналитических методов к различным задачам о выпучивании из области инженерных сооружений, и там будет возможность показать различные пути применения математического исследования.

#### **60. Видоизменение аналитического метода, использующего в качестве неизвестных углы поворотов узлов**

Выше было указано, что при рассмотрении задачи устойчивости рам с жесткими узлами главным вопросом является вопрос о сокращении числа уравнений устойчивости, из которых мы получаем в результате критерий устойчивости  $\Delta = 0$ . Для некоторых типов рамных систем целесообразно с самого начала исключить концевые моменты  $M$ , принимая в качестве независимых переменных в уравнениях устойчивости углы поворотов  $\theta$  узлов и углы поворотов стержней  $\rho$ . В случае, когда число неизвестных углов  $\rho$  равно нулю или очень мало по сравнению с числом углов  $\theta$ , указанный метод окажется очень выгодным. Идея введения углов поворота узлов  $\theta$  в расчет статически неопределимых систем принадлежит Мандерла (1878) и Мору (1892), которые разработали этот метод для изучения вторичных напряжений в фермах.

На рис. 108 показан элемент  $AB$  рамы в его первоначальном положении и перемещенном и изогнутом состоянии после выпучи-

вания под действием положительных конечных моментов  $M_A$  и  $M_B$ . Концевые вращения равны  $\theta = \psi + \rho$ . Значения  $\psi_A$  и  $\psi_B$  получаются из уравнений (395):

$$\psi_A = \frac{l'}{EJ}(cM_A + sM_B) + \rho$$

и

$$\psi_B = -\frac{l'}{EJ}(sM_A + cM_B).$$

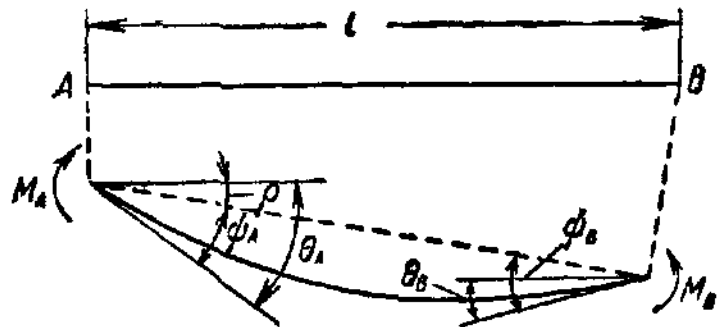


Рис. 108.

Величины  $s$  и  $c$  определяются уравнениями (394) для сжатых элементов, уравнениями (398) для растянутых элементов и уравнениями (399) для элементов, не подверженных действию осевых нагрузок.

Следовательно, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \theta_A &= \frac{l'}{EJ}(cM_A + sM_B) + \rho, \\ \theta_B &= -\frac{l'}{EJ}(sM_A + cM_B) + \rho. \end{aligned} \right\} \quad (406)$$

Решая систему относительно  $M_A$  и  $M_B$ , получим следующие уравнения для центрально нагруженных элементов:

$$\left. \begin{aligned} M_A &= \frac{EJ}{l'(c^2 - s^2)} [c\theta_A + s\theta_B - \rho(c + s)], \\ M_B &= -\frac{EJ}{l'(c^2 - s^2)} [s\theta_A + c\theta_B - \rho(c + s)]. \end{aligned} \right\} \quad (407)$$

Вводя коэффициенты

$$C = \frac{c}{c^2 - s^2} \quad \text{и} \quad S = \frac{s}{c^2 - s^2}, \quad (408)$$

уравнения (407) можно написать более компактно:

$$\left. \begin{aligned} M_A &= \frac{EJ}{l'} [C\theta_A + S\theta_B - \rho(C + S)], \\ M_B &= -\frac{EJ}{l'} [S\theta_A + C\theta_B - \rho(C + S)]. \end{aligned} \right\} \quad (409)$$

Применяя эти уравнения, необходимо соблюдать установленное ранее правило знаков, согласно которому углы поворотов узлов и стержней в направлении часовой стрелки являются положительными.

Если в узле  $A$  жестко соединены несколько стержней  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ , ..., то они будут иметь один и тот же угол  $\theta_A$  в этой точке, так что, приписывая каждому из  $j$  узлов рамы отдельное значение  $\theta$ , число неизвестных углов  $\theta$  будет равно  $j$ . Углы поворотов стержней  $\rho$  не независимы одно от другого, но взаимосвязаны геометрическими уравнениями типа (403), и углы  $\rho$  можно выразить при

помощи меньшего числа  $r$  неизвестных углов  $\rho$ . Следовательно, полное число неизвестных будет  $j+r$ .

Для определения этих  $j+r$  неизвестных можно установить две группы уравнений. Первую группу можно получить, используя условие равновесия

$$\sum M = 0 \quad (410)$$

для каждого узла, где  $M$  — моменты, передаваемые элементами общему, связывающему их узлу. Можно написать  $j$  таких уравнений. Вторая группа, определяющая  $r$  неизвестных углов  $\rho$ , представляет собой уравнения равновесия типа (404), причем добавочные силы  $Q$  можно всегда выразить через члены, содержащие концевые моменты  $M$  и осевые силы  $P$ . Таким образом, получим систему  $j+r$  уравнений относительно переменных  $M$  и  $\rho$ . В случае, когда моменты выражаются при помощи уравнений (409), число переменных в этих уравнениях уменьшается до  $j+r$ . Эти уравнения являются линейными и однородными относительно  $\theta$  и  $\rho$ , и условие устойчивости получается приравниванием нулю детерминанта  $\Delta$ , составленного из коэффициентов этих уравнений. Нетрудно установить в каждом частном случае, какой из двух методов более эффективен: описанный в предыдущем параграфе метод уравнения четырех моментов или метод деформаций. Вообще, можно сказать, что при

Таблица 14. Значения коэффициентов  $S$  и  $C$ , согласно уравнению (408)

$\varphi$	$S(\varphi)$	$C(\varphi)$	$\varphi$	$S(\varphi)$	$C(\varphi)$
0,00	2,000	4,000	3,00	2,412	2,624
0,10	2,000	3,999	3,20	2,492	2,399
0,20	2,001	3,995	3,40	2,588	2,146
0,30	2,003	3,988	3,60	2,702	1,862
0,40	2,005	3,979	3,80	2,838	1,540
0,60	2,012	3,952	4,00	3,004	1,173
0,80	2,022	3,914	4,20	3,207	0,751
1,00	2,034	3,865	4,40	3,462	0,259
1,20	2,050	3,804	4,60	3,787	—0,323
1,40	2,070	3,732	4,80	4,211	—1,029
1,60	2,093	3,647	5,00	4,785	—1,909
1,80	2,120	3,548	5,20	5,592	—3,052
2,00	2,152	3,436	5,40	6,798	—4,625
2,20	2,189	3,309	5,60	8,759	—6,992
2,40	2,233	3,166	5,80	12,428	—11,111
2,60	2,283	3,005	6,00	21,454	—20,637
2,80	2,343	2,825			

исследовании рамных систем, в которых число  $r$  свободных поворотов стержней очень мало по сравнению с числом неизвестных моментов  $M$ , последний метод имеет некоторое преимущество<sup>1)</sup>. Однако для многих важных задач строительной механики метод четырех моментов дает достаточно простое прямое решение.

В целях облегчения применения метода, описанного в этом параграфе, приводится таблица 14. Эта таблица дает числовые значения коэффициентов  $S$  и  $C$  для сжатых элементов.

### 61. Численные методы, основанные на принципах метода распределения моментов

В 1935 г.<sup>2)</sup> Джеймс распространил метод Красса распределения моментов на расчет элементов рам, подверженных действию осевых сил. Лундквист использовал обобщенные уравнения Джеймса для исследования устойчивости сжатых элементов в рамных конструкциях и разработал эффективный метод для решения задачи устойчивости.

Рассмотрим элемент, опирающийся своими концами на неподатливые опоры, упруго заделанный на конце  $A$  и находящийся под действием осевой силы  $P$ , как это показано на рис. 109. Жесткость

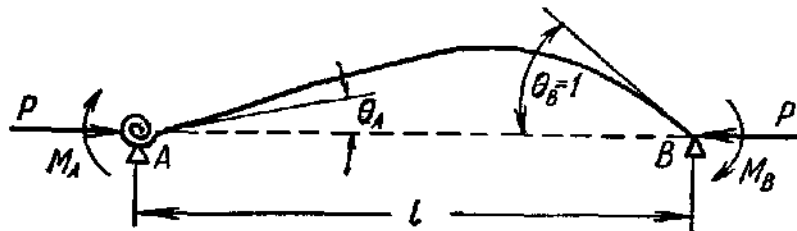


Рис. 109.

такого элемента характеризуется моментом, приложенным на конце  $B$ , необходимым для вращения этого конца на 1 радиан<sup>3)</sup>. Очевидно, что жесткость будет зависеть от степени заделки на другом конце. Для получения критерия устойчивости рассматриваются три вида защемлений и используются следующие обозначения для жесткости<sup>4)</sup>:

- $S$  — конец  $A$  заделан;
- $S'$  — конец  $A$  упруго заделан;
- $S''$  — конец  $A$  шарнирно закреплен.

<sup>1)</sup> Для более детального изучения этого вопроса см. Bleich F., Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes, 2d ed., Julius Springer, Berlin, 1926.

<sup>2)</sup> James B. W., Principal Effects of Axial Load on Moment Distribution Analysis of Rigid Structures, NACA Tech. Note 534, 1935.

<sup>3)</sup> Определение Джеймса и Лундквиста жесткости основывается на вращении на  $1/4$  радиана, в то время как другие авторы рассматривают вращение на 1 радиан.

<sup>4)</sup> Обозначения  $S$  и  $C$ , использованные в этом параграфе, не имеют того же самого смысла, что и в предыдущем.

Коэффициент передачи момента для элемента, покоящегося на концах на несмещаемых опорах, определяется как отношение значения момента на конце  $A$  к значению момента, приложенного на ближнем конце  $B$ . Как и в случае жесткости, коэффициент передачи нагрузки зависит от степени заделки элемента на конце  $A$ . Для трех рассмотренных ранее видов заделки используются следующие обозначения для коэффициентов передачи нагрузки:

$C$  — конец  $A$  заделан;

$C'$  — конец  $A$  упруго заделан;

$C''$  — конец  $A$  шарнирно закреплен.

Значения величин  $S$ ,  $S''$  и  $C$  вычислены и опубликованы Джеймсом и Лундквистом и Кроллом<sup>1)</sup>.

На рис. 110 величины  $S$ ,  $S''$  и  $C$  представлены в зависимости от  $\varphi = l\sqrt{P/EJ}\tau$ <sup>2)</sup>. На рис. 110, *a* приведены графики  $S$  и  $S''$  для осевого сжатия, соответствующие значениям  $\varphi$  между 0 и  $2\pi$ . Важно отметить тот факт, что, как видно из этих графиков,  $S$  и  $S''$  при определенных значениях  $\varphi$  могут становиться отрицательными. Кривые  $S$  и  $S''$  в рассмотренном здесь интервале имеют асимптоты соответственно при  $\varphi = 2\pi$  и  $\varphi = 4,4934$ <sup>3)</sup>. Жесткость  $S''$  и коэффициент передачи нагрузки  $C$  меняют знак при значении  $\varphi = 4,4934$  и при этом значении имеют асимптоты. На рис. 110, *b* приведены графики  $S$ ,  $S''$  и  $C$  для растягиваемых элементов.

Исходя из значений  $S$  и  $C$ , для заделанного конца  $A$  методом распределения моментов можно получить значения  $S'$  и  $C'$  для случая упруго заделанного отдаленного конца, как это показано на рис. 111; имеют место следующие соотношения:

$$S' = S \left( 1 - \frac{C^2 S}{K + S} \right), \quad (411)$$

$$C' = \frac{C}{1 + \frac{S}{K} (1 - C^2)}, \quad (412)$$

здесь  $K$  есть жесткость пружины на отдаленном конце  $A$ .

Принятое правило знаков при применении изложенного в последующем критерия устойчивости является следующим: момент, действующий на конец элемента в направлении часовой стрелки, положителен, а в узле положителен момент, действующий на узел против часовой стрелки. Внешний момент, приложенный к узлу, рассматривается как действующий на узел.

1) Lundquist E. E., Kroll W. D., Tables of Stiffness and Carry-over Factors for Structural Members under Axial Load, NACA Techn. Note 652, 1938.

2) Значение  $\varphi$  идентично величине  $(L/j)_{eff}$  статьи Лундквиста.

3) Это трансцендентное значение является вторым корнем уравнения  $\operatorname{tg} \varphi = \varphi$ .

**Критерий устойчивости рам с несмещающимися узлами.** Если упругая рама с жесткими узлами находится в устойчивом равновесии под действием внешних сил, то произвольный момент  $m$ ,

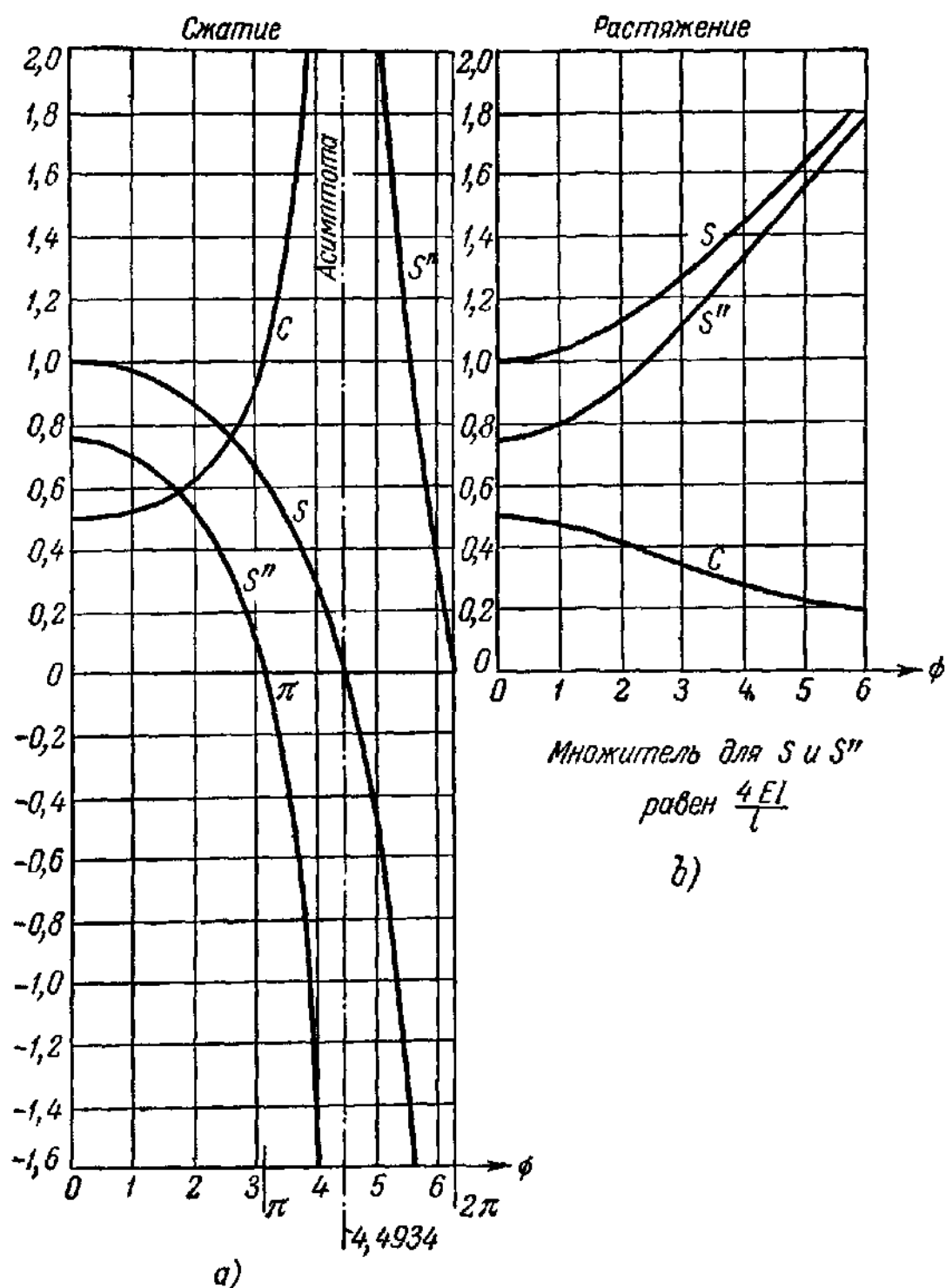


Рис. 110.

приложенный в любом узле рамы, вызовет конечное перемещение конструкции. При прекращении действия момента конструкция возвратится к своей первоначальной форме. При постепенном увеличении внешней нагрузки, вызывающей все большие и большие осевые силы  $P$  в элементах рамы, сопротивление сжатых элементов изгибу (жесткость) уменьшается сначала медленно, а затем более быстро.





Если с увеличением внешних нагрузок полная жесткость  $\sum S'_i$  любого произвольно выбранного узла стремится к нулю, то достигается критическое состояние. Таким образом, соотношение

$$\sum S'_i = 0 \quad (415)$$

представляет собой *критерий жесткостей* при исследовании выпучивания рамы<sup>1)</sup>.

**Критерий рядов Лундквиста.** Однако критерий жесткостей имеет только теоретическое значение и этот критерий для непосредственного применения метода распределения моментов должен быть представлен в надлежащем виде.

Применяя уравнение (411) к каждому из элементов, сходящихся в узле  $b$  (см. рис. 112), получим:

$$\sum S'_i = S_1 \left( 1 - \frac{C_1^2 S_1}{K_1 + S_1} \right) + S_2 \left( 1 - \frac{C_2^2 S_2}{K_2 + S_2} \right) + \dots \quad (416)$$

Введя безразмерные величины

$$r_1 = \frac{C_1^2 S_1}{K_1 + S_1} \frac{S_1}{\sum S_i}, \quad r_2 = \frac{C_2^2 S_2}{K_2 + S_2} \frac{S_2}{\sum S_i} \dots \quad (417)$$

уравнение (416) можно написать в следующем виде:

$$\sum S'_i = (S_1 + S_2 + \dots) - (r_1 + r_2 + \dots) \sum S_i.$$

При  $r = r_1 + r_2 + \dots$  это уравнение принимает, наконец, следующий вид:

$$\sum S'_i = (1 - r) \sum S_i. \quad (418)$$

Применяя критерий жесткостей (415) и (416), непосредственно получим два критерия<sup>2)</sup>:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для устойчивости } r < 1; \\ \text{для критического состояния (выпучивания) } r = 1. \end{array} \right\} \quad (419)$$

Согласно формуле (411) для жесткости упруго заделанного стержня, полученной вышеописанным методом, величина  $r$  имеет следующий смысл: в узле  $b$  приложен внешний единичный момент, все же остальные узлы рамы, кроме узла  $b$ , жестко защемлены против вращения. Если теперь закрепить узел  $b$ , а остальные узлы последовательно освободить, уравновесить и снова закрепить после достаточного числа циклов распределения моментов, то полный

<sup>1)</sup> Критерий (415) соответствует аналитическому условию  $\Delta = 0$  для критического состояния.

<sup>2)</sup> Kavanagh T. C., *Instability of Plane Truss Frameworks*, Doctor's Thesis, New York University, 1948.

неуравновешенный момент, приходящий к узлу  $b$  после уравнивания всех узлов, будет равен  $r$ .

Лундквист показал, что критерий (419) можно непосредственно получить на основе вышеприведенной интерпретации величины  $r$ . Первоначальный неуравновешенный момент  $m_b = 1$  после процесса распределения вызывает в узле  $b$  добавочный неуравновешенный момент  $r$ . Продолжая этот процесс и распределяя момент  $r$  в  $b$  способом, описанным для первоначального единичного момента, найдем, что неуравновешенный момент в узле  $b$  равен  $r^2$ . Повторяя этот процесс, приходим к результату, согласно которому полный неуравновешенный момент в узле  $b$  равен

$$1 + r + r^2 + \dots$$

Это есть геометрическая прогрессия, сумма которой равна  $1/(1 - r)$ . Для устойчивости сумма  $1/(1 - r)$  должна быть конечной; это условие удовлетворяется, когда  $r < 1$ . С другой стороны, критическое состояние достигается, когда  $r = 1$ . Эти два критерия тождественны соотношениям (419). Они названы Лундквистом *критериями рядов*, как основанные на геометрической прогрессии.

Нужно запомнить, что применение критерия рядов Лундквиста непосредственно не дает критического условия при нагружении рамы, но приводит к процессу попыток, который осуществляется следующим образом.

1. Рассматриваем последовательность произведений  $nW$  данной системы нагрузок  $W$  и вычисляем для каждого  $nW$  осевые силы  $P$  всех элементов<sup>1)</sup>.

2. Для каждого произведения  $nW$  и для каждого элемента вычисляем величины  $P/A$ ,  $E\tau$  и  $\varphi$  и определяем соответствующие значения коэффициентов передачи нагрузки, коэффициентов жесткости и коэффициентов распределения.

3. Для каждого  $nW$ , начиная с наименьшего, прилагаем первоначальный момент  $+1$  в некотором узле, вычисляя, как обычно, распределение момента, и определяем полный неуравновешенный момент в узле после уравнивания всех других узлов рамы.

4. Система нагрузок  $nW$ , которая впервые даст  $r = 1$ , является критической, а  $n$  представляет собой коэффициент безопасности.

**Метод последовательных приближений Хоффа.** Хофф<sup>2)</sup> основывал применение метода распределения моментов для определения устойчивости рамы на следующей теореме:

«Если рама (ферма) подвержена действию внешних моментов и при вычислении распределения изгибающих моментов используется

<sup>1)</sup>  $W$  представляет собой уравновешенную систему внешних нагрузок, действующих на конструкции;  $nW$  означает, что каждая нагрузка этой системы умножается на  $n$ .

<sup>2)</sup> Hoff N. J., Stable and Unstable Equilibrium of Plane Framework, Jour. Aeronaut. Sci., т. 8, стр. 115, 1941.

видоизмененный для осевых нагрузок метод Кросса, причем получена конечная и единственная последовательность значений, то этот результат является необходимым и достаточным условием для устойчивости».

Конечная последовательность значений определяет сходимость метода распределения моментов, а единственность — независимость результатов от порядка уравнивания.

В случае, когда этот процесс не приводит к конечным результатам, или в исключительных случаях, если при изменении порядка нескольких шагов в процессе получаются различные значения, конструкция является неустойчивой.

Сходимость обычного метода распределения моментов для определения изгибающих моментов в раме, в которой не действуют осевые силы, очевидна. Участие каждого элемента после каждого цикла распределения меньше, чем неуравновешенный момент в начале цикла, и коэффициент передачи нагрузки равен  $1/2$  для элементов постоянного момента инерции. Однако в случае, когда отдельные элементы находятся под действием сжимающих или растягивающих сил, чтобы доказать сходимость метода Кросса, необходимо тщательное исследование, так как коэффициент жесткости для сжатого элемента принимает положительные или отрицательные значения, а коэффициент передачи нагрузки часто больше единицы. Доказательство этого факта не очень просто, но Хоффу, который признал необходимость такого исследования, удалось его провести, что дает, таким образом, принципиальную основу для применения метода распределения моментов к системам, элементы которых подвержены действию осевых сил.

Процесс применения цитированного выше критерия устойчивости описывается Хоффом следующим образом:

1. Определим осевые силы во всех элементах рамы, соответствующие предполагаемому значению внешних нагрузок. Вычислим значение  $\varphi$  для каждого стержня. В случае, когда значения  $\varphi$  меньше  $\pi$  во всех сжатых стержнях, рама, очевидно, устойчива. Если в каком-либо одном сжатом стержне значение  $\varphi$  больше  $2\pi$ , вся рама неустойчива.

2. Вычислим значения жесткостей  $S$  и коэффициентов передачи нагрузки  $C$  при помощи таблиц или графиков. Вычислим далее сумму жесткостей  $\Sigma S$  для каждого узла. Для устойчивости  $\Sigma S$  должна быть положительной в каждом узле.

3. Условия для  $\varphi$  и  $\Sigma S$  дают верхний и нижний пределы критического значения приложенной нагрузки.

4. Устойчивость можно проверить, приложив к любому узлу момент произвольной величины и определяя концевые моменты известным методом распределения моментов. Обычно, когда для концевых моментов получаются конечные значения, рама устойчива. Повторяем полный процесс с последовательно увеличивающимися

значениями нагрузок (величины нагрузок увеличиваются пропорционально), пока не найдем, что неуравновешенные моменты после некоторого числа уравнивания увеличиваются, а не уменьшаются. Тогда для рассмотренной системы нагрузок рама неустойчива.

5. В исключительных случаях можно получить конечные значения моментов для неустойчивого в действительности условия нагружения. Изменим порядок некоторых шагов процесса распределения моментов. Если посредством этого мы опять получим те же значения для концевых моментов, то конструкция устойчива. Если получаются другие значения, конструкция неустойчива.

Хофф основывал свое доказательство теоремы о сходимости на свойствах полной потенциальной энергии нагруженной рамной системы, используя геометрическую интерпретацию функции энергии как поверхности потенциальной энергии<sup>1)</sup>. По существу, показано, что в каждом цикле шагов метода уравнивания Кросса полный потенциал рамной системы уменьшается и таким образом приближается к минимальному значению, соответствующему устойчивому равновесию. Одновременно значения моментов на концах элементов стремятся к значениям, соответствующим равновесию системы. Однако, когда под действием нагрузок рама неустойчива, равновесие соответствует или наивысшей, или наименьшей точке поверхности потенциальной энергии. Следовательно, процесс распределения моментов, который уменьшает потенциальную энергию с каждым шагом, никогда не может привести к состоянию равновесия и значения концевых моментов не могут стремиться к значениям, соответствующим равновесию. В случае неустойчивости процесс распределения моментов расходится.

Вышеописанная теория устойчивости была обобщена на случай рамных систем с элементами, имеющими переменную изгибную жесткость между узлами<sup>2)</sup>. Чтобы принять во внимание влияние накладок в узлах, предположено, что каждый стержень имеет постоянную изгибную жесткость между накладками в узлах и что эта жесткость увеличивается по гиперболическому закону с увеличением расстояния от начала накладок до конца элемента, где жесткость становится бесконечно большой. Работа содержит определение коэффициентов жесткости и коэффициентов передачи моментов для сжатых и растянутых элементов и таблицы, из которых можно вычислить значения этих коэффициентов для стержней, имеющих одинаковые накладки на обоих концах и различные отношения длин накладки к теоретической длине стержня.

<sup>1)</sup> Доказательство дано в работе, цит. выше, стр. 246; Hoff N. J., *Stress Analysis of Aircraft Frameworks*, Proc. Roy. Aeronaut. Soc., т. 45, № 367, стр. 241, 1941; см. также Niles, Newell, цит. выше, стр. 299, т. II, стр. 303.

<sup>2)</sup> Хофф, Боли, Нардо и Кауфман, цит. выше, стр. 223.

**Рамные системы со смещающимися узлами.** До настоящего момента не было попыток усовершенствования метода распределения моментов для применения его к исследованию систем, допускающих перемещения узлов. Однако процесс распределения моментов недавно был применен к исследованию бокового выпучивания жесткой рамы, показанной на рис. 113<sup>1)</sup>.

Если жесткой раме дать произвольное боковое перемещение  $d$ , то можно вычислить соответствующие фиксированные концевые моменты в  $B$ ,  $C$  и  $D$  и после распределения и уравнивания этих моментов в доста-

точном числе циклов можно определить моменты на концах сжатых стержней. Применяя уравнения равновесия (404) § 59 к каждому из стержней, поперечные силы  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ , действующие на стержни, можно выразить через концевые моменты соответствующих элемен-

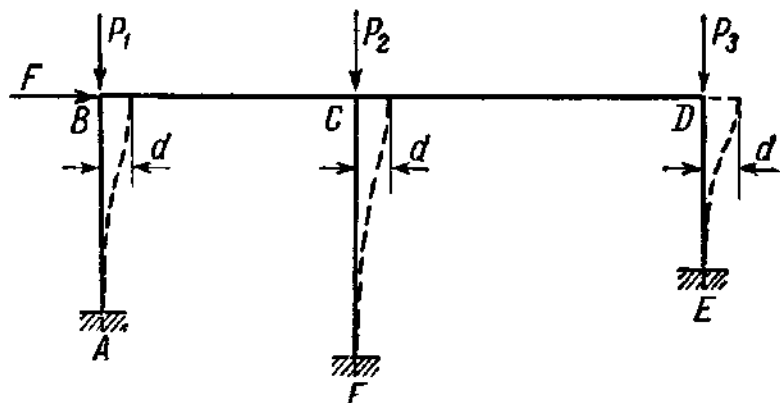


Рис. 113.

тов. Применяя вышеустановленные правила знаков и используя соотношения  $Plp = Pd$  и  $H = 0$ , приведем уравнение равновесия к следующему виду:

$$M + M' - Pd - Ql = 0, \quad (420)$$

где  $M$  и  $M'$  — концевые моменты, а  $l$  — длина стержня.

Критерий устойчивости можно получить при помощи следующего рассуждения. В случае, когда система при заданном условии нагружения находится в устойчивом равновесии, чтобы вызвать перемещение  $d$ , следует приложить в узле  $B$  конечную силу  $F$ . Поперечные силы  $Q$  и сила  $F$  связаны условием равновесия

$$\sum Q = F. \quad (421)$$

Чем ближе значения внешних нагрузок  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  к их критическим значениям, тем меньше становится значение силы  $F$ , необходимое для поддержания перемещения  $d$ , и при достижении действительного критического состояния сила  $F$  принимает значение нуль. Следовательно, условие

$$\sum Q = 0 \quad (422)$$

является условием выпучивания.

**Заключительные замечания.** Методы последовательных приближений, рассмотренные в этом разделе, были разработаны специально для применения к расчету ферм в авиационных конструкциях

<sup>1)</sup> См. Винтер, Сюй, Гу, Ло, цит. выше, стр. 223.

в целях определения как можно более точного значения критической нагрузки. Однако с увеличением числа стержней, образующих ферму, необходимые вычисления становятся более и более громоздкими. При определении действительных значений степени концевых защемлений элемента, что сводится к нахождению эффективной длины сжатого элемента как части фермы, вычисления можно упростить, рассматривая только группу стержней, находящихся в окрестности исследуемого стержня. Предполагается, что элементы группы взаимно соединены жестко, в то время как отдаленные концы элементов группы связаны с другими частями рамы шарнирно. Удовлетворительное приближение можно получить, если рассмотреть группы, состоящие по крайней мере из шести — восьми элементов, однако исследование все же потребует длинных вычислений<sup>1)</sup>. С другой стороны, если учитывать только влияние концевых защемлений непосредственно примыкающих элементов, результат может значительно отличаться от действительного значения степени заделки<sup>2)</sup>.

Что касается расчета мостов и сооружений, то здесь метод распределения моментов для определения устойчивости не привлек заметного внимания вследствие присущей ему сложности вычислений, которая делает невозможным его применение к практическим расчетам мостов, ферм перекрытий и т. д. Здесь положение существенно отличается от того, которое имеет место в авиационных конструкциях. Строительный инженер нуждается в простых правилах расчета, охватывающих по возможности большее число случаев, которые могут быть непосредственно применены к определению эффективных длин элементов фермы. Гибкие сжатые элементы встречаются сравнительно редко в мостах и фермах перекрытий. В большинстве случаев, как правило, употребляются гибкости меньше 80, и в этом интервале ошибка в определении степени защемления не влияет существенно на экономичность конструкции, даже если использованная приближенная формула даст несколько заниженные результаты. Очень удачно, что описанные в предыдущих параграфах аналитические методы дают возможность получить решение многих практически важных задач устойчивости в таком виде, что можно полученные результаты облечь в форму легко доступных правил проектирования.

## **62. Влияние изгибающих моментов в элементах рам на устойчивость**

Задача устойчивости рам до сих пор была рассмотрена в предположении, что в отдельных элементах к началу выпучивания не имеется изгибающих моментов. В действительности, во многих

---

<sup>1)</sup> Lundquist E. E., Stability of Members under Axial Load, NACA Tech. Note 717, 1939.

<sup>2)</sup> См. Винтер, Сюй, Гу и Ло, цит. выше, стр. 223.

практически важных рамных системах это условие не выполняется, и возникает вопрос, насколько эти моменты влияют на критическую силу конструкции и как учесть это влияние.

Наиболее простым примером является неразрезная балка на нескольких опорах при одновременном действии осевой и поперечной нагрузок. Аналитические и численные методы, описанные в предыдущих параграфах, применить нельзя, так как этими методами критерии устойчивости были получены при явном предположении действия на элементы рамы лишь осевых сил. Однако нет сомнения, что поперечные нагрузки могут значительно влиять на величину критической силы. Рассмотрим сжатый стержень под действием поперечных нагрузок. Это будет случай сжатого стержня, подвергнутого действию концевых моментов или боковой нагрузки, всесторонне рассмотренный в главе I. То же самое имеет место, когда любой элемент фермы поперечно нагружен между двумя узлами. Устойчивость всей конструкции, как показывают опыты с моделями <sup>1)</sup>, вследствие влияния местной нагрузки заметно уменьшается. Вторичные изгибные напряжения, возникающие вследствие жесткого соединения элементов в узлах и вызванные приложенными в узлах нагрузками, несомненно влияют на несущую способность системы. В сжатых стержнях неразрезных многоэтажных жестких рам с перегруженными балками при определенных условиях нагружения возникают значительные изгибающие моменты, и при исследовании выпучивания таких сжатых стержней влиянием этих моментов пренебречь нельзя.

Несмотря на то, что в большинстве случаев местные моменты стремятся уменьшить критическую силу конструкции, имеются также случаи, когда изгибающие моменты могут иметь благоприятное влияние на критическую силу. Кроме того, из теории внецентренно сжатых стержней известно, что влияние эксцентриситета на критическую силу значительно в пластической области выпучивания, но уменьшается в упругой области с увеличением гибкости сжатого стержня. Это означает, что влияние момента может быть более значительным для коротких сжатых элементов, чем для гибких. Этот факт делает еще более необходимым рассмотрение указанного влияния при расчете обычных стальных конструкций.

Однако решение задачи устойчивости с должным учетом влияния момента очень сложно, и это объясняет, почему предпринято лишь несколько попыток решения частных задач этого типа. Главные положения усовершенствованной теории выпучивания рам, учитывающей влияние первоначальных моментов в элементах перед выпучиванием на устойчивость, не являются общепризнанными. Некоторое представление о характерных особенностях этих задач

---

<sup>1)</sup> См. § 63.

устойчивости и о встречающихся затруднениях может дать следующее соображение.

Вспомним, что критическое состояние центрально сжатого стержня определялось нагрузкой  $P_{кр}$ , при которой одинаково возможны прямая и изогнутая форма равновесия — бифуркация положения равновесия. Точка  $B$  на рис. 114, *a*, где значения нагрузки  $P$  нанесены в зависимости от прогиба  $y$  центра сжатого стержня, является точкой бифуркации<sup>1)</sup>. Бифуркация состояний равновесия определяет также критическое состояние рамы, элементы которой подвержены действию только осевых сил.

Выпучивание внецентренно сжатого стержня представляет собой другой случай неустойчивости, как показывает кривая на рис. 114, *b*.

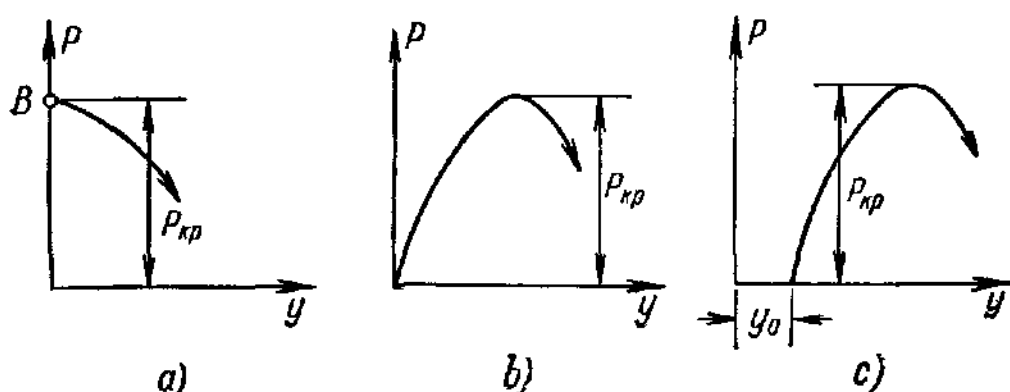


Рис. 114.

Прогиб сжатого стержня начинается при значении  $P = 0$  и монотонно увеличивается, пока не достигнуто значения критической силы  $P_{кр}$ <sup>2)</sup>. Таким образом, в этом случае бифуркации состояния равновесия не происходит. То же самое имеет место в случае рамы, элементы которой подвержены поперечной нагрузке между узлами. Поперечное нагружение любого элемента вызывает прогиб всех элементов системы и когда  $P$  увеличивается от нуля до ее максимального значения  $P_{кр}$ , первоначальный прогиб  $y_0$ , вызванный поперечной нагрузкой, монотонно возрастает до максимального значения, при котором рама разрушается, как показано на рис. 114, *c*. Вид неустойчивости здесь по существу тот же, что и показанный на рис. 114, *b*. Это означает, что правильное решение задачи устойчивости рамы с должным учетом влияния первоначальных моментов должно быть непременно основано на сложных методах исследования внецентренно или поперечно нагруженных сжатых стержней, рассмотренных в главе I. Это — громоздкая задача, которую, когда рама составлена из большого числа жестко соединенных стержней, решить практически невозможно. Однако путем систематического исследования простых рамных систем типа показанной

<sup>1)</sup> Глава I, стр. 21.

<sup>2)</sup> См. изложение в главе I, стр. 45.



на рис. 115, а—с можно получить ценные данные, которые могут быть применены к более сложным рамам. Аналитическое решение этих задач устойчивости возможно, когда исследование основывается

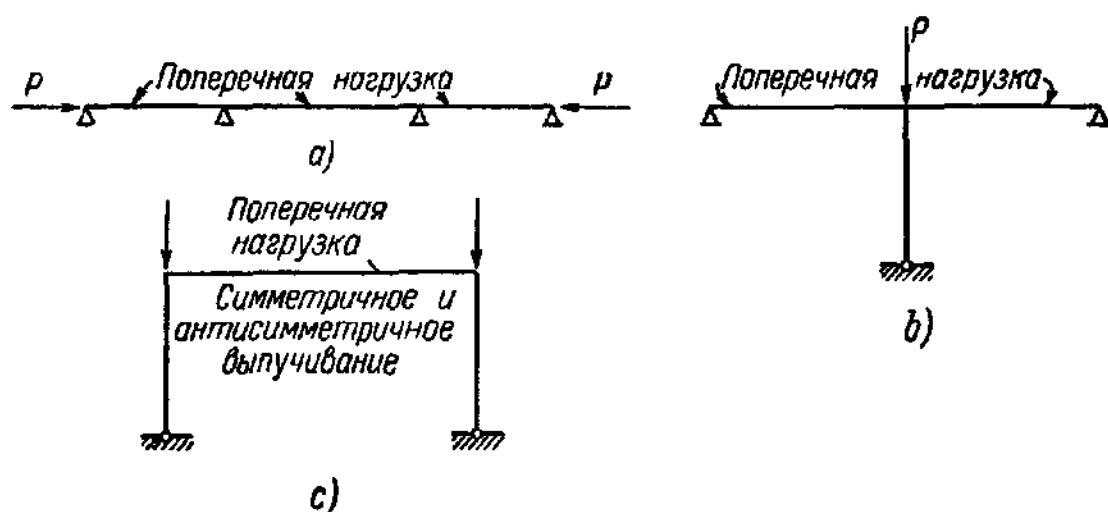


Рис. 115.

на упрощенной диаграмме напряжения деформации, как показано на рис. 116, и в предположении, что форму искривленной системы приближенно можно задать подходящим образом выбранной формой выпучивания системы, рассчитанной на основе теории, изложенной в § 59. Таким образом, для решения рассмотренных задач устойчивости предлагается использовать изложенный в главе I метод Ежека<sup>1)</sup>. Хвалла показал, что такие простые рамы можно успешно рассматривать и получать даже более точные решения задач устойчивости. Он применил свой метод, описанный в главе I, к трехъярусному сжатому стержню, где центральный ярус подвержен действию внешних моментов на концах. Исследование Хвалла<sup>2)</sup> основано на действительной диаграмме напряжения-деформации строительной стали. Следовательно, можно ожидать, что введение упрощенной диаграммы напряжения-деформации (рис. 116) позволит получить условия устойчивости рам, показанных на рис. 115, без значительных аналитических трудностей.

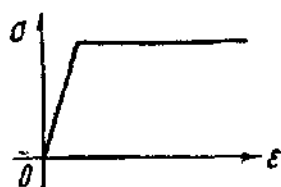


Рис. 116.

<sup>1)</sup> В недавно опубликованной работе была разработана теория пластического изгиба, основанная на диаграмме зависимости между напряжением и деформацией, состоящей из двух прямых линий с различными наклонами, которая в качестве предельного случая включает диаграмму, представленную на рис. 116. См. «A Study of Column Analysis» by Annabel Yuen-Wai Lee, Doctor's Thesis, Cornell University, June, 1949. Эта работа содержит также точное решение задачи внецентренно сжатых стержней, основанное на упрощенной диаграмме зависимости между напряжением и деформацией, показанной на рис. 116.

<sup>2)</sup> Chwalla E., Aussermittig gedrückte Baustahlstäbe mit elastisch eingespannten Enden und verschieden grossen Angriffshebeln, Die Bautechnik, т. 10, 1937.

Чрезвычайная трудность определения критической силы элементов рам при одновременном действии осевой и поперечной нагрузок привела к мысли использовать для исследования рам принцип, лежащий в основе формулы секанса в случае внецентренно сжатых стержней, т. е. применить критерий, согласно которому несущая способность конструкции исчерпана, если в одном из элементов напряжение в крайнем волокне равно пределу текучести. Таким образом, решение любой задачи устойчивости приводится к точному расчету напряжений в раме, где в уравнениях равновесия учитывается влияние прогиба стержня. Однако здесь можно сделать те же замечания, что и в главе I при рассмотрении формулы секанса. Критерий текучести не учитывает существенного запаса прочности, который имеют пластические материалы и который появляется после достижения предела текучести. Это становится особенно заметным в статически неопределимых системах — таких, как жесткие рамы. Тем не менее, при отсутствии точного фундаментального решения задачи устойчивости условие текучести может в некоторых случаях дать ценные сведения общего и качественного характера. В этом можно убедиться из последующего рассмотрения влияния вторичного изгиба в фермах на критическую силу.

Существуют, однако, другие задачи о выпучивании, где критерий напряжений совершенно нельзя применить. Это имеет место, когда изогнутая, но устойчивая форма равновесия, находящаяся под действием заданной системы сил, внезапно заменяется совершенно другой и неустойчивой формой равновесия, которая действительно соответствует критическому состоянию. Критическая сила, полученная на основе критерия текучести для устойчивой формы равновесия, не имеет в таком случае никакого отношения к действительной критической силе, связанной с совершенно другой формой равновесия. Случай бокового выпучивания жесткой рамы, рассмотренный в конце этого параграфа, может служить примером для указанного замечания.

Имеются также некоторые сомнения относительно возможности чисто экспериментального подхода к решению вышеупомянутых задач о расчете жестких рам из-за большого числа и широких интервалов изменения параметров, характеризующих каждую отдельную задачу. Этими параметрами являются осевые силы, отношения жесткостей, форма поперечного сечения и всевозможные условия поперечного нагружения. Успеха можно добиться только при тесной связи теоретических и экспериментальных исследований, что вызывает необходимость проведения серии опытов, условия которых соответствуют допущениям, принятым в аналитическом решении задачи. Первоочередная цель таких опытов состоит в получении экспериментальных данных для определения тех коэффициентов, теоретически значения которых нельзя вывести математически или вычисление которых громоздко.

Лишь некоторые исследования представляют собой вклад в дело решения задач устойчивости, рассмотренных в этом параграфе.

В 1936 г. Парсель и Мурер<sup>1)</sup> опубликовали статью о влиянии вторичных напряжений на предельную прочность элементов фермы, в частности о влиянии на устойчивость сжатых элементов. Исследование основано на рассмотрении напряженного состояния с учетом особого поведения вторичных напряжений, когда материал работает в нелинейной (пластической) области зависимости напряжения-деформации.

Говоря о сжатых элементах, авторы статьи подводят итог, резюмируя следующие важные особенности действия вторичных напряжений:

«1. Значительный поперечный прогиб вследствие вторичных напряжений заметно влияет на первоначальную разрушающую нагрузку сжатых элементов, изогнутых в одной плоскости. Однако это может иметь место только в случае больших вторичных моментов и гибких элементов — сочетание, которое обычно не реализуется. Для значений  $l/r \leq 70$  влияние вторичного действия на первоначальное разрушение мало. В таком случае смещения жесткого узла, которые вызывают вторичные напряжения, оказывают тормозящее влияние на прогиб длинных сжатых стержней вплоть до достижения предельной прочности сжатого стержня.

2. В случае сжатого стержня, изогнутого в двух плоскостях, вторичное действие, вынуждая стержень изгибаться по двум волнам, фактически может иметь благоприятное влияние<sup>2)</sup>, задерживая наступление первоначального разрушения.

3. В случае коротких элементов ( $l/r \leq 40$ ), которые обычно резервируют значительные вторичные напряжения, разрушение почти всегда происходит от местного перенапряжения. Пока среднее напряжение не достигает предела текучести, поперечный прогиб незначителен, и типичное поведение сжатого стержня не наблюдается.

Для таких элементов вторичные напряжения независимо от того, производят ли они изгиб в одной или двух плоскостях, в результате вызовут просто значительные напряжения на сжатой стороне, которые быстро разгружаются пластическим течением материала при приближении к пределу текучести».

---

<sup>1)</sup> Parcel J. I., Murer E. B., Effect of Secondary Stresses upon Ultimate Strength, Trans. ASCE, т. 101, стр. 289, 1936.

<sup>2)</sup> Автор книги склонен поставить под вопрос это заключение. Сжатый стержень, изогнутый по двум волнам, может внезапно перейти к одноволновой форме, когда достигается критическая сила, соответствующая первой форме выпучивания. Вышеприведенное утверждение в соответствии с рассмотренным ранее недостатком концепции текучести должно читаться так: в случае сжатого стержня, изогнутого в двух плоскостях, вторичное действие... не имеет никакого неблагоприятного влияния на наступление первоначального разрушения.

Первая попытка — она остается единственной — решения задачи о расчете рамы точным методом, использованным в исследовании внецентренно сжатых стержней, была сделана Хвалла<sup>1)</sup>. Он изучил

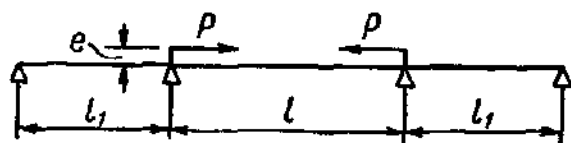


Рис. 117.

влияние упругой заделки на устойчивость сжатого стержня под действием внецентренной нагрузки. Упругая заделка осуществлялась смежными ненапряженными элементами, как показано на рис. 117.

Это — типичная задача из рода задач, предложенных ранее для исследования. Для особых случаев Хвалла привел численные результаты, которыми можно пользоваться для проверки разработанного в дальнейшем упрощенного метода исследования той же задачи или

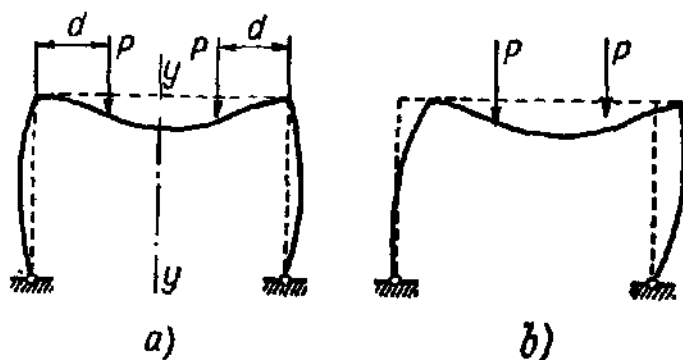


Рис. 118.

родственных ей. В этом и заключается значение его работы.

В другой статье Хвалла<sup>2)</sup> исследует задачу о боковой устойчивости жесткой рамы под действием поперечной нагрузки, показанной на рис. 118, а. Эта работа представляет большой интерес, так как в ней рассматривается не исследованный ранее вид устойчивости жесткой рамы. На рис. 118, а

показано деформированное состояние под действием нагружения, симметричного относительно вертикальной оси  $y-y$ . Когда значение  $P$  приближается к определенному критическому значению  $P_{кр}$ ,

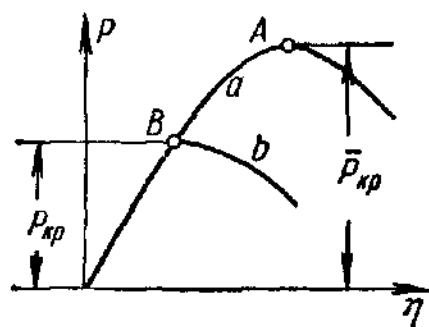


Рис. 119.

симметричная форма переходит в несимметричную (рис. 118, б). Если для симметричной формы изобразить зависимость значения нагрузки  $P$  от поперечного прогиба  $\eta$  любой точки оси сжатого стержня, то получим показанную на рис. 119 кривую  $a$ , которая имеет максимум в точке  $A$ , соответствующей критической силе  $\bar{P}_{кр}$ . Это значение критической силы может быть достигнуто только в случае, если предотвращены

боковые перемещения деформированной рамы. Если это не имеет места, рама становится неустойчивой при меньшем значении критической силы  $P_{кр}$  (точка  $B$  на рис. 119) и соотношение между нагрузкой и прогибом дается кривой  $b$ . Этот случай неустойчивости,

<sup>1)</sup> Хвалла, цит. выше, стр. 253.

<sup>2)</sup> Chwalla E., Die Stabilität lotrecht belasteter Rechteckrahmen, Der Bauingenieur, т. 19, стр 69, 1938.

по существу, тот же, что и случай, соответствующий рис. 114, а, характеризуемый бифуркацией состояния равновесия. Следовательно, значение критической силы  $P_{кр}$  в случае бокового выпучивания

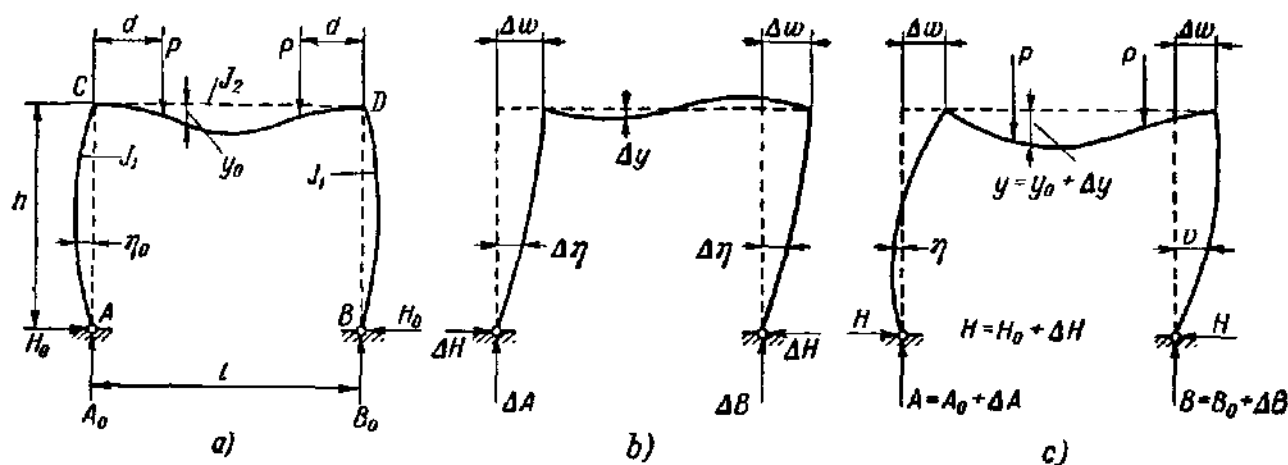


Рис. 120.

рамы можно найти на основе критерия, согласно которому при  $P = P_{кр}$  обе — симметричная и несимметричная формы одинаково возможны.

На рис. 120, а показано симметричное деформированное состояние рамы перед боковым выпучиванием. Момент инерции стоек равен  $J_1$ , момент инерции ригеля  $J_2$ . Величина  $\eta_0$  означает горизонтальный прогиб в любой точке стойки, а  $y_0$  — прогиб в любой точке элемента  $C-D$ . Для проверки устойчивости равновесия на

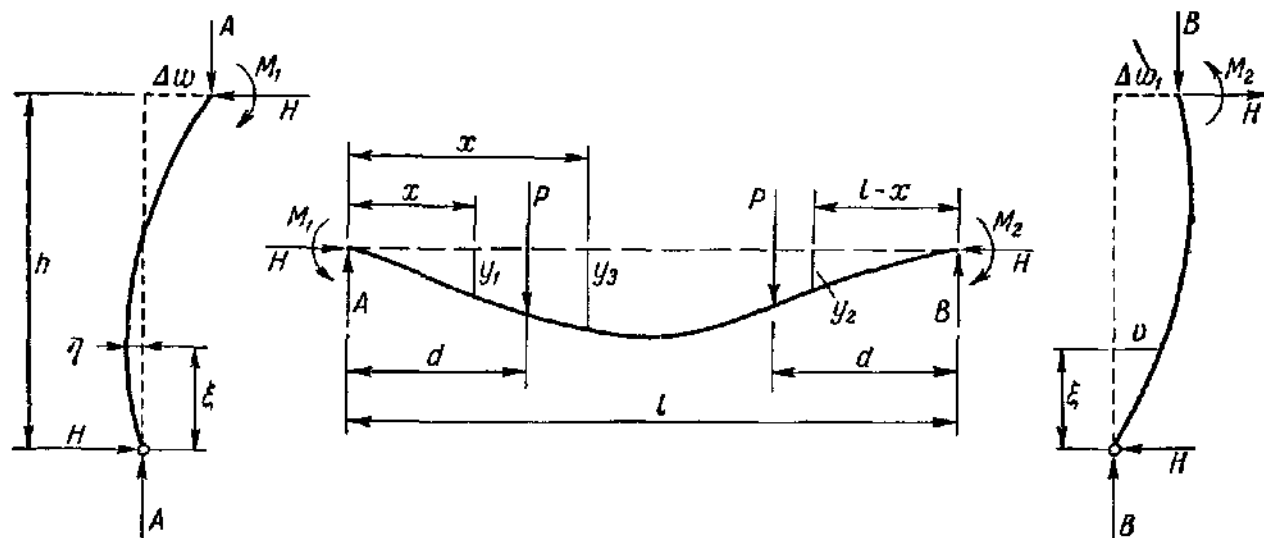


Рис. 121.

симметричную деформацию мы налагаем бесконечно малую антисимметричную деформацию, связанную с боковым перемещением  $\Delta w$  узлов  $C$  и  $D$ , как показано на рис. 120, б. Соответствующими прогибами являются  $\Delta \eta$  и  $\Delta y$ . Полученная в результате антисимметричная деформация представлена на рис. 120, с, где прогибы равны  $\eta = \eta_0 - \Delta \eta$  и  $y = y_0 + \Delta y$  и  $v = \eta_0 + \Delta \eta$ .

Далее, Хвалла разыскивает условия, при которых предполагаемое деформированное состояние (рис. 120, с) совместно с условием равновесия между внутренними и внешними силами. Он начинает исследование, составляя линейные дифференциальные уравнения, определяющие кривые прогибов элементов рамы. Из рассмотрения рис. 121, который не нуждается в пояснениях, можно легко написать следующие пять дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} EJ_1 \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + A\eta + H\xi &= 0, \\ EJ_2 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + Hy_1 + Ax - M_1 &= 0, \\ EJ_2 \frac{d^2 y_3}{dx^2} + Hy_3 + Ax - P(x-d) - M_1 &= 0, \\ -EJ_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} + Hy_2 + B(l-x) - M_2 &= 0, \\ EJ_1 \frac{d^2 \nu}{d\xi^2} + B\nu + H\xi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (423)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} A &= A_0 - 2P \frac{\Delta w}{l}; \quad B = B_0 + 2P \frac{\Delta w}{l}; \quad H = H_0 + \Delta H; \\ M_1 &= Hh - A \Delta w; \quad M_2 = Hh + B \Delta w, \end{aligned} \right\} \quad (424)$$

Решение этих пяти дифференциальных уравнений второго порядка содержит 10 произвольных постоянных и две неизвестные функции  $\Delta w$  и  $\Delta H$ , в итоге 12 подлежащих определению величин. Они находятся при помощи 12 граничных условий и условий непрерывности, а именно:

$$\left. \begin{aligned} [\eta]_{\xi=0} &= 0 & \text{и} & \quad [\eta]_{\xi=h} = -\Delta w; \\ [y_1]_{x=0} &= 0 & \text{и} & \quad \left[ \frac{dy_1}{dx} \right]_{x=0} = - \left[ \frac{d\eta}{d\xi} \right]_{\xi=h}; \\ [y_3 = y_1]_{x=d} & & \text{и} & \quad \left[ \frac{dy_3}{dx} = \frac{dy_1}{dx} \right]_{x=d}; \\ [\nu]_{\xi=0} &= 0 & \text{и} & \quad [\nu]_{\xi=h} = \Delta w; \\ [y_2]_{x=l} &= 0 & \text{и} & \quad \left[ \frac{dy_2}{dx} \right]_{x=l} = \left[ \frac{d\nu}{d\xi} \right]_{\xi=h}; \\ [y_3 = y_2]_{x=l-d} & & \text{и} & \quad \left[ \frac{dy_3}{dx} = \frac{dy_2}{dx} \right]_{x=l-d}. \end{aligned} \right\} \quad (425)$$

После подстановки решений уравнений (423) в уравнение (425) и исключения 10 постоянных имеем два уравнения относительно

неизвестных  $\Delta w$  и  $\Delta H$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{H_0} \Gamma - \frac{\Delta w}{h} \Lambda \cos \frac{\psi l}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\psi l}{2} - \frac{\Delta H}{H_0} \frac{P}{2H_0} \theta &= 0; \\ \frac{P}{H_0} \Gamma - \frac{\Delta w}{h} \Lambda \cos \frac{\psi l}{2} - \frac{\Delta H}{H_0} \frac{P}{2H_0} \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (426)$$

Величины  $\Gamma$ ,  $\Lambda$  и  $\theta$  являются трансцендентными функциями от

$$\varphi = \sqrt{\frac{P}{EJ_1}}; \quad \psi = \sqrt{\frac{H_0}{EJ_2}}. \quad (427)$$

Предполагая, что  $\Delta H = 0$  и  $\Delta w = 0$ , из уравнений (426) получим:

$$\frac{P}{H_0} \Gamma = 0, \quad (428)$$

которое определяет горизонтальную реакцию  $H_0$ , обусловленную нагрузками  $P$  для симметричной формы деформации перед выпучиванием. Теперь мы рассуждаем следующим образом. Если при некотором значении  $P = P_{кр}$  одинаково возможны как симметричное, так и антисимметричное деформированные состояния, то тогда  $P_{кр}$  должна удовлетворить одновременно уравнениям (426) и (428). Используя соотношение (428), можно упростить уравнения (426) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta w}{h} \Lambda \cos \frac{\psi l}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\psi l}{2} + \frac{\Delta H}{H_0} \frac{P}{2H_0} \theta &= 0; \\ \frac{\Delta w}{h} \Lambda \cos \frac{\psi l}{2} - \frac{\Delta H}{H_0} \frac{P}{2H_0} \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (429)$$

Эти уравнения совместны с конечным значением  $\Delta w$ , если  $\Lambda = 0$  и  $\Delta H = 0$ . Из условия  $\Lambda = 0$  получим уравнение

$$\begin{aligned} \varphi h \operatorname{ctg} \varphi h - \frac{2Ph}{H_0 l} \left( 1 - \frac{\psi l}{2} \operatorname{ctg} \frac{\psi l}{2} \right) + \\ + \frac{H_0 h}{Pl} \left( 2 - \varphi h \operatorname{ctg} \varphi h - \frac{\varphi^2 h^2}{\sin^2 \varphi h} \right) = 0. \end{aligned} \quad (430)$$

Это условие вместе с уравнением (428) позволяет определить значения  $P_{кр}$  и  $H_0$ . На основании того, что  $\Delta H = 0$ , можно заключить, что неустойчивая форма получается при помощи наложения на устойчивую симметричную форму антисимметричной конфигурации, для которой, очевидно,  $\Delta H = 0$ .

Однако метод Хвалла излишне сложен. Уравнения (426) можно получить более простым путем, используя метод, описанный в § 59. Для решения задачи необходимы только два уравнения трех моментов, наиболее подходящих для рассматриваемого здесь типа задач устойчивости, и два уравнения равновесия (404). Последние

два уравнения идентичны выражениям для моментов  $M_1$  и  $M_2$ , находящихся в группе уравнений (424). Исключая при помощи этих двух выражений  $M_1$  и  $M_2$  из уравнений трех моментов, получим два уравнения, которые должны быть эквивалентными уравнениям (426).

В своей работе Хвалла рассматривает два числовых примера в предположении, что нагрузки  $P$  приложены на одной трети длины горизонтального элемента от концов. В случае 1 отношение  $l/h = 1$ ; в случае 2  $l/h = 3$ . Предполагается, что в обоих случаях моменты инерции  $J_1 = J_2 = J$ .

Значения критических сил равны:

$$\text{в случае 1 } P_{кр} = 1,775 EJ/h^2;$$

$$\text{в случае 2 } P_{кр} = 1,058 EJ/h^2.$$

Эти значения в несколько раз меньше, чем эйлерова сила  $P_E = \pi^2 EJ/h^2$  сжатого стержня.

Сравнение этих результатов со значениями критических сил, полученных, когда нагрузки  $P$  действуют вдоль осевой линии стоек, как показано на рис. 122, приводит к важным выводам. Так как в этом случае на элементы жесткой рамы действуют только осевые силы, можно непосредственно применить методы, изложенные в предыдущих параграфах. Боковое выпучивание таких типов жестких

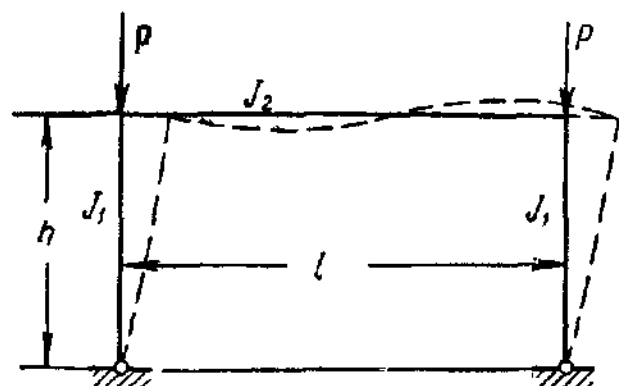


Рис. 122.

рам было исследовано. Для случая, когда внешние нагрузки  $P$  приложены на вершинах колонн, Хвалла приводит следующие значения критических сил:

$$\text{в случае 1 } P'_{кр} = 1,816 EJ/h^2;$$

$$\text{в случае 2 } P'_{кр} = 1,090 EJ/h^2.$$

Отметим важный факт: первоначальные моменты, которые имеются в момент выпучивания, уменьшают значение разрушающей нагрузки только незначительно. Различие между значениями  $P_{кр}$  и  $P'_{кр}$  составляет соответственно 2,3 и 3,0%, и следовательно, можно заключить, что критическую силу для бокового выпучивания жестких рам, составленных из стоек и ригелей, можно вычислить, не принимая во внимание моменты, вызываемые в элементах внешними нагрузками.

Представленное выше исследование основывалось на предположении, согласно которому нигде в конструкции при достижении критического состояния предел пропорциональности не превышен. Следовательно, разработанная теория является в известном смысле академической. Ее можно рассматривать как начало правильных



исследований в области задач устойчивости, рассмотренных в этом параграфе. В практических случаях в некоторых частях конструкции изгибные напряжения в волокнах могут до выпучивания превзойти предел пропорциональности и пластические деформации этих частей может до некоторой степени уменьшить значение критической силы жесткой рамы.

### 63. Экспериментальные исследования в области устойчивости рам

В Политехническом институте Бруклина были проведены замечательные опыты с восемью образцами. Цель этих опытов заключалась в проверке пригодности критерия сходимости Хоффа и в исследовании влияния узловых накладок различных длин<sup>1)</sup>. Все образцы, кроме одного, разрушились вследствие выпучивания. Из семи образцов, которые выпучились, два были рассчитаны на потерю устойчивости в неупругой области; остальные пять выпучились при напряжениях, находящихся ниже предела пропорциональности.

Два образца были изготовлены из сплошных стальных прутков, сварены в узлах так, что влияние узловых накладок не имело места. Все остальные модели ферм были снабжены заклепочными узловыми накладками.

В таблице 15 показано сравнение вычисленных и измеренных значений нагрузки выпучивания.

Т а б л и ц а 15

№ образца	Размеры узловых накладок, % длины стержня	Вычисленные значения критической силы, кг		Экспериментальные значения критической силы	Процент ошибки по сравнению с экспериментальным значением
		упругая область	неупругая область		
1	...	199		197	+ 1,1
2		199		201	— 1,1
3	9	80		83	— 3,2
4	9	92		97	— 5,1
5	13	136		136	0
5	20	145		200	—22,7
6	20			Не разрушился при выпучивании	
7	20		2665	2540	+ 4,9
8	15		2665	2458	+ 8,4

Вычисляемые и наблюдаемые значения критической силы находятся в хорошем соответствии, за исключением второй серии опытов

<sup>1)</sup> Хофф, Боли, Нардо и Кауфман, цит. выше, стр. 223.

на образце № 5, результаты которых показывают, что метод для вычисления эффекта, вызываемого жесткостью узловых накладок, в этом частном случае недооценен.

Явления выпучивания наблюдались также в случае, когда один из элементов фермы был подвержен действию поперечных нагрузок различной интенсивности. Поперечное нагружение представляло собой сосредоточенную нагрузку величиной 2,25; 4,5; 6,75 или 9 кГ, приложенную в середине элемента. В случае наличия поперечной нагрузки значение критической силы всегда уменьшалось.

«Деформированное состояние рам в момент выпучивания всегда было одинаковым для образцов одинаковой формы. Наибольшая приложенная поперечная нагрузка в 9 кГ была не в состоянии изменить эту форму для любого образца, даже когда начальный прогиб, вызванный поперечной нагрузкой, имел направление, противоположное направлению прогиба, имевшего место в момент выпучивания.

«Наибольшее уменьшение значения критической силы было замерено в случае действия поперечной нагрузки в 9 кГ и достигало 16,7; 15,0 и 23,9% значения критической силы при отсутствии поперечной нагрузки соответственно для образцов № 3, 4 и 5».

---

## ГЛАВА VII

### ЭФФЕКТИВНАЯ ДЛИНА СЖАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ФЕРМ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЖЕСТКИХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

#### 64. Введение

В главе VI мы исследовали различные методы решений задач устойчивости, возникающих при проектировании рамных конструкций. Главной целью этой главы является применение аналитических методов, установленных в §§ 59 и 60 предыдущей главы, к двум группам задач. В первой части главы рассматриваются задачи по приближенному определению свободной длины сжатых элементов ферм и установлению расчетных правил и рабочих формул для практического проектирования. Их решение дает возможность строительному инженеру определить эффективную длину элемента фермы, не прибегая к сложным вычислениям. Во второй части этой главы исследуется устойчивость прямоугольных жестких рамных конструкций, особенно явление выпучивания многоэтажных рам.

В 1919 г. автор книги применил аналитические методы к определению эффективной длины сжатых элементов в фермах, разделив ферму на небольшие группы стержней<sup>1)</sup>. Все более возрастающий интерес авиационного инженера к этой задаче привел к различным попыткам решить ее в основном с помощью вышеуказанного способа для составления таблиц и графиков и использования их в практике авиационного проектирования. Боркман<sup>2)</sup> привел серии ценных диаграмм для исследования систем из двух и трех смежных групп стержней. Кассенс<sup>3)</sup> сделал попытку установить рабочие формулы для систем из двух и трех групп смежных стержней, аппроксимируя трансцендентные функции в исследовании простыми алгебраическими функциями и на основании предположения о том, что параметр  $\tau$

---

<sup>1)</sup> Bleich F., Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen, Der Eisenbau, т. 10, стр. 27, 1919.

<sup>2)</sup> Borkmann K., Charts for Checking Stability of Compression Members in Trusses, NACA Tech. Mem. 800, 1936; Charts for Checking the Stability of Plane Systems of Rods., NACA Tech. Mem. 837, 1937.

<sup>3)</sup> Cassens J., Der elastisch eingespannte Knickstab, Luftfahrt — Forschung, т. 14, стр. 501, 1937.

является линейной функцией напряжения, как это делалось ранее немецкими исследователями. Общее условие устойчивости для системы из трех групп смежных стержней в удобной форме дано Осгудом<sup>1)</sup>.

### 65. Устойчивость сжатых элементов ферм

Сжатые элементы в сварных или клепаных фермах ведут себя как сжатые стержни с упруго заделанными концами. Заделка любого отдельного элемента обусловлена взаимодействием между этим элементом и другими частями рамной конструкции, но точное определение ее значения требует довольно сложных вычислений. Следовательно, вполне рациональным представляется метод получения

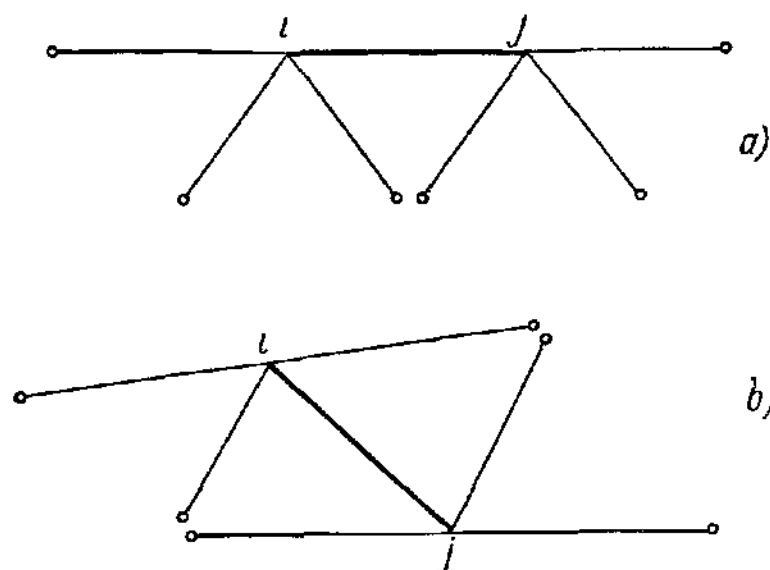


Рис. 123.

приближенного значения степени заделки при условии пренебрежения влиянием элементов, отдаленных от рассматриваемого элемента. Таким образом, получаются три группы элементов смежных стержней, практически более удобные для простого анализа. На рис. 123, *a* и *b* приведены примеры таких групп стержней, в которых  $ij$  обозначает исследуемый сжатый элемент.

Часто предполагают, что

при исследовании поведения элемента фермы возможно получение недостаточного приближения, если это исследование ограничивается только учетом влияния на рассматриваемый элемент тех двух групп стержней, которые соединяют этот элемент при условии, что их отдаленные концы являются свободно опертыми. Это несколько неопределенное с точки зрения инженера-проектировщика предположение следует кратко исследовать с целью выяснения действительной степени приближения, которую можно получить, изучая упрощенную систему, и решить, достаточно ли точно полученное приближение отвечает требованиям безопасного и экономичного проектирования.

Для того чтобы получить представление о величине допускаемой ошибки при пренебрежении влиянием элементов, отдаленных от элемента  $ij$ , целесообразно рассмотреть идеализированную задачу.

<sup>1)</sup> Osgood W. R., Contribution to the Design of Compression Members in Aircraft, Natl. Bur. Standards (U. S.), Journ. Research Paper RP 698, стр. 157, 1932.

Полученные числовые результаты послужат основой для оценки влияния отдаленных элементов на степень заделки сжатого элемента.

Рассмотрим стержень  $AB$  на рис. 124,  $a$ , свободно опертый на концах  $A, B$  и на промежуточных опорах  $h, i, j, k$ . Осевые силы в элементах  $l$  и  $l_1$ , рассматриваемые как первичные элементы, являются сжимающими силами, в то время как силы, действующие

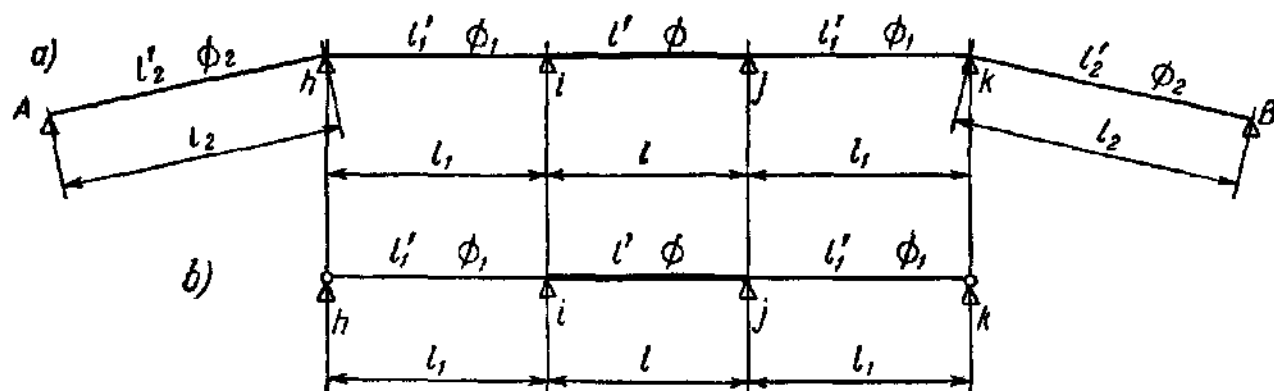


Рис. 124.

на концевых пролетах, могут быть сжимающими или растягивающими силами. Очевидно, что два элемента  $l_2$  (вторичные элементы) оказывают на трехпролетную систему  $hijk$  некоторое положительное или отрицательное сдерживающее влияние в зависимости от их длины  $l_2$ , изгибной жесткости и величин и знаков осевых сил. Элементы  $l_2$  можно рассматривать как заделку, обусловленную элементами фермы, отдаленными от рассматриваемого элемента  $ij$ . В связи с тем, что поведение элементов системы и их влияние на другие элементы зависят от коэффициента устойчивости  $\Phi = l\sqrt{P/EJ}$  и приведенной длины  $l'$  [определяемой уравнением (392) в гл. VI], припишем элементам  $l, l_1, l_2$  соответственно коэффициенты  $\Phi, \Phi_1, \Phi_2$  и длины  $l', l'_1, l'_2$ , как это показано на рис. 124,  $a$ . Таким образом, рассматриваемая задача сводится к исследованию влияния различных значений  $\Phi_2$  и  $l'_2$  на коэффициент устойчивости  $\Phi$ , который в конечном счете определяет эффективную длину элемента  $ij$ . Сравнение вычисленной эффективной длины  $kl$  элемента  $ij$  (рис. 124,  $a$ ) со свободной длиной  $k_0l$ , вычисленной для первоначальной системы (рис. 124,  $b$ ), в которой концы  $h$  и  $k$  шарнирно соединены с опорами, выявит влияние любой добавочной заделки, обусловленной вторичными элементами  $l_2$ , на критическую силу.

Указанная задача о выпучивании легко решается при помощи уравнений трех моментов (397), выведенных в § 59. Вследствие симметрии рассмотренной системы и на основе того, что наименьшее значение критической силы, очевидно, связано с симметричной формой выпучивания, моменты на опорах в момент выпучивания связаны следующим образом:

$$M_A = M_B = 0, \quad M_h = M_k, \quad M_i = M_j. \quad (431)$$

Значения моментов  $M_h$  и  $M_i$  определяются из уравнений трех моментов:

$$\left. \begin{aligned} M_h(c_2 l'_2 + c_1 l'_1) + M_i s_1 l'_1 &= 0, \\ M_h s_1 l'_1 + M_i(c_1 l'_1 + c l' + s l') &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (432)$$

в которых параметры  $c$  и  $s$  являются соответственно функциями от  $\Phi$ ,  $\Phi_1$  или  $\Phi_2$ . Значения  $c$  и  $s$  определяются из уравнений (394) или (398) в зависимости от того, является ли осевая сила сжимающей или растягивающей.

Раскрывая детерминант, составленный из коэффициентов уравнений (432), получим в результате деления на  $l'^2$  условие устойчивости

$$\left(c_2 \frac{l'_2}{l'} + c_1 \frac{l'_1}{l'}\right) \left(c_1 \frac{l'_1}{l'} + c + s\right) - s_1^2 \left(\frac{l'_1}{l'}\right)^2 = 0. \quad (433)$$

Очевидно, что, анализируя задачу при помощи уравнения (433), необходимо несколько ограничивать изменения расчетных факторов, обуславливающих задачу. Такие ограничения необходимы для получения реальных результатов, отражающих действительные условия, преобладающие в хорошо спроектированной ферме типа использованной в гражданских инженерных конструкциях. Учитывая вышеуказанное, для отношений жесткостей  $l'_1/l'$ ,  $l'_2/l'$  и для отношений  $\Phi_1/\Phi$  были выбраны разумные пределы, и влияние, оказываемое вторичными элементами на устойчивость первичных, было исследовано для широкого диапазона изменений значений  $\Phi_2$ .

В пределах рассмотренных возможных изменений, охватывающих большинство случаев, встречающихся при проектировании стальных ферм зданий или мостов, найдено, что влияние вторичных элементов на свободную длину центрального элемента составляет от 0 до 10%. Остается установить, будет ли существенно отражаться на экономичности проекта пренебрежение этим влиянием при проектировании ферм. При рассмотрении этого вопроса следует иметь в виду, что в подавляющем большинстве случаев сжатые элементы фермы, используемой обычно в гражданских инженерных сооружениях, являются составными сжатыми стержнями с малой и средней гибкостью. Значения критических напряжений находятся далеко за пределом пропорциональности, по крайней мере в более тяжелых элементах, определяющих вес конструкции. Ошибка, заключенная в вышеуказанных пределах, имеет довольно ограниченное влияние на критическое напряжение и, следовательно, на вес конструкции.

Следующие цифры могут иллюстрировать влияние максимальной допущенной ошибки в 10% при определении степени заделки на критическое напряжение для различных гибкостей  $l/r \leq 100$ . Критическое напряжение  $\sigma_{кр}$ , соответствующее значению  $l/r$ , сравни-

вается с напряжением  $\sigma'_{кр}$  при условии, когда значение гибкости уменьшается до 0,9  $l/r$ . В таблице 16 показан прирост  $\sigma'_k$  над  $\sigma_{кр}$  в процентах напряжения  $\sigma_{кр}$  и рассчитан для строительной стали с  $\sigma_k = 1760 \frac{кг}{см^2}$  и  $\sigma_T = 2330 \frac{кг}{см^2}$ .

Т а б л и ц а 16

Гибкость . . . .	40	60	80	100
Прирост $\sigma'_c$ , % . .	0,5	1,5	2,8	3,8

Ошибка, допущенная при пренебрежении влиянием элементов, отдаленных от рассматриваемого, достигает 4% или менее этого, когда элемент выпучивается за пределом пропорциональности.

Значение вышеизложенного заключается в том, что при попытке установить рациональным путем простые расчетные правила для определения эффективной длины сжатых элементов фермы можно пренебречь влиянием отдаленных элементов и сосредоточить внимание на исследовании влияния смежных элементов. Такое упрощение с практической точки зрения не снижает безопасности конструкции или ее экономичности.

#### 66. Условие устойчивости части фермы, состоящей из трех групп стержней

В целях упрощения исследования рассмотренных ниже задач целесообразно иметь общее решение задачи устойчивости группы стержней при выпучивании в плоскости элементов, показанных на рис. 125.

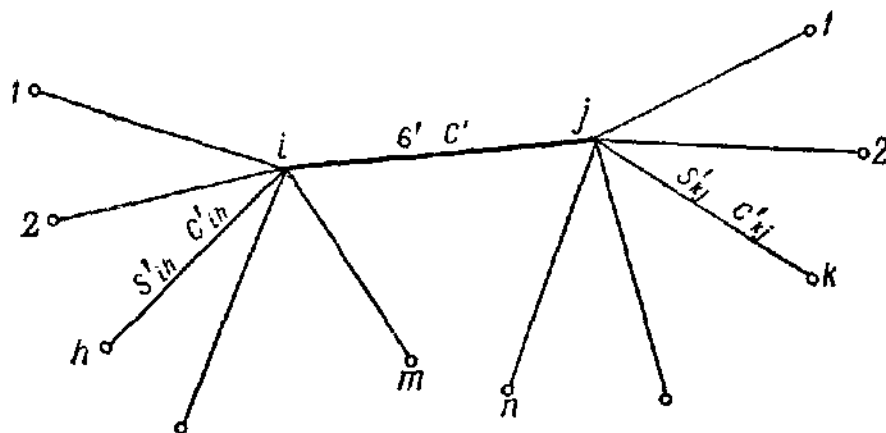


Рис. 125.

На основании использования уравнений четырех моментов Осгуду<sup>1)</sup> удалось найти решение задачи в очень удобной форме, непосредственно дающее аналитическое условие устойчивости для любого

<sup>1)</sup> Osgood W. R., Contribution to the Design of Compression Members in Aircraft, Natl. Bur. Standards (U. S.), Journ. Research Paper RP 698, стр. 157, 1932.

частного случая. В качестве введения к дальнейшему исследованию специфических задач в данной области дадим краткий вывод условия устойчивости.

Пусть стержень  $ij$  на рис. 125 является сжатым элементом, упруго заделанным на концах против вращения двумя группами элементов, сходящимися соответственно в  $i$  и  $j$ . Узлы  $i$  и  $j$  закреплены против перемещения. Элементы  $ih$  ( $h = 1, 2, \dots, m$ ) и  $jk$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) могут находиться под действием сжимающей или растягивающей нагрузки, а их отдаленные концы  $1, 2, \dots, m$  и  $1, 2, \dots, n$  предполагаются свободно опертыми.

Используем следующие обозначения:

- $l$  — длина элемента  $ij$ ;
- $l_{hi}$  и  $l_{kj}$  — соответственно длины смежных элементов  $ih$  и  $jk$  ( $h = 1, 2, \dots, m$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ );
- $M_i$  и  $M_j$  — концевые моменты элемента  $ij$ ;
- $M_{hi}$ ,  $M_{kj}$  — соответственно концевые моменты в  $i$  и  $j$  элементов  $hi$  и  $jk$  ( $h = 1, 2, \dots, m$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Применяя уравнение четырех моментов последовательно к парам элементов  $1i$  и  $ij$ ,  $2i$  и  $ij$  и т. д. и затем к парам элементов  $ij$  и  $j1$ ,  $ij$  и  $j2$  и т. д., получим следующие две системы уравнений:

$$M_{hi}c'_{hi} + M_i c' + M_j s' = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, m) \quad (434a)$$

и

$$M_{kj}c'_{kj} + M_j c' + M_i s' = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (434b)$$

где

$$c'_{hi} = c_{hi} l'_{hi}, \quad c'_{kj} = c_{kj} l'_{kj}, \quad c' = cl', \quad s' = sl'. \quad (435)$$

Значения  $c$ ,  $s$  и  $l'$  определяются из уравнений (392), (394) и (398).

Моменты  $M$  связаны двумя уравнениями, выражающими то условие, что сумма всех моментов, действующих соответственно в узлах  $i$  и  $j$ , должна равняться нулю. Согласно правилу знаков, использованному в § 59, эти уравнения будут:

$$\left. \begin{aligned} -M_i + \sum_{h=1}^m M_{hi} &= 0; \\ -M_j + \sum_{k=1}^n M_{kj} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (436)$$

Вводя величины  $M_i$  и  $M_j$  из уравнений (436) в уравнения (434), получим  $m + n$  линейных однородных уравнений, а именно  $m$  уравнений, вида

$$c' M_{1i} + c' M_{2i} + \dots + (c' + c'_{hi}) M_{hi} + \dots + c' M_{mi} + \\ + s' M_{1j} + s' M_{2j} + \dots + s' M_{kj} + \dots + s' M_{nj} = 0 \quad (437a)$$



и  $n$  уравнений вида

$$s' M_{1i} + s' M_{2i} + \dots + s' M_{hi} + \dots + s' M_{mi} + c' M_{1j} + c' M_{2j} + \dots + (c' + c'_{kj}) M_{kj} + \dots + c' M_{nj} = 0. \quad (437b)$$

Приравнявая нулю детерминант, составленный из коэффициентов системы  $m + n$  уравнений, получим условие критического состояния. После раскрытия этого детерминанта условие устойчивости принимает следующий вид:

$$\left( \frac{1}{c'_{1i}} + \frac{1}{c'_{2i}} + \dots + \frac{1}{c'_{mi}} \right) \left( \frac{1}{c'_{1j}} + \frac{1}{c'_{2j}} + \dots + \frac{1}{c'_{nj}} \right) (c'^2 - s'^2) + \\ + \left( \frac{1}{c'_{1i}} + \frac{1}{c'_{2i}} + \dots + \frac{1}{c'_{mi}} + \frac{1}{c'_{1j}} + \frac{1}{c'_{2j}} + \dots + \frac{1}{c'_{nj}} \right) c' + 1 = 0. \quad (438)$$

В случае, когда элемент  $ij$  шарнирно соединен в  $j$  со смежными элементами, уравнение (438) упрощается, так как  $\frac{1}{c'_{1j}} = \frac{1}{c'_{2j}} = \dots = 0$ :

$$\left( \frac{1}{c'_{1i}} + \frac{1}{c'_{2i}} + \dots + \frac{1}{c'_{mi}} \right) c' + 1 = 0. \quad (439)$$

## 67. Выпучивание поясов в плоскости фермы

Исследуя поведение сжатых поясов однопролетных ферм, полностью пренебрежем влиянием защемления, обусловленного присоединением к поясам элементов решетки. Их жесткость вообще мала по сравнению с жесткостью поясов, и их сдерживающий эффект является соответственно малым. Следовательно, пояс можно рассматривать как систему последовательных стержней, находящихся на неподатливых опорах и свободно вращающихся в узлах (рис. 126, а).

Предположим теперь, что все пояса рассчитаны так, что при некотором условии нагружения каждый элемент достигает критического состояния при  $\Phi = l\sqrt{P/EJ}\pi = \pi$ , где  $l$  — длина рассмотренного элемента. Безусловно, такой случай является идеальным, но в экономично рассчитанной ферме это условие приблизительно выполняется. Сделанное предположение представляет собой наихудшее условие для устойчивости каждого отдельного элемента, так как в том случае, когда это условие не удовлетворяется, элемент, имеющий некоторый запас устойчивости, будет поддерживать другие, увеличивая таким образом устойчивость всей системы. В связи с тем, что каждый элемент рассчитан для значения  $P_{кр} = \pi^2 EJ/l^2$ , т. е. на критическую силу шарнирно опертого сжатого стержня теоретической длиной  $l$ , можно предположить, что элементы являются также шарнирно опертыми, как это показано на рис. 126, б. В момент

выпучивания каждый элемент будет изгибаться по полуволне синусоиды, вследствие чего знак и величина прогиба каждого элемента независимы от знаков и величин прогибов других элементов. Среди бесконечного числа всевозможных форм выпучивания системы существует такая, где полуволны, если откладывать их по прямой линии (рис. 120, с), соединятся в непрерывную цепь, удовлетворяя, таким

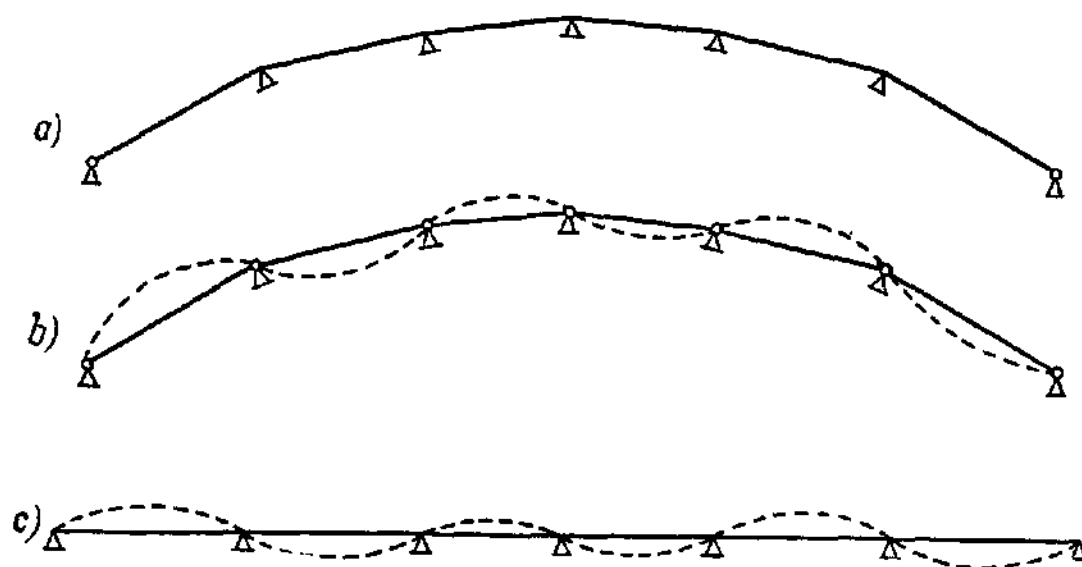


Рис. 126.

образом, действительным граничным условиям для поясов, жестко соединенных друг с другом. Следовательно, сжатый пояс, все элементы которого в пределах практических расчетов спроектированы одинаково безопасно, должен быть рассчитан так, как если бы они были шарнирно соединены в узлах. Свободная длина каждого элемента представляет собой теоретическую длину  $l$  (расстояние между концевыми точками панелей).

### 68. Фермы с постоянным поперечным сечением сжатого пояса

Фермы средней длины часто проектируются с постоянным поперечным сечением сжатого пояса. В связи с тем, что в однопролетной ферме усилия в поясе увеличиваются в направлении от опор к середине пролета, элементы, находящиеся ближе к опорам, значительно менее напряжены по сравнению с элементами, находящимися в середине пролета, сообщая им, таким образом, добавочную жесткость в сопротивлении выпучиванию. В целях экономии это полезно принимать во внимание при вычислении значения критического напряжения центрального элемента, которое определяет размеры поперечного сечения всего пояса. Задачу определения эффективной длины, принятой при проектировании пояса, можно легко решить и установить простое расчетное правило при условии некоторых упрощений в решении.

Ферма, показанная на рис. 127, а, предполагается равномерно нагруженной, в результате чего в верхнем поясе возникают силы  $P'_1, P'_2, \dots, P'_i, \dots, P'_n$ . Каждому узлу приписываем силу  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ), представляющую собой среднее значение сил, действующих в двух элементах, встречающихся в  $i$ . Значение  $P_i$  можно задавать ординатой в точке  $i$  параболы с максимальной ординатой  $P_m$ , где  $P_m$  есть напряжение в поясе в середине пролета (рис. 127, б).

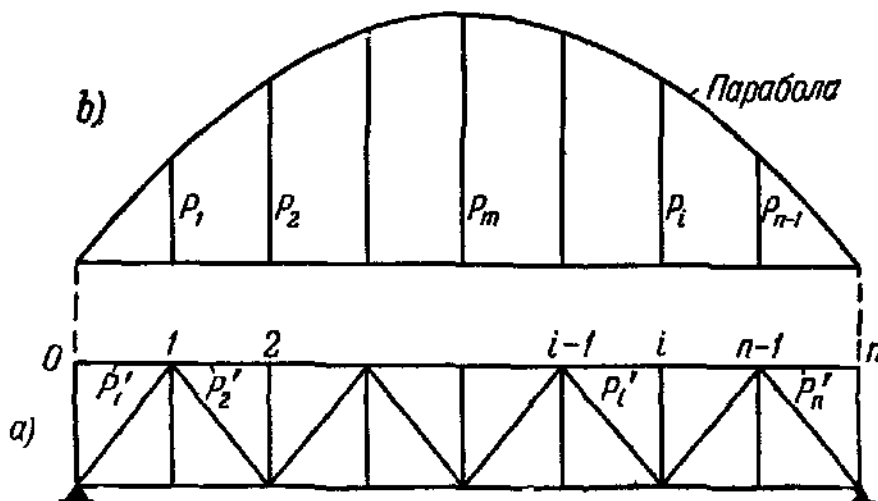


Рис. 127.

Применяя уравнение трех моментов (397) и рассматривая верхний пояс как стержень на неподатливых опорах, можно написать:

$$M_{i-1}s_i l + M_i(c_i + c_{i+1})l + M_{i+1}s_{i+1}l = 0,$$

имея в виду, что  $l'_i = l'_{i+1} = l$ , так как предполагается, что длины и моменты инерции их равны. В этом уравнении заменим  $s_i$  и  $s_{i+1}$ , а также  $c_i$  и  $c_{i+1}$  средними значениями  $s_i$  и  $c_i$  аргумента  $\Phi_i = l\sqrt{P_i/EJ\tau}$ . Деля на  $s_i l$ , имеем:

$$M_{i-1} + 2 \frac{c_i}{s_i} M_i + M_{i+1} = 0, \quad (440)$$

где

$$\frac{c_i}{s_i} = \frac{\sin \Phi_i - \Phi_i \cos \Phi_i}{\Phi_i - \sin \Phi_i}. \quad (441)$$

В целях упрощения значение  $\tau$  в выражениях для  $l'$  и  $\Phi_i$  предполагается постоянным и соответствующим напряжению  $P_m/A$  в середине пролета. Ясно, что это допущение приводит к завышенным значениям коэффициента  $k$ , определяющего свободную длину элементов пояса.

В пределах рассмотренных здесь значений  $\Phi_i$  уравнение (441) можно аппроксимировать выражением

$$\frac{c_i}{s_i} = 2 - \left(\frac{\Phi_i}{\pi}\right)^2.$$

Так как

$$P_i = \frac{4P_m}{n^2} i(n-i),$$

то, используя обозначение  $P_t = \pi^2 EJ\tau/l^2$ , получим:

$$\left(\frac{\Phi_i}{\pi}\right)^2 = \frac{P_i}{P_t} = \frac{4P_m}{n^2 P_t} i(n-i);$$

в результате имеем систему уравнений устойчивости

$$M_{i-1} + 4 \left[ 1 - \frac{2P_m}{n^2 P_t} i(n-i) \right] M_i + M_{i+1} = 0. \quad (442)$$

Обозначая член, находящийся в скобках, через  $r_i$ , получим условие устойчивости:

$$\begin{vmatrix} 4r_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4r_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & & 1 & 4r_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & & & 0 & 1 & 4r_{n-1} \end{vmatrix} = 0, \quad (443)$$

из которого определяется отношение  $P_m/P_t$ . Вычисление этого детерминанта для значений до  $n=10$  не представляет особых затруднений вследствие наличия симметрии  $r_i = r_{n-i}$ .

Выразим  $P_m$  через эквивалентную длину  $kl$  в форме

$$P_m = \frac{\pi^2 EJ\tau}{(kl)^2}, \quad (444)$$

где значение  $k$  дается выражением

$$k = \sqrt{\frac{P_t}{P_m}}. \quad (445)$$

Таблица 17 дает  $k$  для значений  $n$  от 3 до 10.

Таблица 17. Коэффициент длины  $k$  в уравнении (444)

$n$	3	4	6	8	10
$k$	0,769	0,830	0,899	0,917	0,927

Величину  $k$  можно выразить с достаточной точностью формулой

$$k = \sqrt{1 - \frac{5}{4n}} \quad (446)$$

и сделать следующее заключение: верхние пояса ферм с постоянным поперечным сечением можно рассчитать с эффективной длиной  $kl$ , где значение  $k$  дано уравнением (446)

### 69. Пояса неразрезных ферм

В неразрезных фермах могут иметь место особые условия. В области, где изгибающий момент меняет свой знак, один из двух смежных элементов пояса будет сжиматься, а другой — растягиваться. Из соображений экономичности нельзя пренебречь заделкой, вызванной иногда действием растягивающегося элемента. Для того чтобы получить простую расчетную формулу, рассмотрим систему из двух стержней (рис. 128), пренебрегая влиянием других элементов пояса и решетки, которые присоединяются в  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Через  $P_1$  обозначим осевую сжимающую силу в элементе  $l_1$ , через  $P_2$  — растягивающую силу в элементе  $l_2$ , а через  $J_1$  и  $J_2$  — соответствующие моменты инерции. Решение задачи можно получить на основе уравнения (439). Подставляя значения  $c'_{14} = c_1 l'_1$  и  $c' = c_2 l'_2$ , получим:

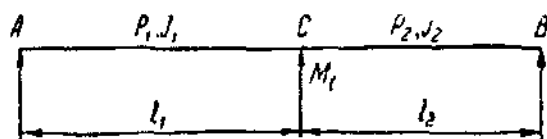


Рис. 128.

$$\frac{c_2 l'_2}{c_1 l'_1} + 1 = 0, \quad (447)$$

где

$$c_1 = \frac{1}{\Phi_1^2} (1 - \Phi_1 \operatorname{ctg} \Phi_1) \quad \text{и} \quad c_2 = \frac{1}{\Phi_2^2} (\operatorname{cth} \Phi_2 - 1). \quad (448)$$

В результате использования выражений для  $l'_1$  и  $l'_2$  [уравнение (392)] условие устойчивости (447) принимает следующий вид:

$$c_1 + \mu c_2 = 0, \quad (449)$$

где

$$\mu = \frac{l_2}{l_1} \frac{J_1 \tau_1}{J_2 \tau_2}. \quad (450)$$

Величину  $\Phi_2$  можно выразить через  $\Phi_1$ :

$$\Phi_2 = \Phi_1 \frac{l_2}{l_1} \sqrt{\frac{P_2}{P_1} \frac{J_1 \tau_1}{J_2 \tau_2}},$$

и, вводя обозначение

$$\rho = \sqrt{\frac{P_2 l_2}{P_1 l_1}}, \quad (451)$$

это уравнение можно написать в следующем виде:

$$\Phi_2 = \sqrt{\mu} \rho \Phi_1. \quad (452)$$

Уравнение (449) можно решить относительно  $\Phi_1$  при заданных значениях  $\mu$  и  $\rho$ . Результаты этого расчета приведены на рис. 129, где значения коэффициента  $k$ , определяющего эффективную длину сжатого элемента  $l_1$ , нанесены в зависимости от  $\mu$  для некоторых значений  $\rho$ . Необходимо отметить, что кривые асимптотически приближаются к значению  $k=1$ , когда значение  $\mu$  стремится к  $\infty$ .

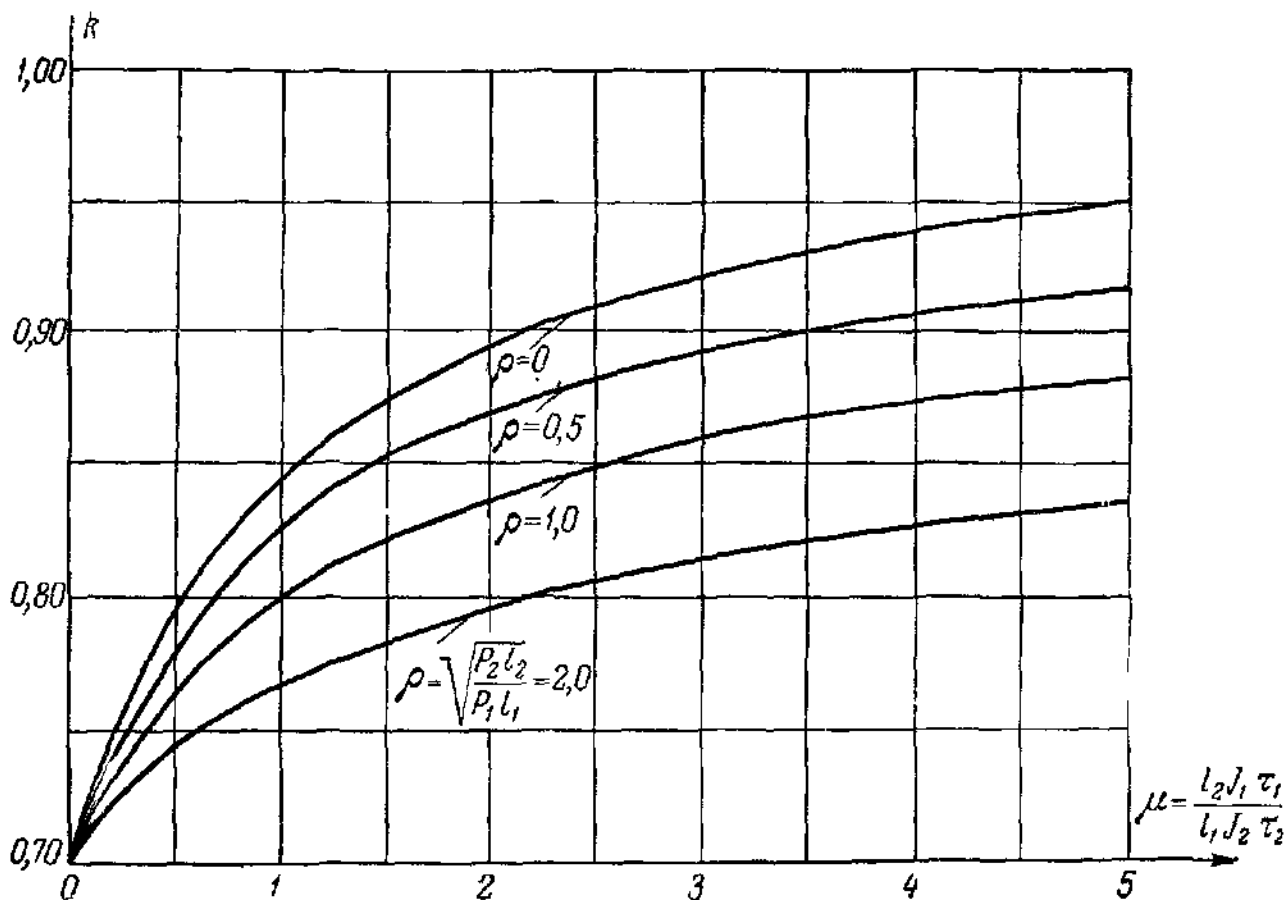


Рис. 129.

Соотношения между  $k$  и переменными  $\mu$  и  $\rho$ , представленные кривыми на рис. 129, можно приблизительно выразить алгебраической формулой

$$\left. \begin{aligned} k &= 0,700 + a\sqrt{\mu} - b\mu; \\ a &= 0,173 - 0,050\rho \quad \text{и} \quad b = 0,028 - 0,011\rho, \end{aligned} \right\} \quad (453)$$

где величины  $\mu$  и  $\rho$  определяются уравнениями (450) и (451). Уравнения (453) применимы для  $0 \leq \rho \leq 2$  и  $0 \leq \mu \leq 4$ .

В случае, когда в уравнении (451)  $P_1$  и  $P_2$  представляют собой осевые силы при расчетной нагрузке, величины  $\tau_1$  и  $\tau_2$  в уравнении (450) становятся функциями от напряжений  $\nu P_1/A_1$  и  $\nu P_2/A_2$ , где  $\nu$  — коэффициент безопасности, использованный при расчете сжатых элементов, а  $A_1$  и  $A_2$  — соответственно площади поперечных сечений элементов  $l_1$  и  $l_2$ . Значения  $\tau_1$  и  $\tau_2$  нужно взять из таблицы, где приведены значения  $\tau = E_t/E$  в функции от среднего напряжения  $P/A$  (табл. 3, стр. 71). Такую таблицу приблизительно можно использо-

вать как для сжатых, так и для растягиваемых элементов. Важно заметить, что заделка, вызванная растягиваемым элементом, зависит прежде всего от отношения  $\tau_1/\tau_2$ . В некоторых случаях значение  $\tau_2$  будет намного меньше, чем значение  $\tau_1$ , и отношение  $\tau_1/\tau_2$  может принять значение, равное  $\infty$ , при условии, если материал имеет ясно выраженный предел текучести. Это имеет место тогда, когда значение напряжения  $P_2/A_2$  в растягиваемом элементе приближается к значению допускаемого напряжения, и значение  $\sigma = \sqrt{P_2/A_2}$  равняется пределу текучести или может лежать за этим пределом<sup>1)</sup>. В таких случаях  $\mu$  становится равным  $\infty$  и  $k = 1$ , свидетельствуя о том, что растягиваемый элемент фактически не сдерживает действие смежного сжатого стержня. Заметное сдерживающее влияние появляется только тогда, когда значение напряжения  $P_2/A_2$  в растягиваемом элементе становится значительно ниже допускаемого напряжения. Тем не менее, во многих случаях отношение  $\tau_1/\tau_2$  может быть достаточно малым, в связи с чем уравнения (453) дают значения для  $k$  намного меньше единицы.

Для ферм, сделанных из алюминиевого сплава, условия являются более благоприятными, так как значение  $\tau_2$  остается конечным, несмотря на то, что оно становится малым. Однако сдерживающее действие растягиваемого элемента является довольно ограниченным, за исключением тех случаев, когда имеется некоторый запас прочности, а нагрузка смежного сжатого элемента приближается к критической.

Процесс проверки значения эффективной длины сжатого элемента является простым. Определим сначала величину  $\sigma_t = \sqrt{P_2/A_2}$ . Если значение  $\sigma_t$  близко к пределу текучести  $\sigma_T$  или больше, чем  $\sigma_T$ , то отпадает необходимость в дальнейших вычислениях; в этом случае эффективная длина равна теоретической длине  $l_1$ . Если значение  $\tau_2$  не очень мало, т. е. больше, например, чем 0,25, вычислим параметры  $\mu$  и  $\rho$ , а затем  $k$  из формулы (453). Величина  $kl_1$  представляет собой свободную длину, которую можно использовать при повторном проектировании сжатого элемента.

## 70. Выпучивание элементов решетки

Рассмотрим элемент решетки  $l_j$  на рис. 130. В целях наибольшего упрощения исследования пренебрежем любым возможным сдерживающим влиянием двух смежных растягиваемых элементов ре-

<sup>1)</sup> Необходимо иметь в виду, что значение коэффициента безопасности  $\gamma$  для сжатых элементов вообще считается большим по сравнению с коэффициентом безопасности  $\gamma'$ , лежащим в основе расчета растягиваемых элементов. Таким образом, растягиваемый стержень может начать течь, прежде чем сжатый элемент достигнет критической силы. Действительное значение разрушающей нагрузки конструкции связано со значением  $\gamma$ . Несмотря на то, что действие расчетной нагрузки, кратной  $\gamma'$ , вызывает текучесть растягиваемых элементов, оно в действительности не является причиной разрушения конструкции.

шетки и будем учитывать только жесткое соединение элемента решетки с верхним и нижним элементами поясов в  $i$  и  $j$ . Исследуемая рамная система показана сплошными линиями. Кроме того, предположим, что длины  $l_c$ , моменты инерции  $J_c$  и сжимающие силы  $P_c$  элементов пояса, встречающихся в  $i$ , равны, так же как значения  $l_t$ ,  $J_t$  и  $P_t$  двух элементов пояса, которые соединяются в  $j$ . Предполагается, что  $P_t$  есть растягивающая сила.

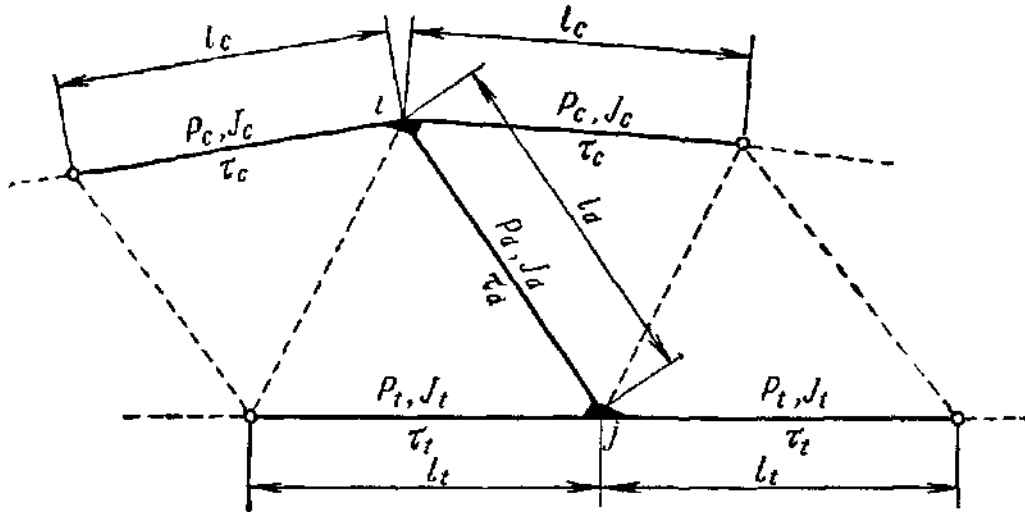


Рис. 130.

Применим теперь условие устойчивости Осгуда [уравнение (438)] к упрощенной рамной системе, показанной на рис. 130. Вводя

$$c'_{1i} = c'_{2i} = c_c l'_c, \quad c'_{1j} = c'_{2j} = c_t l'_t, \quad c' = c_d l'_d, \quad s' = s_d l'_d,$$

где величины  $c_c$  и  $c_t$  являются функциями коэффициентов устойчивости  $\Phi_c$  и  $\Phi_t$ , тогда как  $c_d$  и  $s_d$  являются функциями  $\Phi_d$ , получим:

$$\frac{4l_d'^2}{c_c l'_c c_t l'_t} (c_d^2 - s_d^2) + 2 \left( \frac{1}{c_c l'_c} + \frac{1}{c_t l'_t} \right) c_d l'_d + 1 = 0;$$

после преобразования условие устойчивости принимает следующий вид:

$$\left( c_c \frac{l'_c}{l'_d} + 2c_d \right) \left( c_t \frac{l'_t}{l'_d} + 2c_d \right) - 4s_d^2 = 0. \quad (454)$$

Подставляя обозначения

$$\alpha = \frac{\Phi_c}{\Phi_d} = \frac{l_c}{l_d} \sqrt{\frac{P_c J_d \tau_d}{P_d J_c \tau_c}}, \quad (455a)$$

$$\beta = \frac{l'_c}{l'_d} = \frac{l_c J_d \tau_d}{l_d J_c \tau_c}; \quad (455b)$$

$$\gamma = c_t \frac{l'_t}{l'_d} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{P_d J_d \tau_d}{P_t J_t \tau_t}}, \quad (455c)$$



уравнение (454) можно написать в следующем виде:

$$[\beta c_c(\alpha \Phi_d) + 2c_d(\Phi_d)](\gamma + 2c_d(\Phi_d)) - 4[s_d(\Phi_d)]^2 = 0, \quad (456)$$

где величины  $c_c$ ,  $c_d$  и  $s_d$  являются теперь функциями  $\Phi_d$ , а  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — параметры. Уравнение (456) можно при заданных значениях параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  решить относительно неизвестного  $\Phi_d$ .

При выводе уравнения (455с) было допущено некоторое приближение. Значение  $\Phi_t$ , соответствующее растягиваемым элементам  $l_t$ , намного больше, чем  $\pi$ , и в выражении (398) для  $c_t$  член  $\text{cth } \Phi_t$  можно заменить единицей. Таким образом, получим, что  $c_t = (\Phi_t - 1)/\Phi_t^2$ . Для больших значений  $\Phi_t$  это уравнение можно далее упростить к виду  $c_t = 1/\Phi_t$ . Выражая  $\Phi_t$  через  $\Phi_d$ , имеем:

$$\Phi_t = \Phi_d \frac{l_t}{l_d} \sqrt{\frac{P_t J_d \tau_d}{P_d J_t \tau_t}}. \quad (457)$$

Подставляя это соотношение в  $\gamma = c_t \frac{l'_t}{l'_d} = \frac{l'_t}{l'_d} \frac{1}{\Phi_t}$  и заменяя затем  $\Phi_d$  постоянным значением  $\pi$ , получим уравнение (455с). Фактически значение  $\Phi_d$  несколько больше  $\pi$ , и для расчетов использовалось его самое наименьшее значение  $\Phi_d = \pi$ . Нужно подчеркнуть, что эти упрощения создают тенденцию уменьшить значение  $\Phi_d$ , найденное из уравнения (456), поэтому получающееся в результате значение  $k = \pi/\Phi_d$  является безопасным.

В таблице 18 даны значения  $k$ , определяющие эффективную длину  $kl_d$  рассмотренного элемента решетки для широкого диапазона возможных значений параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  определяют влияние сжатого пояса на работу элемента решетки, тогда как значение  $\gamma$  определяет влияние на него растягиваемого пояса. При пользовании таблицей 18 нужно вычислить значения параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , исходя из средних значений  $l$ ,  $J$  и  $P$  двух элементов пояса, встречающихся соответственно в  $A$  и  $B$ .

Из табл. 18 видно, что в пределах приведенных в таблице значений параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  значение коэффициента длины  $k$  лежит между 0,57 и 1,00. Невозможно вывести простое расчетное правило, которое охватило бы особое условие заделки отдельного элемента стенки. Не существует никакого другого способа расчета, кроме метода пробного расчета элементов решетки со свободной длиной, равной расстоянию между конечными точками панелей, и проверки эффективных значений  $kl$  отдельных элементов с помощью таблицы 18. Способ определения параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , в сущности, тот же, что и способ, использованный при определении параметров  $\mu$  и  $\rho$ , описанный в предыдущем параграфе.

Значительное сдерживающее влияние на элементы стенки будут оказывать оба пояса — верхний и нижний, при условии, что элементы стенки и поясов не достигают одновременно их максимальных

Таблица 18. Значения коэффициента длины  $k$  для элементов решетки ферм (рис. 130). [Параметры  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  определяются уравнением (455)]

	$\beta$	$\gamma$						
		0,1	0,3	0,5	1,0	2,0	5,0	10
$\alpha = 0,5$	0,2	0,57	0,60	0,61	0,66	0,69	0,71	0,72
	0,6	0,61	0,64	0,67	0,70	0,73	0,76	0,77
	1,0	0,63	0,67	0,69	0,73	0,76	0,79	0,80
	2,0	0,66	0,70	0,73	0,77	0,81	0,84	0,85
	5,0	0,70	0,74	0,77	0,82	0,86	0,90	0,91
	$\beta$	$\gamma$						
		0,1	0,3	0,5	1,0	2,0	5,0	10
$\alpha = 0,6$	0,2	0,62	0,64	0,65	0,68	0,71	0,73	0,74
	0,6	0,65	0,68	0,69	0,73	0,75	0,78	0,79
	1,0	0,67	0,70	0,72	0,75	0,78	0,81	0,82
	2,0	0,69	0,72	0,75	0,79	0,82	0,85	0,86
	5,0	0,71	0,75	0,78	0,83	0,87	0,90	0,92
	$\beta$	$\gamma$						
		0,1	0,3	0,5	1,0	2,0	5,0	10
$\alpha = 0,7$	0,2	0,70	0,71	0,72	0,73	0,75	0,76	0,77
	0,6	0,71	0,73	0,74	0,76	0,79	0,81	0,81
	1,0	0,72	0,74	0,76	0,78	0,81	0,83	0,84
	2,0	0,72	0,75	0,77	0,81	0,84	0,87	0,88
	5,0	0,73	0,77	0,80	0,84	0,88	0,91	0,93
	$\beta$	$\gamma$						
		0,1	0,3	0,5	1,0	2,0	5,0	10
$\alpha = 0,8$	0,2	0,79	0,80	0,81	0,81	0,82	0,82	0,83
	0,6	0,78	0,80	0,81	0,82	0,84	0,85	0,86
	1,0	0,78	0,79	0,81	0,83	0,85	0,87	0,88
	2,0	0,76	0,79	0,81	0,84	0,87	0,90	0,91
	5,0	0,75	0,79	0,82	0,85	0,89	0,93	0,94
	$\beta$	$\gamma$						
		0,1	0,3	0,5	1,0	2,0	5,0	10
$\alpha = 0,9$	0,2	0,89	0,88	0,89	0,90	0,91	0,91	0,91
	0,6	0,86	0,87	0,88	0,89	0,91	0,92	0,92
	1,0	0,85	0,86	0,87	0,89	0,91	0,93	0,93
	2,0	0,82	0,86	0,86	0,89	0,91	0,94	0,95
	5,0	0,79	0,82	0,84	0,88	0,92	0,95	0,96
	$\beta$	$\gamma$						
		0,1	0,3	0,5	1,0	2,0		
$\alpha = 1,0$	0,2	0,98	0,98	0,98	0,99	0,99		
	0,6	0,95	0,96	0,97	0,97	0,98		
	1,0	0,92	0,94	0,95	0,96	0,98		
	2,0	0,88	0,91	0,92	0,94	0,96		
	5,0	0,84	0,86	0,88	0,91	0,94		

напряжений. Это происходит тогда, когда максимальное напряжение в элементе стенки возникает как результат имеющегося условия нагружения, явно отличного от условия, вызывающего наибольшие напряжения в элементах пояса. Данное явление имеет место в мостовых фермах, подкрановых балках и т. п., где нужно рассматривать изменяющиеся условия нагружения при определении максимальных напряжений. С другой стороны, очевидно, что невозможно создать никакой заметной заделки в фермах, где максимальные напряжения, на которых основывается расчет отдельных элементов, возникают при одном и том же условии нагружения. Элементы решетки таких ферм нужно рассчитывать как сжатые стержни с эффективной длиной, равной расстоянию между конечными точками панелей.

### 71. Стойки в полураскосных фермах

Уже не раз ставился вопрос об эффективной длине вертикальных элементов полураскосных ферм для выпучивания, перпендикулярного к плоскости фермы. В случае, показанном на рис. 131, *a*, верхняя половина элемента *AB* растягивается, нижняя половина сжимается. В ее наиболее простой форме решаемая задача сводится

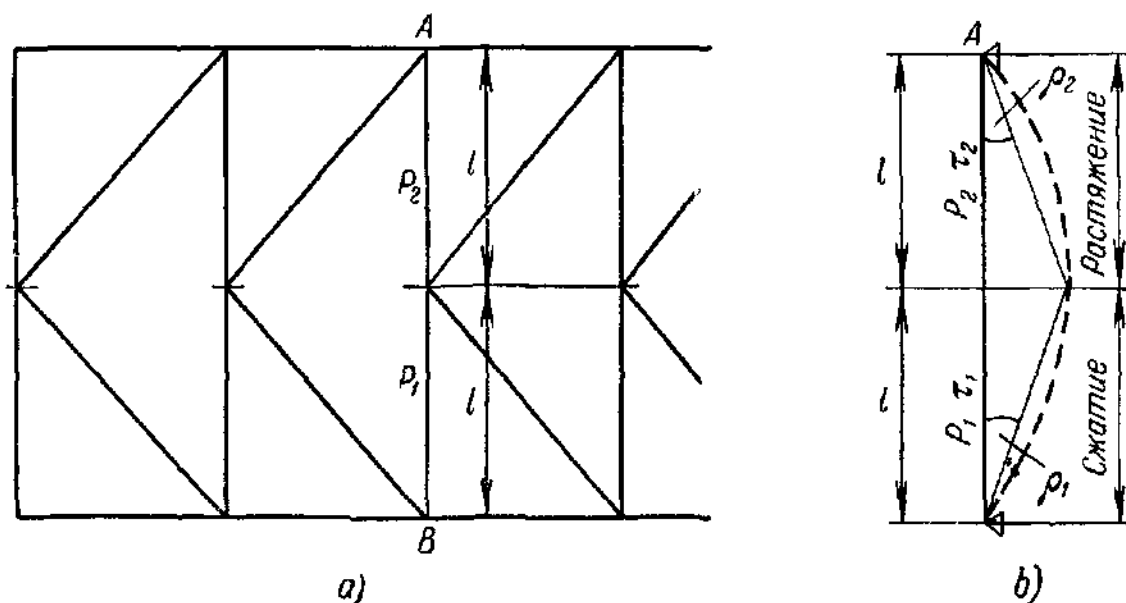


Рис. 131.

к задаче о шарнирно опертом сжатом стержне длиной  $2l$ , находящемся под действием сжатия в одной половине и растяжения — в другой половине его длины. Предполагается, что момент инерции  $J$  при выпучивании в направлении, перпендикулярном к плоскости фермы, один и тот же для обеих частей элементов.

При помощи обозначения, использованного на рис. 131, *b*, можно написать следующие уравнения устойчивости <sup>1)</sup>:

<sup>1)</sup> Уравнения (397), (403) и (404) в главе VI.

уравнение трех моментов

$$M \left( \frac{c_1}{\tau_1} + \frac{c_2}{\tau_2} \right) l - EJ(\rho_1 - \rho_2) = 0; \quad (458)$$

уравнения равновесия

$$M - P_1 l \rho_1 - Ql = 0 \quad \text{и} \quad -M + P_2 l \rho_2 - Ql = 0; \quad (459)$$

геометрическое соотношение

$$\rho_1 + \rho_2 = 0. \quad (460)$$

Исключая величины  $Q$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ , эти четыре уравнения можно свести к одному, а именно:

$$M \left[ \frac{c_1}{\tau_1} + \frac{c_2}{\tau_2} - \frac{4EJ}{l^2 (P_1 - P_2)} \right] = 0.$$

Если  $M$  отличен от нуля, то выражение в скобках должно равняться нулю, и соотношение

$$\frac{c_1}{\tau_1} + \frac{c_2}{\tau_2} = \frac{4EJ}{l^2 (P_1 - P_2)}$$

представляет собой условие устойчивости. При помощи обозначений

$$\left| \frac{P_2}{P_1} \right| = \alpha^2 \quad \text{и} \quad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \beta^2, \quad (461)$$

где  $P_1$  — сжимающая сила, это уравнение можно написать в следующем виде:

$$c_1 + \beta^2 c_2 = \frac{4EJ\tau_1}{l^2 P_1 (1 - \alpha^2)}, \quad (462)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  являются функциями от

$$\Phi_1 = l \sqrt{\frac{P_1}{EJ\tau_1}} \quad \text{и} \quad \Phi_2 = l \sqrt{\frac{P_2}{EJ\tau_2}} = \alpha\beta\Phi_1.$$

Если  $P_1 > |P_2|$ , то  $\tau_1 < \tau_2$  и  $\beta < 1$  в случае неупругого выпучивания. При  $\beta = 1$  получим заниженные результаты, которые зависят только от соотношения  $\alpha^2 = |P_2/P_1|$ . На основе этого упрощающего предположения уравнение (462) было решено для некоторых значений  $\alpha$ . Соответствующие значения коэффициента длины  $k = \pi/\Phi_1$  приведены в таблице 19. Эффективная длина вертикали равна  $kL$ , где  $L = 2l$  — полная длина элемента.

Таблица 19. Значения коэффициента длины  $k$  для стоек полураскосных ферм (рис. 131)

$P_2/P_1$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$k$	0,73	0,67	0,62	0,57	0,53	0,50

Значения  $k$  в таблице 19 можно приближенно представить в форме следующего простого соотношения:

$$k = 0,73 - 0,23 \frac{P_2}{P_1}, \quad (463)$$

где  $P_2$  — растягивающая сила. В случае, когда  $P_2/P_1 > 1$ , используем  $k = 0,5$ .

**Заключительные замечания.** Предшествующее рассмотрение поведения нескольких видов сжатых элементов в фермах показывает, что необходимо сравнительно простое исследование для того, чтобы получить понятие о работе этих элементов как частей жесткой рамной конструкции. Приведенные здесь исследования не охватывают всевозможных случаев, встречающихся в различных типах ферм инженерных сооружений. Главная цель состояла в том, чтобы продемонстрировать применение уравнения четырех моментов к группе задач устойчивости, возникающих при проектировании ферм, и показать возможности интерпретации полученных результатов для вывода правил, помогающих строительному инженеру в его практической работе.

## 72. Выпучивание прямоугольных жестких рам

Сравнительно недавно была поставлена задача об устойчивости прямоугольных рам, в частности проблема исследования поведения

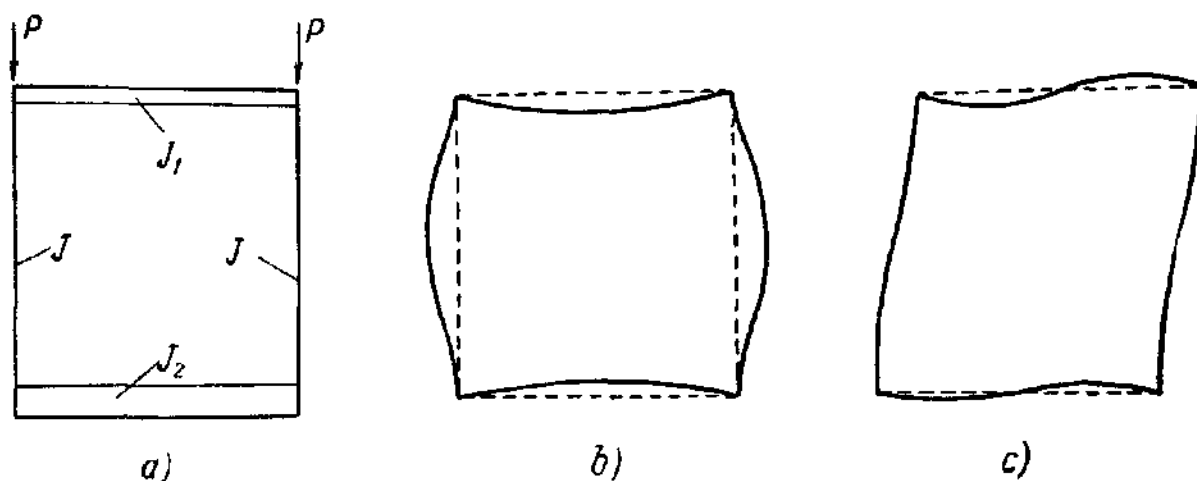


Рис. 132.

многоэтажных рам. Хертвиг и Поль <sup>1)</sup> исследовали простую прямоугольную порталную раму (рис. 132) и показали, что антисимметричная форма выпучивания (рис. 132, c) соответствует более низкому значению критической силы, чем симметричная форма (рис. 132, b). С некоторыми упрощениями Пувейн <sup>2)</sup> исследовал многоэтажную

<sup>1)</sup> Hertwig A., Pohl K., Die Stabilität des Brückenendrahmens, Der Stahlbau, т. 9, стр. 129, 1936.

<sup>2)</sup> Puwein M. G., Die Knickfestigkeit des Stockwerkrahmens, Der Stahlbau, т. 9, стр. 201, 1936.

раму с любым числом ярусов и разработал диаграммы и приближенные формулы для определения эффективной длины стержней для симметричного и антисимметричного выпучивания рамной конструкции. Весьма поучительное исследование однопролетной portalной рамы и однопролетной многоэтажной рамы было проведено Сиверсом<sup>1)</sup>, который вывел условия устойчивости, используя энергетический метод. Он исследовал также влияние на критическую силу искривления, вызванного продольными силами.

Хвалла и Йокиш<sup>2)</sup> применили метод деформаций к расчету многоэтажных рам, получили точное решение задачи устойчивости в общем виде и применили его к исследованию одно- и двухпролетных двухэтажных рам. Эти исследователи рассматривали также влияние продольных деформаций стержней.

В вышеупомянутых статьях не принималось во внимание наличие в горизонтальных элементах рамы первоначальных изгибающих моментов, вызванных поперечным нагружением этих элементов. Хвалла<sup>3)</sup> рассматривал эту задачу и исследовал влияние поперечной нагрузки на однопролетную portalную раму, но ограничил свое исследование случаями, в которых напряжения остаются в упругой области. В главе VI уже был дан анализ этой значительной работы.

В последующих параграфах исследуются некоторые типы жестких рамных конструкций, имеющих практическую ценность. Исследование основывается на аналитических методах, описанных в §§ 59 и 60, и не принимает во внимание влияние первоначальных моментов в горизонтальных элементах. Это влияние может быть определено весьма относительно, так как в настоящее время достижения в этой специальной области настолько ограничены, что можно только надеяться на проведение дальнейших исследований в будущем.

### 73. Выпучивание однопролетной portalной рамы, шарнирно закрепленной в опорах

**Симметричное выпучивание.** На рис. 133, *a* показаны рама и предполагаемое нагружение. Вследствие симметрии формы выпучивания (рис. 133, *b*) добавочные моменты  $M_1$  в *C* и *D* равны, а вращения всех элементов равны нулю. Уравнение трех моментов будет

$$M_1(ch' + c_1l') + M_1s_1l' = 0,$$

где параметры  $c$  относятся к стойке, а  $c_1$  и  $s_1$  — к горизонтальному элементу. После деления на  $h'$  и подстановки  $h' = h/\tau$ ,  $l' = l/J_1$

<sup>1)</sup> Sievers H., Die Knickfestigkeit elastisch eingespannter Stäbe, Der Stahlbau, т. 13, стр. 48, 1940.

<sup>2)</sup> Chwalla E., Jokisch F., Über das ebene Knickproblem des Stockwerkrahmens, Der Stahlbau, т. 14, стр. 33, 1941.

<sup>3)</sup> Хвалла, цит. выше, стр. 256.

условие выпучивания будет

$$c + \gamma(c_1 + s_1) = 0, \quad (464)$$

где

$$\gamma = \frac{l'}{h'} = \frac{lJ\tau}{hJ_1}. \quad (465)$$

Величина  $\tau$  зависит от критического напряжения стойки. Так как осевая нагрузка горизонтального элемента равна нулю ( $\Phi_1 = 0$ ), то

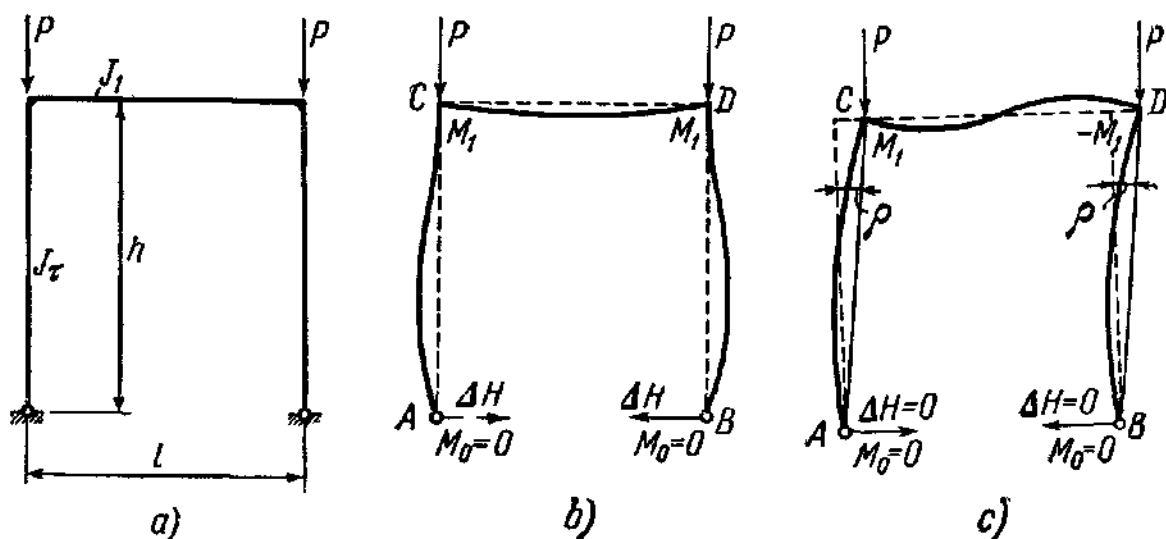


Рис. 133.

$s_1 = \frac{1}{6}$  и  $c_1 = \frac{1}{3}$ . Таким образом, уравнение (464) принимает следующий вид:

$$c + \frac{\gamma}{2} = 0, \quad (466)$$

где  $c$  является трансцендентной функцией коэффициента устойчивости  $\Phi$  и определяется уравнением (394).

В таблице 20 приведены значения корней  $\Phi$  уравнения (466) для различных значений  $\gamma$ , а также значения коэффициента длины  $k$ , определяющего эффективную длину  $kl$  стоек. Так как действие элемента  $CD$  ограничивает деформацию стойки, то значение  $k$  всегда меньше единицы.

Таблица 20. Значения коэффициента длины  $k$  для однопролетной portalной рамы, шарнирно закрепленной в опорах (рис. 133)

$\gamma = \frac{lJ\tau}{hJ_1}$		0	0,1	0,2	0,5	1,0	5,0	$\infty$
Симметричное выпучивание	$\Phi/\pi$ . .	1,430	1,366	1,315	1,219	1,143	1,038	1,000
	$k$ . . .	0,700	0,733	0,761	0,814	0,875	0,963	1,000
Антисимметричное выпучивание	$\Phi/\pi$ . .	0,500	0,492	0,483	0,461	0,430	0,296	
	$k$ . . .	2,00	2,03	2,07	2,17	2,33	3,38	

**Антисимметричное выпучивание.** Добавочные моменты в  $C$  и  $D$  будут  $M_1$  и  $-M_1$ , как это показано на рис. 133, с. В связи с тем, что угол поворота стержня  $\rho$  отличен от нуля, необходимо иметь два уравнения устойчивости для того, чтобы определить две неизвестные величины  $M_1$  и  $\rho$ . Уравнение трех моментов будет

$$M_1(ch' + c_1l') - M_1s_1l' - EJ\rho = 0.$$

Уравнение равновесия (404), примененное к элементу  $AC$ , имеет вид

$$M_1 = Ph\rho,$$

так как  $M_0 = 0$  и  $Q = \Delta H = 0$ .

Исключая  $M_1$  из двух этих уравнений, получим:

$$\rho [Ph(ch' + c_1l' - s_1l') - EJ] = 0.$$

Член, находящийся в скобках, приравненный к нулю, представляет собой условие устойчивости. Разделяя это выражение на  $Phh'$  получим:

$$c + (c_1 - s_1) \frac{l'}{h'} - \frac{EJ}{Phh'} = 0. \quad (467)$$

Подставляя  $\gamma = l'/h'$  [см. уравнение (461)], вводя  $c_1 - s_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$  и отметив, что

$$\frac{EJ}{Phh_1} = \frac{EJ\tau}{Ph^3} = \frac{1}{\Phi^2},$$

получим следующее условие устойчивости:

$$c + \frac{\gamma}{6} - \frac{1}{\Phi^2} = 0. \quad (468)$$

При  $c = (1 - \Phi \operatorname{ctg} \Phi)/\Phi^2$  это уравнение в результате принимает следующий вид:

$$\frac{\operatorname{ctg} \Phi}{\Phi} - \frac{\gamma}{6} = 0. \quad (469)$$

Нижняя часть таблицы 20 содержит значения  $\Phi$ , вычисленные на основе этого уравнения, и соответствующие значения  $k$ . Значение  $\Phi$  меньше, чем  $\frac{\pi}{2}$ , и приближается к  $\frac{\pi}{2}$ , когда  $\gamma$  стремится к нулю, т. е. когда  $J_1$  становится бесконечно большим. В этом случае сжатый стержень можно рассматривать как защемленный на одном конце и свободный на другом.

Из сравнения строк, содержащих значения  $k$  для симметричного и антисимметричного выпучивания, следует, что значение критической силы в случае антисимметричного выпучивания составляет только



незначительную долю значения критической силы, соответствующей симметричному выпучиванию. При расчете порталных рам нужно принимать во внимание наименьшее значение критической силы, вызывающей боковое выпучивание.

На основе исследований, проведенных другим способом, в Корнеллском университете<sup>1)</sup> получены результаты, аналогичные продемонстрированным в таблицах 20 и 21.

#### 74. Выпучивание однопролетной порталной рамы, заделанной в опорах

**Симметричное выпучивание.** Используя обозначения, данные в рис. 134, *a* и *b*, моменты  $M_0$  и  $M_1$  определяют из следующих двух уравнений:

$$M_0 ch' + M_1 s_1 h' = 0;$$

$$M_0 sh' + M_1 (ch' + c_1 l') + M_1 s_1 l' = 0.$$

Равенство нулю детерминанта, составленного из коэффициентов этих уравнений, дает после подстановки  $c_1 + s_1 = \frac{1}{2}$  и  $\gamma = l'/h' = IJ\tau/hJ_1$  условие устойчивости

$$c \left( c + \frac{\gamma}{2} \right) - s^2 = 0. \quad (470)$$

Значения  $\Phi$  и коэффициента длины  $k$ , вычисленные на основе уравнения (470), приведены в таблице 21.

Таблица 21. Значения коэффициента длины  $k$  для однопролетной порталной рамы, заделанной в опорах (рис. 134)

$\gamma = \frac{IJ\tau}{hJ_1}$		0	0,1	0,2	0,5	1,0	5,0	$\infty$
Симметричное выпучивание	$\Phi/\pi$ . .	2,000	1,908	1,833	1,696	1,597	1,470	1,430
	$k$ . . .	0,500	0,524	0,545	0,590	0,626	0,680	0,700
Антисимметричное выпучивание	$\Phi/\pi$ . .	1,000	0,984	0,970	0,924	0,865	0,666	0,500
	$k$ . . .	1,000	1,016	1,030	1,082	1,156	1,501	2,000

**Антисимметричное выпучивание.** Антисимметричная форма выпучивания порталной рамы показана на рис. 134, *c*. Уравнения трех моментов в этом случае будут

$$M_0 ch' + M_1 sh' + EJ\rho = 0;$$

$$M_0 sh' + M_1 (ch' + c_1 l') - M_1 s_1 l' - EJ\rho = 0.$$

<sup>1)</sup> Winter G., Hsu P. T., Koo B., Loh M. H., Buckling of Trusses and Rigid Frames, Cornell Univ. Eng. Expt. Sta. Bull. 36, Ithaca, N. Y., 1948,

Учитывая, что в результате антисимметрии  $Q = \Delta H = 0$ , условием равновесия будет

$$M_1 = M_0 + Ph\rho.$$

Подставляя  $\rho$  из уравнения равновесия в уравнения трех моментов, получим:

$$M_0 ch' + M_1 sh' + \frac{EJ}{Ph} (M_1 - M_0) = 0;$$

$$M_0 sh' + M_1 (ch' + c_1 l') - M_1 s_1 l' - \frac{EJ}{Ph} (M_1 - M_0) = 0.$$

После преобразования эти уравнения упрощаются до следующего вида:

$$M_0 \left( c - \frac{1}{\Phi^2} \right) + M_1 \left( s + \frac{1}{\Phi^2} \right) = 0;$$

$$M_0 \left( s + \frac{1}{\Phi^2} \right) + M_1 \left( c - \frac{1}{\Phi^2} + \frac{\gamma}{6} \right) = 0.$$

Детерминант, составленный из коэффициентов этих уравнений, дает условие устойчивости

$$\left( c - \frac{1}{\Phi^2} \right) \left( c - \frac{1}{\Phi^2} + \frac{\gamma}{6} \right) - \left( s + \frac{1}{\Phi^2} \right)^2 = 0. \quad (471)$$

Это уравнение можно еще более упростить, вводя выражения (394)

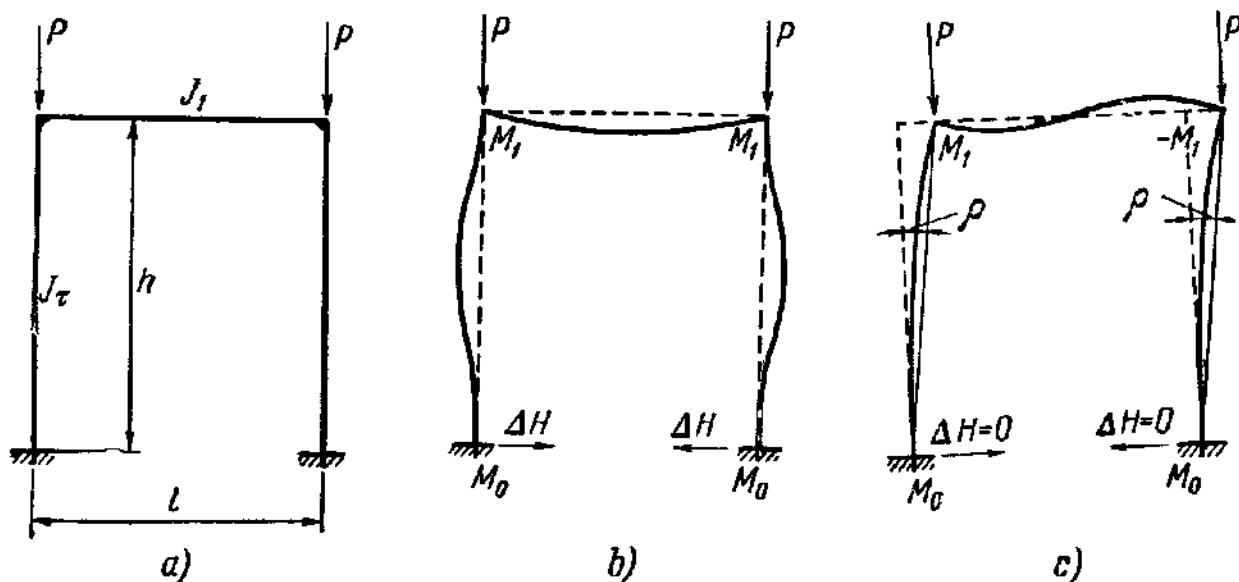


Рис. 134.

для  $c$  и  $s$ . В результате условие устойчивости получит следующий вид:

$$\Phi \sin \Phi \cos \Phi \left( \frac{\operatorname{ctg} \Phi}{\Phi} - \frac{\gamma}{6} \right) = 1. \quad (472)$$

В таблице 21 приведены значения  $\Phi$  и  $k$ , вычисленные на основе этого уравнения.

Из таблицы 21 видно, что  $k$  значительно больше для антисимметричного выпучивания, чем для симметричного. Таким образом, критическая сила для порталных рам с заделанными пятнами связана с антисимметричной формой выпучивания.

### 75. Двухэтажная прямоугольная рама, заделанная в опорах (рис. 135)

**Антисимметричное выпучивание.** Прежде всего рассмотрим наиболее трудный случай антисимметричного выпучивания, используя изложенный в § 60 метод, который имеет в данном случае

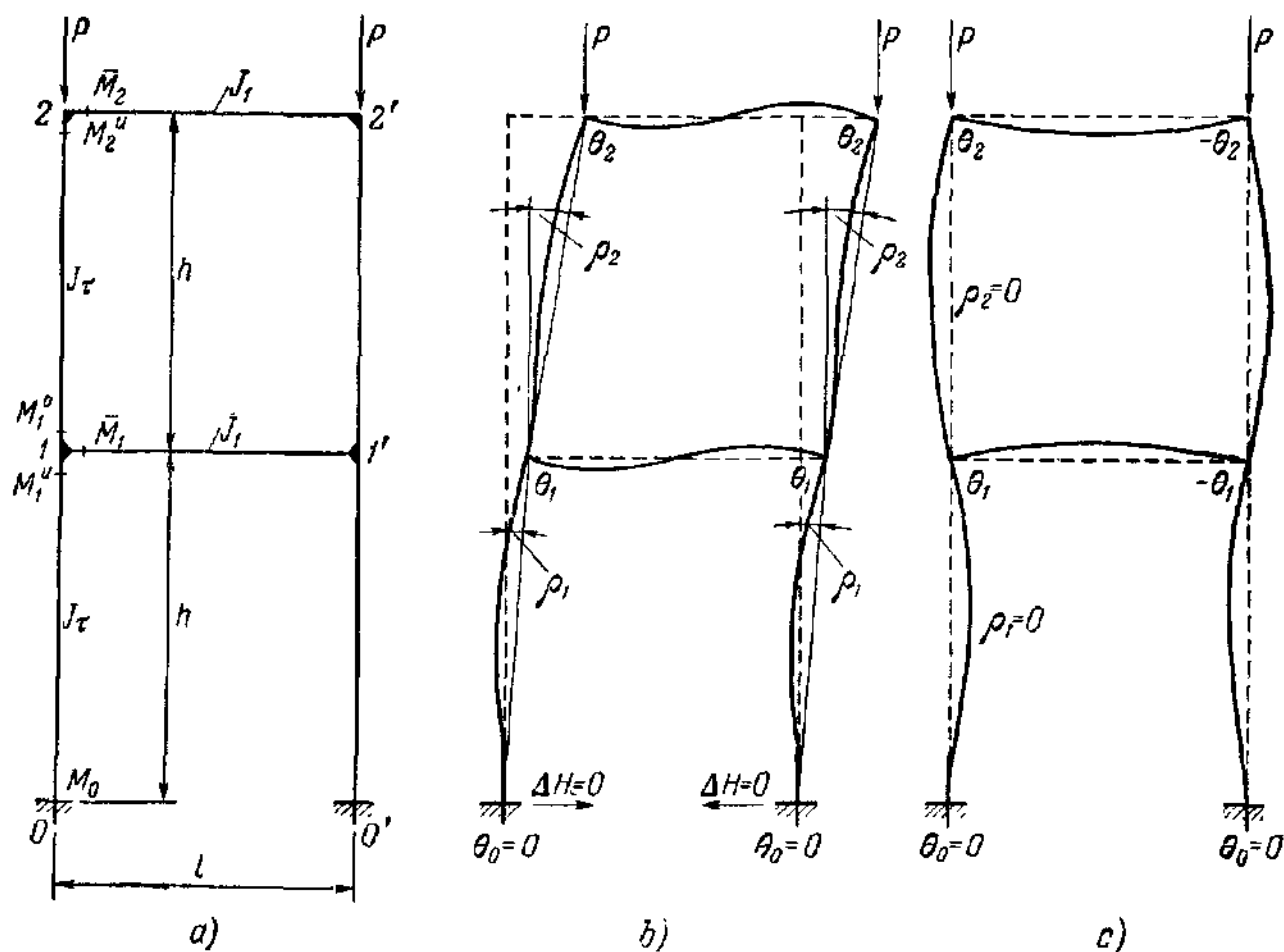


Рис. 135.

некоторые преимущества по сравнению с методом уравнений четырех моментов. Длина и момент инерции вертикальных элементов обозначаются через  $h$  и  $J$ , горизонтальных элементов — через  $l$  и  $J_1$  (рис. 135). Осевая сила в каждом стержне равна  $P$ , а в горизонтальном элементе равна нулю. Концевые моменты  $M$  в левой половине рамы показаны на рис. 135, а. Углы поворотов  $\theta$  каждого узла и углы поворотов стержней  $\rho$  для антисимметричной формы выпучивания показаны на рис. 135, б. Из этой фигуры видно, что вследствие предполагаемой антисимметричной деформации все углы поворотов узлов и стержней происходят в направлении часовой стрелки и, следовательно, являются положительными.

Применим теперь уравнения (409), которые выражают значения концевых моментов элемента через углы  $\theta$  и  $\rho$  относительно двух стоек 0—1 1—2. Используя обозначение

$$\beta = \frac{EJ_c}{h}, \quad (473)$$

получим следующие уравнения:

элемент 0—1

$$M_0 = \beta [S\theta_1 - \rho_1(C + S)], \quad (474a)$$

$$M_1^u = -\beta [C\theta_1 - \rho_1(C + S)]; \quad (474b)$$

элемент 1—2

$$M_1^b = \beta [C\theta_1 + S\theta_2 - \rho_2(C + S)], \quad (475a)$$

$$M_2^u = -\beta [S\theta_1 + C\theta_2 - \rho_2(C + S)], \quad (475b)$$

где  $C$  и  $S$  являются функциями коэффициента устойчивости  $\Phi$  стоек, определяемыми уравнениями (408). Числовые значения  $C$  и  $S$  приведены в таблице 14 на стр. 240.

Для горизонтальных элементов при  $\rho = 0$  имеем:

$$\bar{M}_1 = \frac{EJ_1}{l} (C_1\theta_1 + S_1\theta_1);$$

$$\bar{M}_2 = \frac{EJ_1}{l} (C_1\theta_2 + S_1\theta_2).$$

Так как коэффициент устойчивости этих элементов равен нулю, значения коэффициентов будут  $C_1 = 4$  и  $S_1 = 2$ . Следовательно, эти уравнения сводятся к

$$\bar{M}_1 = \varepsilon\theta_1; \quad (476)$$

$$\bar{M}_2 = \varepsilon\theta_2, \quad (477)$$

где

$$\varepsilon = \frac{6EJ_1}{l}. \quad (478)$$

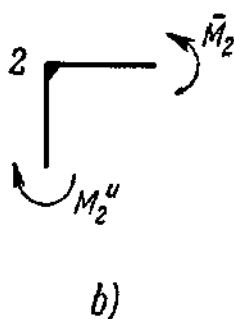
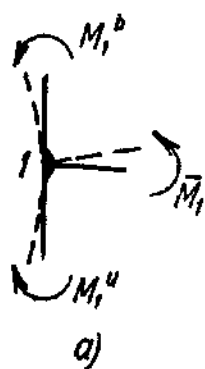


Рис. 136.

В качестве неизвестных задачи устойчивости возьмем углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$ ,  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Существуют два уравнения, выражающих равновесие

моментов, действующих в узлах 1 и 2. Эти узлы показаны на рис. 136, а и б. Из рис. 136, а выводим

$$M_1^u - M_1^b - M_1 = 0, \quad (479)$$

а из рис. 139, б

$$M_2^u - \bar{M}_2 = 0. \quad (480)$$

Из условий равновесия элементов 0—1 и 0—2 выводятся еще два уравнения. Применяя уравнения равновесия (404) и принимая

во внимание, что поперечная сила  $Q$ , представленная горизонтальной реакцией  $\Delta H$ , равна нулю в обоих элементах, получим следующие уравнения:

$$M_1^u = M_0 + Ph\rho_1 \text{ и } M_2^u = M_1^b + Ph\rho_2. \quad (481)$$

Вводя выражения для моментов [уравнения (474) — (477)] в уравнения (479) — (481), получим следующую систему четырех уравнений относительно неизвестных  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ :

$$\left. \begin{aligned} 2C\theta_1 + S\theta_2 - (C + S)(\rho_1 - \rho_2) + \frac{\varepsilon\theta_1}{\beta} &= 0; \\ S\theta_1 + C\theta_2 - (C + S)\rho_2 + \frac{\varepsilon\theta_2}{\beta} &= 0; \\ (C + S)\theta_1 - 2(C + S)\rho_1 + \frac{Ph\rho_1}{\beta} &= 0; \\ (C + S)(\theta_1 + \theta_2) - 2(C + S)\rho_2 + \frac{Ph\rho_2}{\beta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (482)$$

Последние два уравнения можно решить относительно  $\rho_1$  и  $\rho_2$

$$\rho_1 = \delta\theta_1 \text{ и } \rho_2 = \delta(\theta_1 + \theta_2), \quad (483)$$

где

$$\delta = \frac{1}{2 - \frac{Ph}{\beta} \frac{1}{C + S}}. \quad (484)$$

Исключая  $\rho_1$  и  $\rho_2$  из первых двух уравнений (482), получим:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 \left[ 2C - 2\delta(C + S) + \frac{\varepsilon}{\beta} \right] + \theta_2 [S - \delta(C + S)] &= 0; \\ \theta_1 [S - \delta(C + S)] + \theta_2 \left[ C - \delta(C + S) + \frac{\varepsilon}{\beta} \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (485)$$

Выражение  $\varepsilon/\beta$  в этих уравнениях можно упростить. Используя уравнения (473) и (478), имеем:

$$\frac{\varepsilon}{\beta} = \frac{6hJ_1}{IJ\tau} = \frac{6}{\gamma}, \quad (486)$$

где

$$\gamma = \frac{IJ\tau}{hJ_1} \quad (487)$$

представляет собой тот же самый параметр, который встречается в §§ 73 и 74 при исследовании одноэтажных рам.

На основе уравнения (486) условие устойчивости можно написать в следующем виде:

$$\left[ 2C - 2\delta(C + S) + \frac{6}{\gamma} \right] \left[ C - \delta(C + S) + \frac{6}{\gamma} \right] - [S - \delta(C + S)]^2 = 0. \quad (488)$$

Выражение для  $\delta$  [уравнение (484)] можно упростить. Используя уравнение (473), имеем:

$$\frac{Ph}{\beta} = \frac{Ph^3}{EJ\tau} = \frac{1}{\Phi^3},$$

откуда видно, что  $\delta$ , определяемое уравнением (484), является функцией только  $\Phi$ . После подстановки значений  $C$  и  $S$  из уравнений (408) и (394) выражение для  $\delta$  принимает следующий простой вид:

$$\delta = \frac{1}{\Phi} \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}. \quad (489)$$

Следовательно, условие выпучивания (488) содержит только один свободный параметр  $\gamma$ , который зависит от заданных размеров рамы, и может быть решено с помощью таблицы 14 для значений  $C$  и  $S$ . В таблице 22 приведены значения  $\Phi$  и  $k$ , вычисленные для некоторых значений параметра  $\gamma = lJ\tau/hJ_1$ .

Таблица 22. Значения коэффициента длины  $k$  для двухэтажной прямоугольной рамы (рис. 135)

$\gamma = \frac{lJ\tau}{hJ_1}$		0	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	$\infty$
Симметричное выпучивание	$\Phi/\pi$ . .	2,000	1,648	1,497	1,452	1,330	1,245	1,138
	$k$ . . .	0,500	0,507	0,668	0,689	0,753	0,803	0,879
Антисимметричное выпучивание	$\Phi/\pi$ . .	1,000	0,968	0,938	0,862	0,771	0,660	0,250
	$k$ . . .	1,000	1,033	1,065	1,160	1,310	1,515	4,000

**Симметричное выпучивание.** Данная форма выпучивания характеризуется равенством  $\rho_1 = \rho_2 = 0$  (рис. 135, с). Предполагается, что углы  $\theta$  положительны в левой половине рамы и, как результат предполагаемой симметрии формы, должны быть отрицательными в правой половине рамы. Уравнения, соответствующие уравнениям (474) и (477), в этом случае будут

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= \beta S\theta_1 & \text{и} & & M_1^u &= -\beta C\theta_1; \\ M_1^b &= \beta (C\theta_1 + S\theta_2) & \text{и} & & M_2^u &= -\beta (S\theta_1 + C\theta_2); \\ \overline{M}_1 &= \frac{EJ_1}{l} (C\theta_1 - S\theta_1) = \varepsilon'\theta_1; \\ \overline{M}_2 &= \frac{EJ_1}{l} (C\theta_2 - S\theta_2) = \varepsilon'\theta_2. \end{aligned} \right\} \quad (490)$$

где

$$\varepsilon' = \frac{2EJ_1}{l}. \quad (491)$$

Вводя выражения (490) в условия равновесия (479) и (480), получим два уравнения устойчивости:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 \left( 2C + \frac{2}{\gamma} \right) + S\theta_2 &= 0; \\ S\theta_1 + \theta_2 \left( C + \frac{2}{\gamma} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (492)$$

Отношение  $\epsilon'/\beta$  можно выразить через параметр  $\gamma$ :

$$\frac{\epsilon'}{\beta} = \frac{2hJ_1}{IJ\tau} = \frac{2}{\gamma},$$

и условие устойчивости будет

$$\left( 2C + \frac{2}{\gamma} \right) \left( C + \frac{2}{\gamma} \right) - S^2 = 0. \quad (493)$$

Значения  $\Phi$  и  $k$ , определенные на основе уравнения (493), приведены в таблице 22. Эффективная длина стоек равна  $kh$ .

## 76. Многоэтажные прямоугольные рамы

**Антисимметричное выпучивание.** В сущности, нетрудно применить метод, использованный в предыдущем параграфе для исследования рамной конструкции, показанной на рис. 137, *a*. Однако вследствие высокой степени статической неопределимости системы вычисление детерминанта являлось бы чрезвычайно сложной задачей в том случае, когда осевые силы и жесткости стоек меняются от этажа к этажу, как это фактически происходит в многоэтажных рамах. Однако, допустив некоторые упрощения, можно найти достаточно общее практическое решение, дающее возможность исследовать влияние числа этажей на их устойчивость и влияние отношения жесткости стоек к жесткости соединенных с ними горизонтальных элементов. Несмотря на то, что предположения, лежащие в основе последующего исследования, отличаются от условий, имеющих место в реальных рамах зданий, можно получить общие полезные сведения относительно поведения многоэтажных рам. Числовые результаты в крайнем случае можно использовать для приближенного определения нагрузки выпучивания действительных конструкций.

Предположим, что число пролетов настолько велико, что можно пренебречь влиянием концевых пролетов на поведение стойки внутри рамы. Предположим далее, что значения осевых сил всех стоек и жесткостей всех стоек и балок идентичны. Тогда достаточно будет рассмотреть упрощенную систему, состоящую из одной стойки и соединенных с ней балок, как это показано в деформированном состоянии сплошными линиями на рис. 137, *b*. Для того чтобы привести задачу к виду, годному для аналитического решения, предположим, что все этажи имеют

равную высоту  $h$ ; это означает, что значение коэффициента устойчивости  $\Phi = h \sqrt{P/EJ\pi}$  одинаково для всех вертикальных элементов рамы.

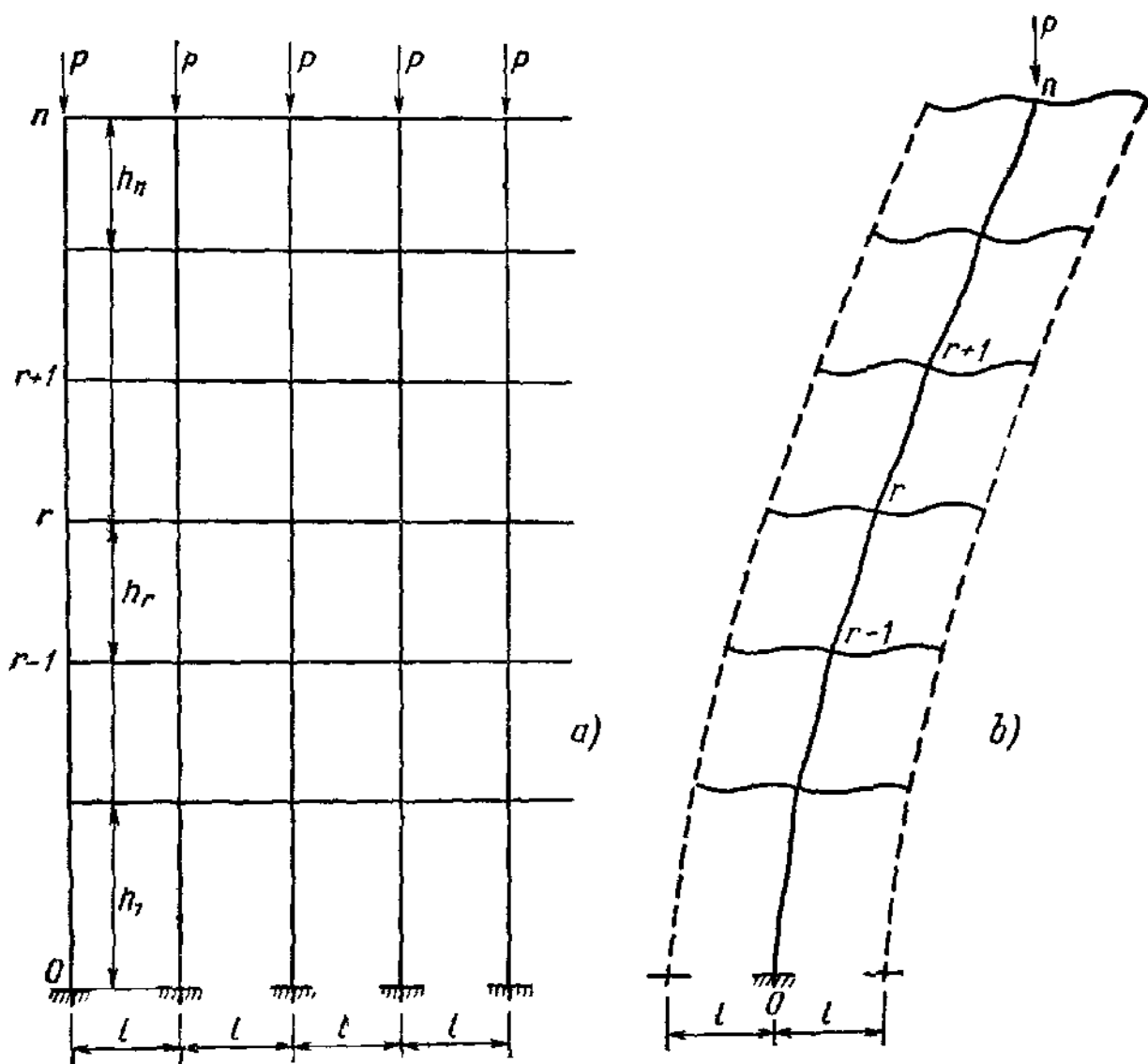


Рис. 137.

Рассмотрим узел  $r$ , в котором встречаются четыре элемента рамы (рис. 138). Используя обозначения, показанные на рисунке, из уравнений (409) получаем два уравнения для каждого элемента. Все углы  $\theta$  и  $\rho$  предполагаются положительными.

Элемент  $r-1, r$ :

$$\left. \begin{aligned} M_{r-1}^b &= \beta [C\theta_{r-1} + S\theta_r - \rho_r (C + S)]; \\ M_r^u &= -\beta [S\theta_{r-1} + C\theta_r - \rho_r (C + S)]. \end{aligned} \right\} \quad (494)$$

Элемент  $r, r+1$ :

$$\left. \begin{aligned} M_r^b &= \beta [C\theta_r + S\theta_{r+1} - \rho_{r+1} (C + S)]; \\ M_{r+1}^u &= -\beta [S\theta_r + C\theta_{r+1} - \rho_{r+1} (C + S)]. \end{aligned} \right\} \quad (495)$$



где  $\beta = EJ\tau/h$ . Величины  $C$  и  $S$ , зависящие только от  $\Phi$ , аналогичны для всех вертикальных элементов.

Элементы  $r$ ,  $r'$  и  $r$ ,  $r''$ :

$$\bar{M}_r = \frac{EJ_1}{l} (4\theta_r + 2\theta_r) = \frac{6EJ_1}{l} \theta_r = \epsilon\theta_r. \quad (496)$$

Имея в виду рис. 138, равновесие моментов, действующих в узле  $r$ , можно выразить соотношением

$$M_r^u - M_r^b - 2\bar{M}_r = 0, \quad (497)$$

тогда как из условия равновесия элементов  $r-1$ ,  $r$  и  $r$ ,  $r+1$

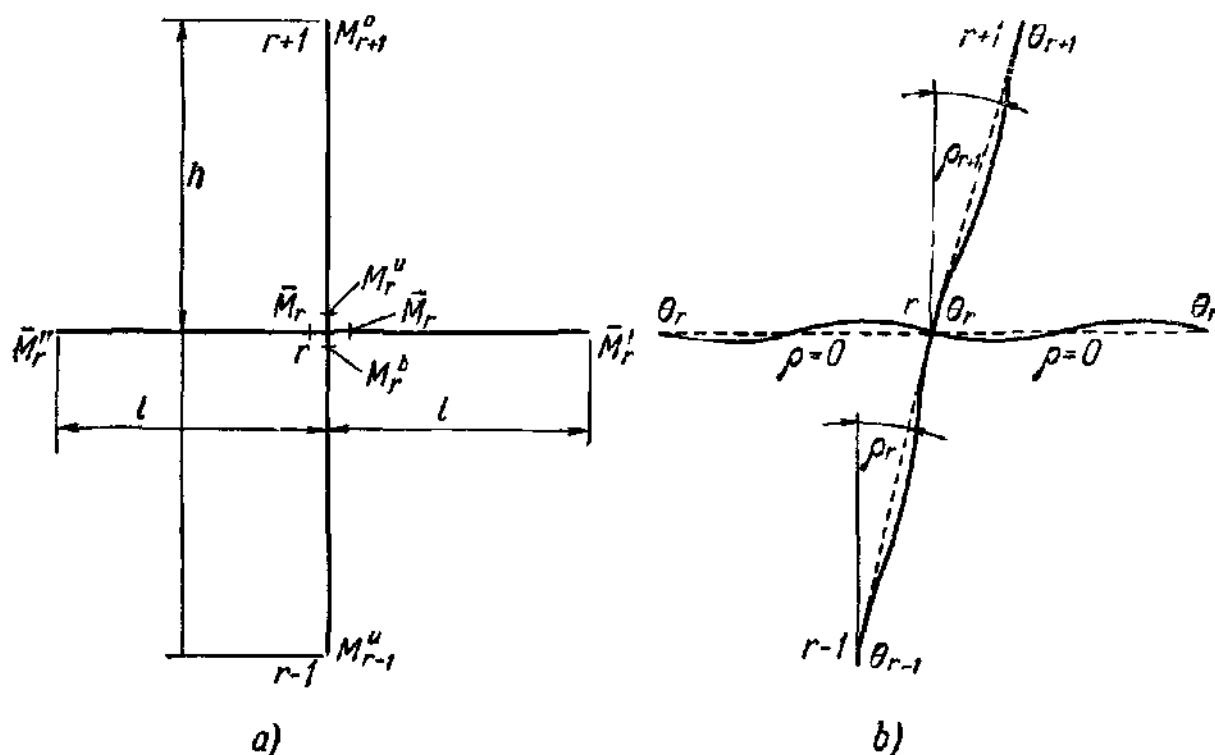


Рис. 138.

получим два добавочных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} M_r^u - M_{r-1}^b - Ph\rho_r &= 0; \\ M_{r+1}^u - M_r^b - Ph\rho_{r+1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (498)$$

Вводя выражения для моментов из уравнений (494) и (495), получим следующие выражения для  $\rho_r$  и  $\rho_{r+1}$ :

$$\left. \begin{aligned} \rho_r &= \frac{\theta_{r-1} + \theta_r}{2 - \frac{Ph}{\beta} \frac{1}{C+S}} = \delta (\theta_{r-1} + \theta_r); \\ \rho_{r+1} &= \frac{\theta_r + \theta_{r+1}}{2 - \frac{Ph}{\beta} \frac{1}{C+S}} = \delta (\theta_r + \theta_{r+1}). \end{aligned} \right\} \quad (499)$$

Используя уравнения (499) для исключения  $\rho_r$  и  $\rho_{r+1}$  из уравнений (494) и (495) и вводя преобразованные выражения в условие

равновесия (497), получим следующее соотношение между тремя последовательными углами поворотов  $\theta$ :

$$\theta_{r-1} + 2\mu\theta_r + \theta_{r+1} = 0. \quad (500)$$

Параметр  $\mu$  определяется выражением

$$\mu = \frac{C - \delta(C+S) + \frac{\varepsilon}{\beta}}{S - \delta(C+S)} = \frac{C - \delta(C+S) + \frac{6}{\gamma}}{S - \delta(C+S)}. \quad (501)$$

Значение  $\delta$ , определяемое уравнениями (499), можно выразить в виде

$$\delta = \frac{1}{\Phi} \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}$$

[см. уравнение (489)]. Вследствие соотношения

$$\frac{\varepsilon}{\beta} = \frac{6hJ_1}{IJ\tau} = \frac{6}{\gamma}$$

уравнение (500) содержит только один свободный параметр:  $\gamma = IJ\tau/hJ_1$ . Уравнение (500) применимо при значениях  $r = 1, 2, \dots, n-1$ , откуда имеем  $n-1$  уравнений этого вида, что ведет к необходимости вывода двух добавочных уравнений для того, чтобы составить систему  $n+1$  уравнений, нужных для определения  $n+1$  углов поворота  $\theta$ .

В результате предположения о том, что пяты стоек заделаны, одно из этих уравнений принимает следующий простой вид:

$$\theta_0 = 0. \quad (502)$$

Второе уравнение получается при применении к верхнему узлу того же приема. В результате имеем следующее уравнение:

$$\theta_{n-1} + \mu'\theta_n = 0, \quad (503)$$

где  $\mu'$  отличается от  $\mu$  тем, что отношение  $6/\gamma$  в уравнении (501) заменяется отношением  $12/\gamma$ . Для упрощения последующего исследования целесообразно видоизменить граничное условие для верхнего конца [уравнение (503)], заменяя  $\mu'$  через  $\mu$ . Допускаемая ошибка становится пренебрежимой при  $n > 3$ . Таким образом, второе граничное условие будет применено в виде

$$\theta_{n-1} + \mu\theta_n = 0. \quad (503a)$$

Рассмотрим теперь уравнение (500), как уравнение в конечных разностях, решение которого должно удовлетворить граничным условиям (502) и (503a). Решение этого уравнения в конечных разностях

второго порядка имеет следующий вид<sup>1)</sup>:

$$\theta_r = A \sin r\omega + B \cos r\omega, \quad (504)$$

где постоянные  $A$  и  $B$  определяются из граничных условий. Вводя  $\sin r\omega$  или  $\cos r\omega$  в уравнение (500), получим характеристическое уравнение

$$\cos \omega = -\mu. \quad (505)$$

Из этого уравнения определяется значение параметра  $\omega$ . Далее, подставив решение (504) в уравнения для граничных условий, получаем два однородных линейных уравнения, из которых определяются постоянные  $A$  и  $B$ . Первое из этих двух условий дает  $B = 0$ , а второе — соотношение

$$A [\sin (n-1)\omega + \mu \sin \omega] = 0,$$

из которого вытекает условие устойчивости

$$\sin \omega \cos n\omega = 0.$$

Условие равенства нулю первого множителя дает тривиальные корни  $\omega = 0, \pi, 2\pi, \dots$ , так как для этих значений  $\theta_r = A \sin r\omega = 0$ . Приравнивая к нулю второй множитель, получим:

$$\cos n\omega = 0$$

и

$$\omega = \frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \frac{5\pi}{2n}, \dots \quad (506)$$

Первое из этих значений соответствует низшей форме выпучивания и, согласно уравнениям (501) и (505), дает следующее условие устойчивости:

$$\frac{C - \delta(C + S) + \frac{6}{\gamma}}{S - \delta(C + S)} = -\cos \frac{\pi}{2n}, \quad (507)$$

применимое для  $n > 3$ .

Величины  $C$  и  $S$ , так же как и  $\delta$ , являются функциями  $\Phi$ , поэтому уравнение (507) можно решить для любого заданного значения  $n$  и  $\gamma$ , причем значение последнего представляет собой расчетные характеристики идеализированной рамы.

На рис. 139 приведены кривые значений коэффициента длины  $k$ , которые нанесены в зависимости от параметра  $\gamma = lJ_c/hJ_1$  для

<sup>1)</sup> Простое введение в теорию уравнений в конечных разностях содержится в книге: Karman T., Biot M. A., *Mathematical Methods in Engineering*, гл. XI, McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1940; русский перевод: Карман Т., Био М. А., *Математические методы в инженерном деле*, М., Гостехиздат, 1948, гл. XI.

$n = 2, 3$  и  $10$ . Кривые для  $n = 2$  и  $3$  найдены непосредственно путем вычисления детерминанта при определении углов поворота  $\theta$ . Кривые начинаются в точке  $\gamma = 0$  (жесткие балки) при  $k = 1$ , и значение эффективной длины увеличивается с уменьшением жесткости балки. С увеличением значения  $\gamma$  (т. е. с уменьшением жесткостей горизонтальных элементов) кривые асимптотически приближаются к значению  $k = 2n$ , которое определяет эффективную длину сжатого стержня

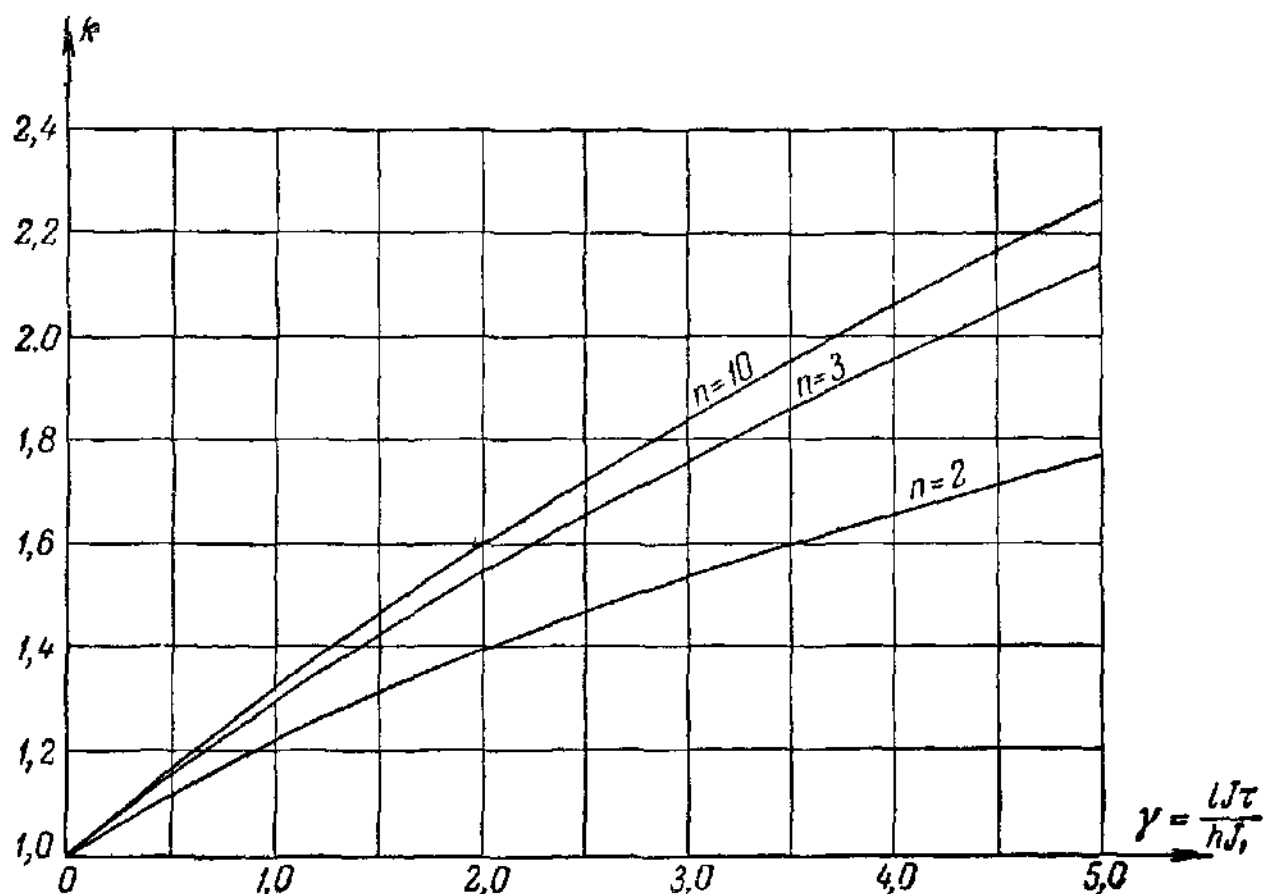


Рис. 139.

длиной  $nh$ , зашцементированного на одном конце и свободного на другом. Следовательно, необходимо некоторое минимальное значение жесткости горизонтального элемента для того, чтобы значение коэффициента длины  $k$  осталось в экономичных пределах.

Многоэтажные рамы типа рассмотренных здесь независимо от числа пролетов очень чувствительны к боковому выпучиванию, и одной из целей исследования являлось численное доказательство значительного уменьшения устойчивости рамы при условии, если горизонтальное смещение не предотвращено соответствующими конструктивными способами.

Несмотря на то, что предшествующее исследование, в результате которого получены кривые, показанные на рис. 139, основывалось на предположении о постоянстве нагрузки  $P$  и момента инерции  $J$  стоек, можно показать, что кривые на рис. 139 применимы также

в том случае, когда нагрузки  $P$  и моменты инерции  $J$  стоек и балок меняются от этажа к этажу следующим образом.

1. Нагрузка на стойку  $P_r$  в  $r$ -м этаже и момент инерции стойки  $J_r$  меняются таким образом, что отношение  $P_r/J_r\tau$  остается постоянным для всей высоты стойки.

2. Момент инерции  $J_{1r}$  горизонтальных элементов на  $r$ -м этаже меняется пропорционально среднему моменту инерции стоек, находящихся ниже и выше элемента, т. е. отношение  $J_{1r}/(J_r\tau + J_{r+1}\tau)$  остается постоянным.

В том случае, если удовлетворены эти два условия и сделаны некоторые незначительные числовые приближения, мы снова получим уравнение (500), и, следовательно, кривые на рис. 139 становятся опять пригодными. Это обстоятельство является очень важным, так как условие 1 достаточно хорошо удовлетворяется в реальных конструкциях, где нагрузки  $P$  и моменты инерции  $J$  увеличиваются от верхнего этажа книзу. Условие 2 несовместимо с реальным положением вещей в многоэтажных рамах. В целях соблюдения безопасности нужно использовать наибольшее значение  $J/J_1$  для определения значения параметра  $\gamma$  при применении кривых на рис. 139.

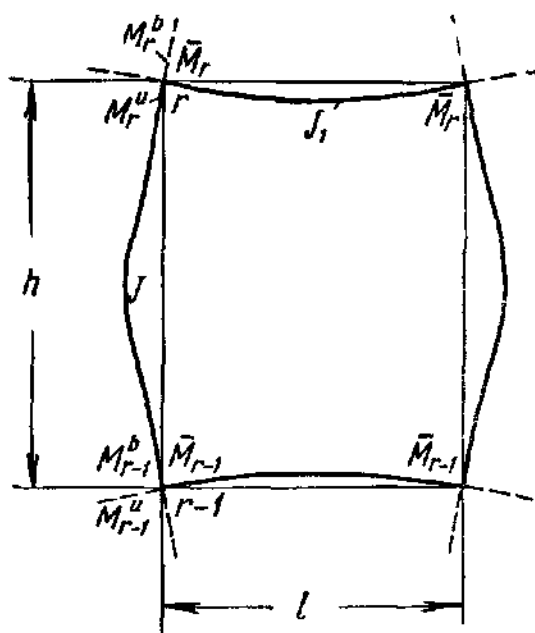


Рис. 140.

**Симметричное выпучивание.** Для того чтобы показать значительное увеличение критической силы многоэтажной рамы, в случае, когда рама подкреплена по отношению к боковым смещениям таким образом, что исключается возможность разрушения от антисимметричного выпучивания, рассмотрим панель рамы находящуюся между этажами  $r-1$  и  $r$ , как это показано на рис. 140. В целях упрощения исследования предположим снова, что  $J$ ,  $J_1$  и  $P$  являются постоянными величинами. При этом условии значения концевых моментов в двух последовательных узлах незначительно отличаются друг от друга и без большой ошибки можно предполагать, что

$$M_{r-1}^u = M_{r-1}^b = M_r^u = M_r^b. \quad (508)$$

В этом предположении достаточно одно уравнение четырех моментов

$$M_{r-1}^b sh' + M_r^u ch' + \bar{M}_r c_1 l' + \bar{M}_r s_1 l' = 0 \quad (509)$$

для получения условия устойчивости. Уравнение (508) вместе с условием равновесия в узле  $r$ , а именно:

$$2M_r^u = 2\bar{M}_r, \quad (510)$$

дает возможность исключить моменты  $M_{r-1}^b$  и  $\bar{M}_r$  из уравнения (509), которое принимает следующий вид:

$$M_r^u (sh' + ch' + c_1 l' + s_1 l') = 0.$$

Выражение, находящееся в скобках, приравненное к нулю, представляет собой условие устойчивости

$$s + c + (c_1 + s_1) \frac{l'}{h} = s + c + \frac{\gamma}{2} = 0, \quad (511)$$

где  $\gamma = lJ_2/hJ_1$ .

В таблице 23 приведены значения  $\Phi$  и соответствующие значения коэффициента длины  $k$  для некоторых значений  $\gamma$ .

Таблица 23. Значения коэффициента длины  $k$  для симметричного выпучивания многоэтажных прямоугольных рам

$\gamma$	0	0,1	0,2	0,5	1,0	5,0	$\infty$
$\Phi/\pi$ . .	2,000	1,822	1,690	1,457	1,292	1,075	1,000
$k$ . . .	0,500	0,549	0,592	0,730	0,775	0,963	1,000

### 77. Влияние начальных изгибающих моментов на критическую силу жестких прямоугольных рам

До сих пор предполагалось, что не существует в горизонтальных элементах рамной конструкции перед выпучиванием никаких начальных изгибающих моментов, вызванных поперечным нагружением. Это, конечно, не соответствует реальным условиям в рамах зданий. В настоящее время не существует подходящего метода для определения критической силы прямоугольных жестких рам, где учитывалось бы влияние этих изгибающих моментов на устойчивость конструкции. Общий характер задачи был проанализирован в § 62 главы VI, где приводилось решение одной такой задачи, данное Хвалла. Необходимо учитывать, что из его аналитического исследования вытекает, что деформация рамы перед выпучиванием, вызванная поперечным нагружением горизонтальных элементов, уменьшает критическую силу системы весьма незначительно. Однако Хвалла ограничился исследованием напряжений в стержнях и балках, находящихся в упругой области, и еще предстоит восполнить пробел в наших знаниях о поведении рам с поперечно нагруженными элементами, напряженными за пределом пропорциональности.

В соответствии с обширной исследовательской программой, рассчитанной главным образом на выяснение теоретическим и опытным путем принципов метода пластического расчета применительно к жестко

соединенным рамам, Бейкер<sup>1)</sup> и его сотрудники в Англии при помощи маленьких моделей изучили поведение стойки как части простой рамной конструкции. Каждая из моделей состояла из стойки с нагруженными балками, связанными с ней при помощи жестких узлов. На рис. 141, а показана схема образца, где в результате нагружения

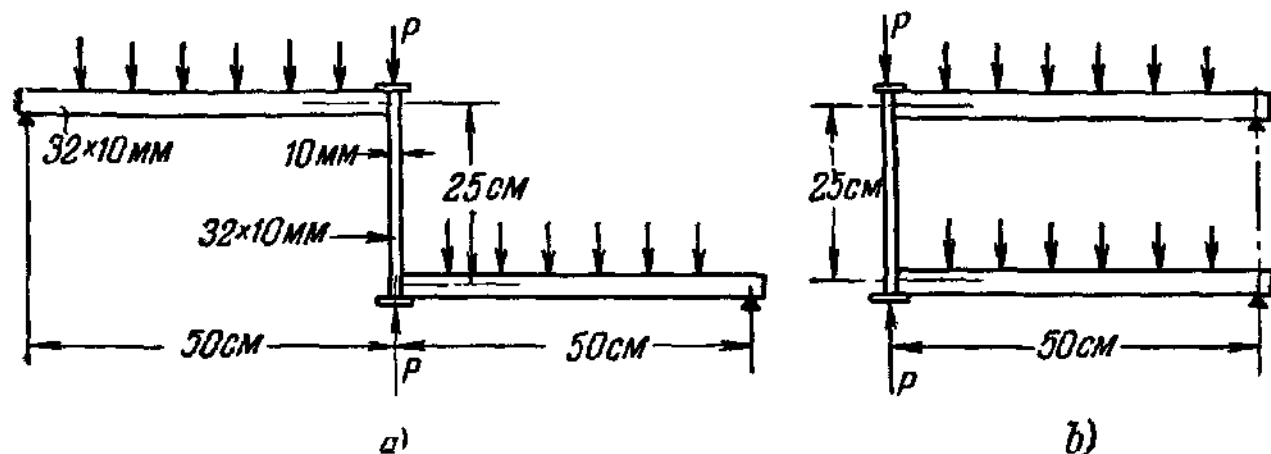


Рис. 141.

балки стойка изгибается по одной полуволне. На рис. 141, б показан образец, в котором стойка изгибается по двум полуволнам перед выпучиванием.

Естественно, что результаты, полученные на основе малого числа опытов, представляющих собой только начало всестороннего исследования сложной задачи о выпучивании рамных конструкций в пластической области, не позволяют сделать какое-либо заключение общего характера относительно влияния поперечных нагрузок в том случае, когда изгиб и выпучивание происходят в пластической области. Необходимы многочисленные дополнительные эксперименты для того, чтобы получить достаточно данных о влиянии изменений тех факторов, которые определяют поведение отдельной рамы. Однако невозможно добиться настоящего успеха до тех пор, пока экспериментальное исследование не дополняется рациональным решением основных задач о выпучивании, описанных в § 62 на стр. 251. Ввиду сложности такого решения возможность глубокого понимания сущности задачи представляется сомнительной без применения соответствующей теории.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Newmark N. M., A Simple Approximation Formula for Effective End-fixity of Columns, Jour. Aeronaut. Sci., т. 16, стр. 116, 1949.

Wessman H. E., Kavanagh T. C., End Restraints on Truss Members, Trans. ASCE, т. 115, стр. 1135, 1950.

<sup>1)</sup> Baker J. F., A Review of Recent Investigations into the Behavior of Steel Frames in the Plastic Range, Journ. Inst. Civil Engrs. (London), 1948—1949, стр. 185; Baker J. F., Roderick J. W., The Behavior of Stanchions Bent in Single Curvature, 3d Interim Rept., Trans. Inst. Welding, т. 5, стр. 97, 1942 и The Behavior of Stanchions Bent in Double Curvature, 5th Interim Rept., Welding Research, т. 2, № 1, 1948.

## ГЛАВА VIII

### УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ, УПРУГО ОПЕРТЫХ В НЕКОТОРЫХ ТОЧКАХ

#### 78. Введение

Вопрос бокового выпучивания нераскрепленных поясов ферм или свободных поясов балок открытых мостов долгое время был предметом большого интереса строительных инженеров. Развитие теории устойчивости рам началось с различных попыток правильно решить эту задачу, и ранние исследования Циммермана и Мюллер-Бреслау в начале этого столетия свидетельствуют о том большом значении, которое придавалось решению этой задачи.

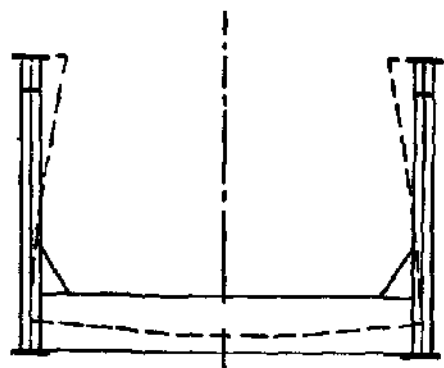


Рис. 142.

Сжатый пояс фермы без верхних связей и сжатый пояс открытой балки представляют собой элементы, упруго заделанные в горизонтальной плоскости вертикальными элементами стенки фермы или ребрами жесткости стенки балки, которые составляют вместе с нижними балками жесткую раму, как это показано на рис. 142. Вообще гибкость рамы не позволяет рассматривать пояс, как жестко

заделанный в местах соединения с рамой. В состоянии неустойчивого равновесия, когда происходит боковой изгиб пояса, возникают поперечные силы, которые стремятся сместить точки опор. Эти перемещения являются величинами того же порядка, что и прогибы пояса, и их влиянием на разрушающую нагрузку пояса пренебрегать нельзя.

Рассмотрим стержень, шарнирно опертый на обоих концах на жесткие опоры и имеющий между концевыми опорами равноудаленные упругие опоры одинаковой жесткости. Если упругая жесткость этих опор достаточно велика, стержень выпучится по полуволнам с длиной волн, равной расстоянию между двумя соседними опорами, как это показано на рис. 143, а. Точки перегиба совпадают с точками опирания. Стержень ведет себя как стержень на жестких



опорах. Если опоры в свою очередь являются очень гибкими, то возможен изгиб всего пояса по одной полуволне, как это показано на рис. 143, *b*. Для значений упругих жесткостей опор, находящихся между двумя этими пределами, можно заключить, что пояс выпучивается по полуволнам, число которых больше единицы, но меньше числа пролетов между жесткими концевыми опорами (рис. 143, *c*). Число полуволн увеличивается с увеличением жесткости поддерживающих жестких рам. Значения длин отдельных полуволн, которые образуют некоторую форму выпучивания, не будут равными, даже при наличии равноудаленных опор.

Следует подчеркнуть, что нет необходимости в том, чтобы сжатый стержень был оперт на совершенно жестких опорах для того,

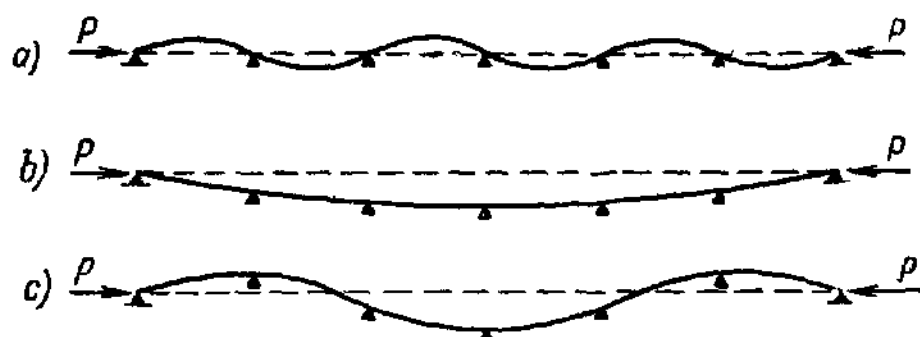


Рис. 143.

чтобы критическая сила выпучивания соответствовала перемещениям, показанным на рис. 143, *a*. При некотором определенном конечном значении жесткости упругих опор стержень ведет себя как стержень на жестких опорах, и дальнейшее увеличение значений упругих жесткостей опор не влияет на критическую силу стержня.

Задача упруго опертого стержня впервые была исследована Энгессером<sup>1)</sup>, который установил приближенную формулу для любого данного значения жесткости упругих опор. Вследствие своей чрезвычайной простоты эта формула до сих пор применяется при проектировании мостов. Формула Энгессера основывается на предположении, согласно которому стержень, жестко опертый на обоих концах, покоится на непрерывной упругой среде, а осевая сжимающая сила постоянна вдоль всей длины стержня. Позже Ясинский<sup>2)</sup> аналогичным способом рассмотрел другие случаи с изменяющимися осевыми силами.

Принципы точного решения задачи устойчивости сжатых поясов открытых мостов были исследованы Циммерманом<sup>3)</sup> и Мюллер-

<sup>1)</sup> Engesser F., Die Sicherung offener Brücken gegen Ausknicken, Zentralblatt der Bauverwaltung, 1884, стр. 415; 1885, стр. 93. Engesser F., Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken, т. II, Berlin, 1893.

<sup>2)</sup> Jasinski F. S., La flexion des pièces comprimées, Annales des ponts et chaussées, 1894, ч. 2, стр. 233.

<sup>3)</sup> Zimmermann H., Die Knickfestigkeit der Druckgurte offener Brücken, W. Ernst und Sohn, Berlin, 1910.

Бреслау<sup>1)</sup>, которые получили значение критической силы путем вычисления детерминанта знаменателя системы линейных уравнений. Этот метод в дальнейшем был усовершенствован Остенфельдом<sup>2)</sup> и Кризо<sup>3)</sup>. Однако все эти методы являются слишком сложными для того, чтобы применить их к исследованию каждого частного случая.

Используя уравнения в конечных разностях, Блейх<sup>4)</sup> дал точное решение в форме, удобной для практических расчетов. Оно применимо для поясов, жестко опертых на обоих концах и упруго опертых на равноудаленные промежуточные опоры одинаковой жесткости. Исследование основывается на предположении постоянного момента инерции и постоянной осевой сжимающей силы вдоль всей длины пояса. Детальный анализ этого исследования, содержащий важный случай упругих концевых опор, был сделан Шведа<sup>5)</sup>, которому также удалось привести аналитические результаты к простой расчетной формуле. В недавно опубликованной статье Ратцердорфер<sup>6)</sup> заново исследовал задачи, рассмотренные Блейхом и Шведа.

Для более сложных случаев, когда необходимо учитывать изменяющиеся значения жесткости и осевой силы стержня или упругих жесткостей опор, энергетический метод оказывается отличным средством для разработки достаточно простых методов расчета, удовлетворяющих требованиям строительного инженера. В этом плане проводил исследования Тимошенко<sup>7)</sup>, предположив, что стержень расположен на непрерывных опорах, а также Каварновский и Зеттерхольм<sup>8)</sup>, которые рассмотрели случай с равноудаленными промежуточными опорами. Автором книги<sup>9)</sup> было проведено общее исследование, где были использованы всевозможные упрощения, характерные для энергетического метода. Метод был специально разработан для стержней, упруго опертых в определенных точках, и его применение не зависит от изменяемости осевой силы, жесткости стержня

---

1) Müller-Breslau H., Die graphische Statik der Baukonstruktionen, т. II. — 2, A. Kröner, Leipzig, 1908.

2) Ostenfeld A., Die Seitensteifigkeit offener Brücken, Beton und Eisen, 1916, стр. 123.

3) Kriso K., Die Knicksicherheit der Druckgurte offener Fachwerkbrücken, Pubs. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., т. III, стр. 271, 1935.

4) Bleich F., Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen, Der Eisenbau, т. 10, 1919.

5) Schweda F., Die Bemessung des Endquerrahmens offener Brücken, Der Bauingenieur, т. 9, стр. 535, 1928. См. также Sitzungsberichte der Akademie des Wissenschaften in Wien, т. 137, Abt. IIa, стр. 71, 1928.

6) Ratzerdorfer J., A Buckling Problem, The Case of an Elastically Supported Beam, Aircraft Eng., 1945, стр. 348.

7) Timoshenko S., Sur la stabilité des systèmes élastiques, Annales des ponts et chaussées, вып. III, IV и V, 1913.

8) Kasarnowsky S., Zetterholm D., Zur Theorie der Seitensteifigkeit offener Fachwerkbrücken, Der Bauingenieur, т. 8, стр. 760, 1927.

9) Bleich F., Bleich H., Beitrag zur Stabilitätsuntersuchung des punktweise elastisch gestützten Stabes, Der Stahlbau, т. 10, стр. 17, 1937.

или жесткости опор. Метод применим к поясам однопролетных ферм так же, как к поясам неразрезных ферм.

Делались попытки применить метод последовательных приближений, рассмотренный в § 27 главы II, для исследования устойчивости упруго опертых стержней под действием переменной осевой силы<sup>1)</sup>. Однако этот метод имеет практическое значение только тогда, когда пояс выпучивается по одной или двум полуволнам, что является исключением, и следовательно, этот метод не имеет большого практического значения.

Хренников<sup>2)</sup> исследовал влияние заделки против вращения пояса, являющейся следствием жесткого соединения между поясом и верхним концом поддерживающих элементов стенки относительно его продольной оси. Тимошенко<sup>3)</sup> исследовал задачу, тесно связанную с задачей устойчивости, рассмотренной Хренниковым, а именно выпучивание стержня в упругой среде вследствие кручения и изгиба.

Будянский, Сейд и Уэйнбергер<sup>4)</sup> недавно исследовали критическую силу сжатого стержня, упруго опертого в равноудаленных промежуточных точках против изгиба и вращения в плоскости изгиба.



Рис. 144.

Таблицы для определения критической силы верхних поясов открытых пролетных строений (типа показанных на рис. 144)

были вычислены Кризо и Шиблером<sup>5)</sup> с помощью упрощающих предположений, касающихся основных параметров поясов. Таблицы применимы при наличии равных упругих жесткостей опор, в том числе концевых опор, и вычислены для ферм, имеющих  $n = 4, 6, 8$  и  $10$  панелей, на основании предположения о том, что сжимающие силы вызваны распределенной вдоль всего пролета нагрузкой.

Приведенный выше краткий обзор теоретических исследований в области устойчивости поясов открытых мостов свидетельствует

<sup>1)</sup> Keelhoff M., La stabilité des membrures comprimées des ponts métalliques, Annales des ponts et chaussées, 1920, стр. 193; Bazant Z., Die Knicksicherheit der Druckgurte offener Brücken, Pubs. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., т. VII, стр. 49, 1943—1944.

<sup>2)</sup> Hrennikoff A., Elastic Stability of a Pony Truss, Pubs. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., т. III, стр. 192, 1935.

<sup>3)</sup> Timoshenko S., Theory of Bending, Torsion and Buckling of Thin-walled Members of Open Cross Section, Jour. Franklin Inst., 1945, стр. 348; русский перевод: Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, 1955, стр. 502.

<sup>4)</sup> Budiansky B., Seide P. Weinberger R. A., The Buckling of a Column on Equally Spaced Deflectional and Rotational Springs, NACA, Tech. Note, 1519, 1948.

<sup>5)</sup> Schibler W., Das Tragvermögen der Druckgurte offener Fachwerkbrücken mit parallelen Gurten, Mitteilungen 19, Institut für Baustatik, Eidgenössische technische Hochschule, Zürich, 1946.

о том, что большинство реальных задач устойчивости, которые могут возникнуть в связи с проектированием открытых мостов, теоретически решено. Однако нужно заметить, что эти теории не дают ответа на побочную проблему, которая в действительности не является задачей устойчивости, но имеет не меньшее значение для инженера-проектировщика. Несмотря на то, что теория предоставляет требуемые величины жесткостей упругих опор, она не дает значения сил, действующих на стойки, подкрепляющие поперечные рамы. Определение значения этих сил необходимо для расчета напряжений в стойках и нижних балках и в их соединениях. До настоящего времени этой задаче не было уделено должного внимания что явилось причиной отсутствия каких-либо рациональных расчетных формул. Вышеуказанная задача до некоторой степени аналогична задаче расчета составных сжатых стержней, рассмотренной в главе V. Теория упругой устойчивости дала формулы для определения критической силы сжатого стержня, но для расчета соединительных стержней и планок в § 55 была приведена особая аргументация, не основывающаяся на соображениях устойчивости.

Второй вопрос, требующий изучения, это — вопрос о влиянии деформации от временной нагрузки поперечных балок на критическую силу поясов. В случае, когда временная нагрузка действует только на несколько поперечных балок, их прогиб вызывает боковые смещения вершин стоек, которые в свою очередь создают прогибы и напряжения в поясе, что может повлиять на его устойчивость. Величина этих добавочных напряжений, вызванных временной нагрузкой на поперечины, исследована Шиблером<sup>1)</sup>.

В последующих параграфах сделан детальный обзор существующих теорий, наиболее подходящих для установления расчетных формул устойчивости поясов открытых мостов.

### 79. Формула Энгессера

Первым удачным решением задачи устойчивости, рассмотренной в этой главе, мы обязаны Энгессеру<sup>2)</sup>, который установил приближенную формулу, пригодную при следующих геометрических и механических условиях:

1. Стержень  $AB$  длиной  $L = nl$ , нагруженный сжимающей силой  $P$ , имеет жесткие опоры в шарнирно опертых концах и упруго оперт на равноудаленные промежуточные опоры (рис. 145,  $a$ ).

2. Площадь поперечного сечения  $A$  и момент инерции  $J$  постоянны.

3. Реакция  $R$  в любой упругой опоре (рис. 145,  $b$ ) является линейной функцией прогиба  $y$  в этой опоре, а именно:

$$R = Cy, \quad (512)$$

<sup>1)</sup> Шиблер, цит. выше стр. 303.

<sup>2)</sup> Энгессер, цит. выше, стр. 301.

где  $C$  — жесткость пружины, предполагаемая одинаковой для всех промежуточных точек опор. Значение  $C$ , зависящее от упругой жесткости поддерживающей конструкции, можно определить как силу, вызывающую перемещение  $y=1$  в ее точке приложения, как

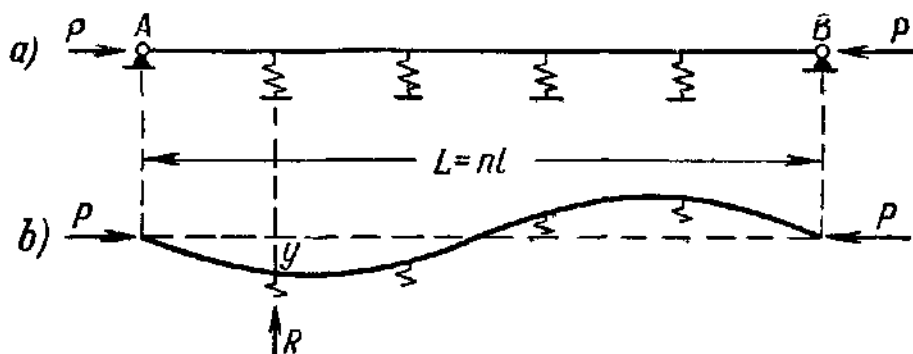


Рис. 145.

это показано на рис. 146.  $C$  имеет размерность силы на единицу длины и может изменяться в пределах между 0 и  $\infty$ .

В теории Энгессера, во-первых, допущено упрощение, согласно которому стержень между точками  $A$  и  $B$  (рис. 145) выпучивается по полуволнам одинаковой длины  $v$ , что вообще не имеет места, и, во-вторых, то, что реакции  $R$ ,

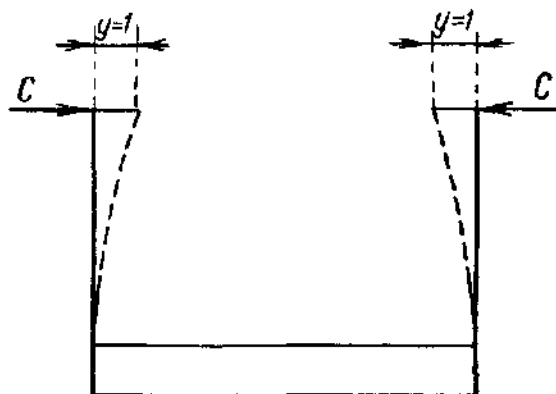


Рис. 146.

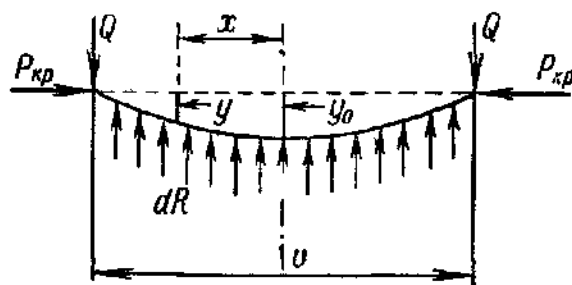


Рис. 147.

сосредоточенные в точках упругих опор, можно заменить непрерывно распределенным упругим сопротивлением  $dR$ , определенным следующим соотношением:

$$dR = \frac{R}{l} dx = \frac{C}{l} y dx. \quad (513)$$

На рис. 147 показаны такая полуволна длиной  $v$  и силы, действующие на нее, а также упругое сопротивление  $dR$  и силы  $Q$  и  $P_{кр}$ .

Предполагается, что кривая прогибов является косинусоидой

$$y = y_0 \cos \frac{\pi x}{v}, \quad (514)$$

при этом начало координатной системы  $x$ ,  $y$  находится в середине длины  $v$ .

Поперечная сила  $Q$  определяется выражением

$$Q = \int_{x=0}^{x=\frac{v}{2}} dR = \int_0^{\frac{v}{2}} \frac{C}{l} y_0 \cos \frac{\pi x}{v} dx = \frac{Cv}{\pi l} y_0, \quad (515)$$

а момент  $M_m$  в середине — выражением

$$M_m = P_{кр} y_0 - Q \frac{v}{2} + \int_0^{\frac{v}{2}} x dR.$$

Применяя дифференциальное соотношение <sup>1)</sup>

$$E_t J y'' = -M$$

к точке  $x=0$ , получим:

$$E_t J (y'')_{x=0} = -P_{кр} y_0 + Q \frac{v}{2} \int_0^{\frac{v}{2}} x dR. \quad (516)$$

Применяя обозначения

$$Q \frac{v}{2} = \frac{Cv^2}{2\pi l} y_0 \quad \text{и} \quad \int_0^{\frac{v}{2}} x dR = \frac{C y_0}{l} \left( \frac{v^2}{2\pi} - \frac{v^2}{\pi^2} \right)$$

и вычисляя значение  $[y'']_{x=0}$  из уравнения (514), имеем:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E_t J}{v^2} + \frac{Cv^2}{\pi^2 l}, \quad (517)$$

из которого видно, что  $P_{кр}$  является функцией длины  $v$  полуволны при любом заданном значении  $E_t J$ ,  $l$  и  $C$ . Величина  $P_{кр}$  имеет минимальное значение тогда, когда  $\frac{dP_{кр}}{dv} = 0$ . Исходя из этого условия, получим следующее соотношение:

$$-\frac{2\pi^2 E_t J}{v^3} + \frac{2Cv}{\pi^2 l} = 0,$$

из которого определим длину полуволны

$$v = \pi \sqrt[4]{\frac{E_t J l}{C}}. \quad (518)$$

Используя это значение, из уравнения (517) получим в результате требуемое значение  $C_r$  жесткости пружины  $C$ , необходимое для

<sup>1)</sup> Первоначальное исследование Энгессера, где использован модуль Юнга, можно легко обобщить, вводя касательный модуль  $E_t$ .

обеспечения несущей способности  $P_{кр} = \nu P$  стержня. Это требуемое значение равно

$$C_r = \frac{P_{кр}^2 l}{4E_t J}. \quad (519)$$

Вышеуказанное выражение представляет собой формулу Энгессера. Поддерживающая упругая конструкция должна быть рассчитана так, чтобы величина жесткости пружины равнялась бы или была больше значения  $C_r$ .

Уравнение (519) содержит касательный модуль  $E_t$ , который зависит от  $\sigma_{кр} = P_{кр}/A$ . Для того чтобы облегчить применение уравнения (519) в практических расчетах, целесообразно выразить  $P_{кр}$  через обобщенную формулу Эйлера

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E_t J}{(kl)^2}, \quad (520)$$

которая определяет значение  $P_{кр}$  как критическую силу двухшарнирного сжатого стержня длиной  $kl$ . Значение коэффициента  $k$  должно быть больше единицы, так как значение  $k = 1$  соответствует предельному значению  $P_E = \pi^2 E_t J / l^2$ , которое не может быть превышено. На основе уравнения (520) имеем:

$$E_t J = \frac{P_{кр} (kl)^2}{\pi^2};$$

затем, подставляя значение  $E_t J$  из этого уравнения в уравнение (519), в результате получим:

$$C_r = \frac{\pi^2}{4k^2} \frac{P_{кр}}{l}. \quad (521)$$

Значение гибкости  $\lambda = kl/r$ , соответствующее критическому напряжению  $\sigma_{кр} = P_{кр}/A$ , можно взять из кривой критических напряжений для рассмотренного материала; величина  $k$  определяется соотношением  $k = \lambda r / l$ . Радиус инерции  $r$  в этом уравнении дается выражением  $\sqrt{J/A}$ , где значения  $J$  и  $A$  определяются в самом начале исследования. Следовательно, уравнение (521) применимо в упругой и неупругой областях выпучивания.

Процесс определения значения  $C_r$  очень прост. Чтобы получить критическое напряжение  $\sigma_{кр} = \nu \sigma$ , умножим расчетное напряжение  $\sigma = P/A$  стержня на коэффициент безопасности  $\nu$ . Из кривой критических напряжений найдем значение гибкости  $\lambda$ , соответствующее значению  $\sigma_{кр}$ , и вычислим  $k = \lambda r / l$ . В результате из уравнения (521) получим  $C_r$ .

Формула Энгессера хорошо совпадает с точным решением для стержня с жесткими концевыми опорами, пока длина волн  $\nu$  больше  $1,8l$ , что описано в следующем параграфе. Такое ограничение в применении формулы было признано самим Энгессером.

Предельная длина  $\nu = 1,8l$  соответствует значению  $k = 1,3$ , поэтому формулу можно применить тогда, когда изгибная жесткость стержня достаточна для того, чтобы обеспечить устойчивость стержня, рассматриваемого как двухшарнирный сжатый стержень длиной  $l_0 \geq 1,3l$ .

Уравнения (519) и (521) применимы только тогда, когда концы стержня жестко оперты, так как предположение о равенстве длин полуволн между жесткими опорами означает равенство нулю прогибов в этих точках.

### 80. Точная теория упруго опертого стержня. Общее решение

Для того чтобы получить уравнения устойчивости прямого стержня, упруго опертого в точках  $0, 1, 2, \dots, n$ , используем общую теорию устойчивости рам, изложенную в § 59 главы VI. В этом параграфе мы рассматриваем общий случай, показанный на рис. 148.

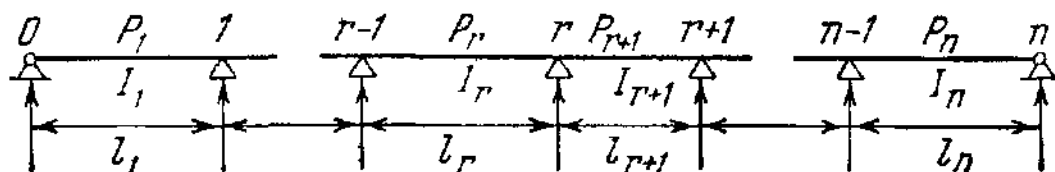


Рис. 148.

где размеры каждого отдельного пролета и осевые силы меняются от одного пролета к другому. Впоследствии, в §§ 81 и 82 рассматривается случай постоянных значений  $l$ ,  $I$  и  $P$ , где будут получены аналитические решения для соответственно неподатливых и упругих концевых опор.

Исследование стержневой системы, показанной на рис. 148, при помощи аналитического метода, описанного в § 59, дает  $n - 1$  уравнений трех моментов в опорах  $1, 2, \dots, (n - 1)$  и  $n$  уравнений равновесия для  $n$  элементов сжатого стержня. Эти  $2n - 1$  уравнения определяют  $n - 1$  моментов  $M_r$  в опорах и  $n$  углов поворота стержня  $\rho_r$ , т. е. в итоге  $2n - 1$  неизвестных.

В соответствии с уравнениями (397) и (404) имеем одно уравнение трех моментов для каждой опоры  $r = 1, 2, \dots, n - 1$ :

$$M_{r-1}s_r l'_r + M_r(c_r l'_r + c_{r+1} l'_{r+1}) + M_{r+1}s_{r+1} l'_{r+1} - EJ(\rho_r - \rho_{r+1}) = 0 \quad (522)$$

и одно условие равновесия для каждого пролета

$$\frac{M_r - M_{r-1}}{l_r} - P_r \rho_r - Q_r = 0. \quad (523)$$

Все обозначения определены в § 59.



Для того чтобы исключить поперечные силы  $Q_k$  из системы уравнений (523), определим разность двух последовательных уравнений

$$\frac{M_r - M_{r-1}}{l_r} - \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}} - P_r \rho_r + P_{r+1} \rho_{r+1} - Q_r + Q_{r+1} = 0. \quad (524)$$

Так как

$$Q_{r+1} - Q_r = R_r$$

и

$$R_r = C_r y_r, \quad (525)$$

где  $C_r$  есть жесткость опоры  $r$ , уравнение (524) принимает следующий вид:

$$\frac{M_r - M_{r-1}}{l_r} - \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}} - P_r \rho_r + P_{r+1} \rho_{r+1} + C_r y_r = 0. \quad (526)$$

Углы поворотов стержней  $\rho_r$  можно выразить через прогибы  $y_r$ :

$$\rho_r = \frac{y_r - y_{r-1}}{l_r}, \quad (527)$$

и, вводя (527) в уравнения (522) и (526), получить следующую систему уравнений устойчивости:

*уравнения трех моментов*

$$M_{r-1} s_r l'_r + M_r (c_r l'_r + c_{r+1} l'_{r+1}) + M_{r+1} s_{r+1} l'_{r+1} - EJ \left[ \frac{y_r - y_{r-1}}{l_r} - \frac{y_{r+1} - y_r}{l_{r+1}} \right] = 0 \quad (528)$$

с граничными значениями  $M_0 = 0$  и  $M_n = 0$ ;

*условия равновесия для промежуточных точек:*

$$\frac{M_r - M_{r-1}}{l_r} - \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}} - P_r \frac{y_r - y_{r-1}}{l_r} + P_{r+1} \frac{y_{r+1} - y_r}{l_{r+1}} + C_r y_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n-1); \quad (529)$$

*условия равновесия для концевых точек 0 и n:*

$$\left. \begin{aligned} -\frac{M_1}{l_1} + P_1 \frac{y_1 - y_0}{l_1} + C_0 y_0 &= 0; \\ -\frac{M_{n-1}}{l_n} - P_n \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} + C_n y_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (530)$$

Уравнения (528) — (530) образуют систему уравнений устойчивости, определяющую  $n-1$  неизвестных моментов и  $n+1$  неизвестных перемещений  $y$ . Детерминант  $\Delta$ , составленный из коэффициентов этой системы уравнений, дает условие устойчивости  $\Delta = 0$ .

Легко видеть, что численные расчеты становятся очень громоздкими в случае наличия большого числа упругих опор. Следовательно, решение уравнений устойчивости обычными методами практически неудобно, поэтому в следующих параграфах рассмотрены другие способы получения значений критической силы.

### 81. Стержень с жестко опертыми концами<sup>1)</sup>

Предположим, что силы  $P$  постоянны, значения длин  $l$  и моментов инерции  $J$  элементов, а также жесткостей  $C$  промежуточных опор равны. Следовательно, функции  $c_r$  и  $s_r$  идентичны во всех элементах, в связи с чем можно опустить индекс  $r$ . Так как  $l' = lJ/J_r = l$ , уравнение трех моментов можно написать в следующем простом виде:

$$M_{r-1} + 2 \frac{c}{s} M_r + M_{r+1} + \frac{E_t J}{s l^2} (y_{r-1} - 2y_r + y_{r+1}) = 0.$$

Добавляя и вычитая  $2M_r$  и вводя

$$\frac{c}{s} = \gamma \quad \text{и} \quad \frac{E_t J}{s l^2} = \theta, \quad (531)$$

получим:

$$M_{r-1} - 2M_r + M_{r+1} + 2(\gamma + 1)M_r + \theta(y_{r-1} - 2y_r + y_{r+1}) = 0.$$

В случае, если  $M_r$  и  $y_r$  рассматриваются как функции индекса  $r$ , первые три члена и последний, находящиеся в левой стороне этих уравнений, представляют собой разность второго порядка  $M_r$  и  $y_r$ . Следовательно, вышенаписанную систему уравнений можно рассматривать как уравнение в конечных разностях второго порядка<sup>2)</sup>, а именно:

$$\Delta^2 M_r + 2(\gamma + 1)M_r + \theta \Delta^2 y_r = 0. \quad (532)$$

Аналогичным способом преобразуем уравнения равновесия (529). Эти уравнения после умножения на  $-l$  и замены  $P_r$  на  $\nu P$  принимают вид

$$M_{r-1} - 2M_r + M_{r+1} - \nu P (y_{r-1} - 2y_r + y_{r+1}) - C l y_r = 0$$

или

$$\Delta^2 M_r - \nu P \Delta^2 y_r - C l y_r = 0. \quad (533)$$

<sup>1)</sup> Блейх, цит. выше стр. 302.

<sup>2)</sup> Краткое введение в теорию конечных разностей и уравнений в конечных разностях дано в книге: Карман Т. в., Биот М. А., *Mathematical Methods in Engineering*, Mc Graw-Hill Book Company Inc., New York, 1940; русский перевод: Карман Т., Био М. А., *Математические методы в инженерном деле*, М., Гостехиздат, 1948. Для более детального изучения см. Bleich F., Melan E., *Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik*, Julius Springer, Berlin, 1927.

Уравнения (532) и (533) образуют систему двух совместных уравнений в конечных разностях, которую можно решить способом, аналогичным применяемому для решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Предположим, что функции  $M_r$  и  $y_r$  имеют следующий вид:

$$M_r = A\xi^r \quad \text{и} \quad y_r = A\rho\xi^r, \quad (534)$$

где  $A$  является произвольной постоянной, тогда как  $\xi$  и  $\rho$  являются величинами, подлежащими определению. На основе уравнений (534) имеем:

$$\Delta^2 M_r = A\xi^r \frac{(\xi - 1)^2}{\xi} = A\xi^r z;$$

$$\Delta^2 y_r = A\rho\xi^r \frac{(\xi - 1)^2}{\xi} = A\rho\xi^r z,$$

где

$$z = \frac{(\xi - 1)^2}{\xi}. \quad (535)$$

Вводя эти выражения в уравнения (532) и (533), получим так называемые характеристические уравнения:

$$z + 2(\gamma + 1) + \theta\mu z = 0; \quad (536a)$$

$$z - \nu P\mu z - Cl\mu = 0, \quad (536b)$$

из которых определяются значения  $\xi$  и  $\rho$ . Из уравнения (536) находим:

$$\mu = \frac{z}{z\nu P + Cl}, \quad (537)$$

а исключая  $\mu$  из уравнения (536a), получим следующее квадратное уравнение относительно  $z$ :

$$z^2 + z \frac{2(\gamma + 1)\nu P + Cl}{\theta + \nu P} + 2Cl \frac{\gamma + 1}{\theta + \nu P} = 0. \quad (538)$$

Это уравнение имеет два корня  $z_1$  и  $z_2$ , которым, согласно уравнению (537), соответствуют два значения  $\rho$ , а именно  $\rho_1$  и  $\rho_2$ .

На основе соотношения (535) получим квадратное уравнение

$$\xi^2 - \xi(z + 2) + 1 = 0, \quad (539)$$

которое имеет четыре корня:  $\xi_1, \xi_2$  (соответствующие  $z_1$ ) и  $\xi_3, \xi_4$  (соответствующие  $z_2$ ). Из уравнения видно также, что  $\xi_1\xi_2 = 1$  и  $\xi_3\xi_4 = 1$ . Следовательно, общее решение уравнений в конечных разностях (532) и (533) будет:

$$\left. \begin{aligned} M &= A_1\xi_1^r + A_2\xi_2^r + A_3\xi_3^r + A_4\xi_4^r; \\ y &= A_1\rho_1\xi_1^r + A_2\rho_1\xi_2^r + A_3\rho_2\xi_3^r + A_4\rho_2\xi_4^r. \end{aligned} \right\} \quad (540)$$

Произвольные постоянные  $A_1, \dots, A_4$  определяются из граничных условий задачи

$$M_0 = 0, \quad M_n = 0, \quad y_0 = 0, \quad y_n = 0, \quad (541)$$

которые дают четыре линейных однородных уравнения:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 &= 0; \\ A_1\mu_1 + A_2\mu_1 + A_3\mu_2 + A_4\mu_2 &= 0; \\ A_1\xi_1^n + A_2\xi_2^n + A_3\xi_3^n + A_4\xi_4^n &= 0; \\ A_1\mu_1\xi_1^n + A_2\mu_1\xi_2^n + A_3\mu_2\xi_3^n + A_4\mu_2\xi_4^n &= 0. \end{aligned}$$

Конечные значения  $A_1, \dots, A_4$  возможны только тогда, когда детерминант  $\Delta$ , составленный из коэффициентов этой системы уравнений, равен нулю. Условие устойчивости будет

$$\Delta = (\mu_1 - \mu_2)^2 (\xi_1^n - \xi_2^n) (\xi_3^n - \xi_4^n) = 0.$$

Оно распадается на три уравнения:

$$\mu_1 - \mu_2 = 0; \quad \xi_1^n - \xi_2^n = 0; \quad \xi_3^n - \xi_4^n = 0. \quad (542)$$

Первое из этих трех условий приводит к тривиальному случаю, когда  $M_r = 0$  и  $y_r = 0$ <sup>1)</sup>. Учитывая  $\xi_1\xi_2 = \xi_3\xi_4 = 1$ , второе и третье условия можно написать в следующем виде:

$$\xi_1^{2n} - 1 = 0 \quad \text{и} \quad \xi_3^{2n} - 1 = 0. \quad (543)$$

Оба уравнения идентичны, и каждое из них удовлетворяется  $2n$  корнями вида

$$\xi = \cos p \frac{2\pi}{2n} \pm i \sin p \frac{2\pi}{2n} \quad (p = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (544)$$

Из уравнений (539) находим  $z + 2 = \xi + 1/\xi$  и, вводя значения  $\xi$  из уравнения (544), получим:

$$z = 2 \left( \cos \frac{p\pi}{n} - 1 \right) \quad (p = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (545)$$

Решая уравнение (538) относительно  $Cl$ , имеем:

$$Cl = - \frac{z(\theta + \nu P) + 2(\gamma + 1)\nu P}{1 + 2 \frac{\gamma + 1}{z}},$$

а подставляя значение  $z$ , найдем:

$$Cl = -2 \frac{\left( \cos \frac{p\pi}{n} - 1 \right) (\theta + \nu P) + (\gamma + 1) \nu P}{1 + \frac{\gamma + 1}{\cos \frac{p\pi}{n} - 1}} \quad (p = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (546)$$

<sup>1)</sup> См. Блейх, цит. выше, стр. 302.

Это выражение охватывает всевозможные формы выпучивания. Случай, когда  $p \approx 0$ , приводит к значению  $Cl = 0$ , и его можно опустить.

Для того чтобы получить окончательный вид уравнения (546), используем уравнения (531) и, запомнив, что

$$\Phi = l \sqrt{\frac{\nu P}{E_t J}},$$

определяем:

$$\theta + \nu P = \nu P \left(1 + \frac{\theta}{\nu P}\right) = \nu P \left(1 + \frac{E_t J}{\nu P s l^2}\right) = \nu P \left(1 + \frac{1}{\Phi^2 s}\right).$$

Так как

$$s = \frac{1}{\Phi^2} \left(\frac{\Phi}{\sin \Phi} - 1\right) \quad \text{и} \quad c = \frac{1}{\Phi^2} (1 - \Phi \operatorname{ctg} \Phi),$$

имеем:

$$\theta + \nu P = \nu P \frac{\Phi}{\Phi - \sin \Phi}.$$

Далее определяем:

$$1 + \gamma = 1 + \frac{c}{s} = \frac{\Phi (1 - \cos \Phi)}{\Phi - \sin \Phi},$$

и в результате получаем следующее уравнение для  $C$ :

$$C = \frac{2\nu P}{l} \frac{\left(1 - \cos \frac{p\pi}{n}\right)a - b}{1 - \frac{b}{1 - \cos \frac{p\pi}{n}}} \quad (p = 1, 2, \dots, n-1), \quad (547)$$

где

$$a = \frac{\Phi}{\Phi - \sin \Phi} \quad \text{и} \quad b = \frac{\Phi (1 - \cos \Phi)}{\Phi - \sin \Phi}. \quad (548)$$

Для стержня с  $n$  пролетами существуют  $n-1$  различных возможных форм выпучивания, и необходимо подобрать такое значение  $p$ , которое соответствует максимальным значениям жесткости опор  $C$ , определенной уравнением (547). Таким образом, условие  $\frac{dC}{dp}$  определяет то значение  $C$ , которое соответствует состоянию перехода от устойчивого к неустойчивому положению равновесия рассматриваемой системы. Из этого условия можно определить следующее значение:

$$\begin{aligned} 1 - \cos \frac{p\pi}{n} &= b \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{a}}\right) = \\ &= \frac{\Phi (1 - \cos \Phi)}{\Phi - \sin \Phi} \left(1 \pm \sqrt{\frac{\sin \Phi}{\Phi}}\right). \end{aligned} \quad (549)$$

Максимальное значение соответствует знаку минус в этом выражении.

Уравнения (547) вместе с уравнением (549) являются решением поставленной задачи и дают значение жесткости  $C$ , необходимое для обеспечения устойчивости упруго опертого стержня, состоящего из  $n$  элементов. Способ использования этих двух уравнений следующий. Вычислив величину  $\Phi = l \sqrt{P/E_t J}$ , из уравнения (549) определим значение выражения  $1 - \cos\left(\frac{\pi p}{n}\right)$ . Обычно найденное значение не совпадает с одним из  $n-1$  возможных значений  $1 - \cos\left(\frac{p\pi}{n}\right)$ , так как  $p$  должно быть целым числом. Подберем два значения  $1 - \cos(p\pi/n)$ , которые ближе всего к значению, полученному из уравнения (549), и вычислим соответствующие значения  $C$  из уравнения (547).

Для расчета упругих опор нужно использовать наибольшее из этих двух значений  $C$ .

Для того чтобы исключить модуль  $E_t$  из выражения для  $\Phi$ , поступаем так же, как и в § 79. Подставляя значение  $P_{кр}$  из уравнения (520) в выражение для  $\Phi$ , получим:

$$\Phi = \frac{\pi}{k}, \quad (550)$$

где значение  $k$  можно определить при помощи кривой критических напряжений для рассмотренного материала, т. е. так, как это было объяснено в конце § 79.

Форма кривой прогибов выпущенного стержня будет следующей:

$$y_r = A \sin r \frac{p\pi}{n}. \quad (551)$$

Эта формула определяет перемещения на опорах  $r=1, 2, \dots, n-1$ , где  $A$  — произвольная постоянная,

а  $p$  — целое число, соответствующее наибольшему значению  $C$ , как это было описано выше.

На рис. 149 приведены значения  $Cl/2\sqrt{P}$  в зависимости от значений  $\Phi$  для  $n=2, 4$  и  $10$ . С увеличением  $n$  значение жесткости опор  $C$  приближается к предельному значению  $C_\infty$ , показанному пунктирной кривой для  $n=\infty$ . В связи с тем, что  $C_\infty$  больше, чем любое значение  $C_n$ , целесообразно заменить  $C_n$  на  $C_\infty$ , по крайней мере для значений  $n > 6$ , когда максимальная разница составляет не более 1%. При  $n=\infty$  выражение  $1 - \cos(p\pi/n)$  может охватывать все значения, лежащие между 0 и 2, а из уравнения (549) определяется точное значение  $1 - \cos(p\pi/n)$ , соответствующее наи-

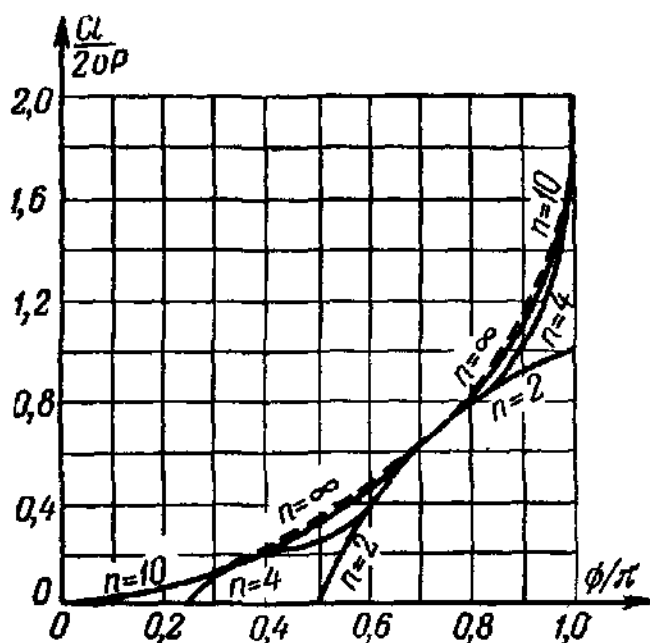


Рис. 149.

большему значению  $C$ . Значение  $C_{\max} = C_r$  для  $n = \infty$  можно выразить в следующей форме:

$$C_r = \frac{2\sqrt{P}}{l} \frac{\Phi(1 - \cos \Phi)}{(\sqrt{\Phi} + \sqrt{\sin \Phi})^2} = \frac{2\sqrt{P}}{l} \Phi. \quad (552)$$

В целях облегчения применения уравнения (552) для практических расчетов составлена таблица 24, из которой можно непосредственно получить значения  $\Phi$  в функции от  $\Phi/\pi = 1/k$ . Эту таблицу можно использовать для расчетов в упругой и пластической областях выпучивания при условии, если значение  $k$  определяется на основе кривой критических напряжений так, как это показано на стр. 307.

Таблица 24. Значения  $\Phi$  в уравнении (552)

$1/k$	$\Phi$	$1/k$	$\Phi$	$1/k$	$\Phi$	$1/k$	$\Phi$
0,30	0,111	0,50	0,309	0,70	0,614	0,90	1,102
0,32	0,126	0,52	0,335	0,72	0,652	0,91	1,138
0,34	0,142	0,54	0,361	0,74	0,692	0,92	1,177
0,36	0,160	0,56	0,388	0,76	0,734	0,93	1,219
0,38	0,179	0,58	0,417	0,78	0,777	0,94	1,264
0,40	0,198	0,60	0,447	0,80	0,822	0,95	1,316
0,42	0,218	0,62	0,478	0,82	0,870	0,96	1,375
0,44	0,239	0,64	0,510	0,84	0,921	0,97	1,444
0,46	0,261	0,66	0,544	0,86	0,976	0,98	1,530
0,48	0,285	0,68	0,578	0,88	1,036	0,99	1,652
						1,00	2,000

Вводя обозначение  $\Phi^2 = \sqrt{P} l^2 / E_t J$ , формулу Энгессера можно преобразовать в следующую:

$$C_r = \frac{2\sqrt{P}}{l} \frac{\Phi^3}{8}, \quad (553)$$

что позволяет легко сопоставить ее с уравнением (552). Обе кривые приведены на рис. 150. Кривая Энгессера дает хорошее соответствие с кривой, вычисленной на основе уравнения (552) для значений  $0 \leq \Phi \leq 0,7\pi$ , но значительно отклоняется от нее, когда значение  $\Phi$  стремится к  $\pi$ . В 1918 г. Энгессер<sup>1)</sup> опубликовал результаты опытов, проведенных с упруго заделанными стальными стержнями прямоугольного поперечного сечения. Он нашел, что его формула полностью соответствует результатам опытов для значений  $\Phi < 0,7\pi$ . Следовательно, на рис. 150 показаны только те точки, которые соответствуют значениям  $\Phi > 0,7\pi$ . Экспериментальные точки лежат очень близко к кривой, выражающей уравнение (552).

<sup>1)</sup> Engesser F., Versuche und Untersuchungen über den Knickwiderstand des seitlich gestützten Stabes, Der Eisenbau, т. 9, стр. 28, 1918.

Условие постоянной силы  $P$  на практике удовлетворяется редко. В верхнем поясе открытого пролетного строения, например, величина  $P$  возрастает от концов к середине фермы; тем не менее, в экономично рассчитанной ферме отношение  $P/EJ$  приблизительно будет постоянным. Таким образом, функцию  $\Phi$ , зависящую только от значения  $k$ , можно считать достаточно точной при условии, если

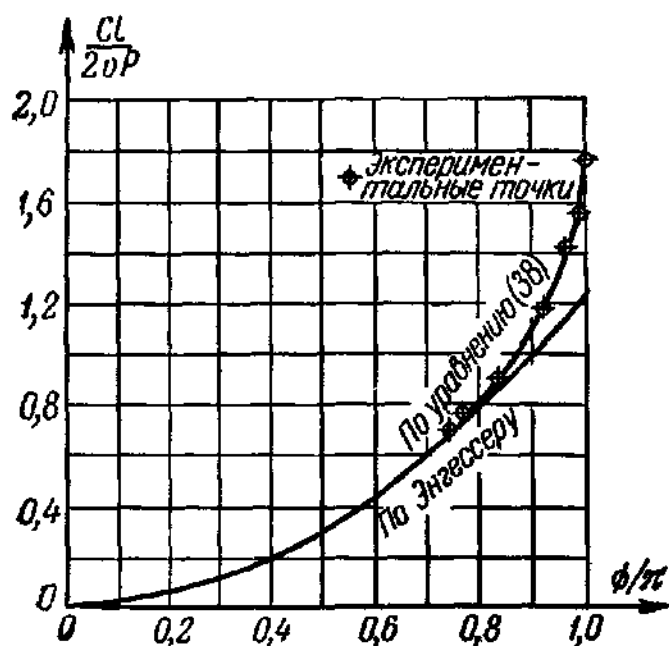


Рис. 150.

она определена для центральной части пояса; отсюда введение значения  $P_{\max}$  в коэффициент  $2vP/l$  в уравнении (552) приводит к заниженным результатам.

При выводе формулы Энгессера, так же как и при выводе точных уравнений (547) и (552), предполагалось, что концы упруго опертого стержня покоятся на неподатливых опорах. Что касается расчета открытых мостов, то это условие в действительности не удовлетворяется, и применение выведенных выше формул к таким случаям приводит к завышен-

ным значениям критических сил. Формула Энгессера широко используется в Европе в практике проектирования мостов, создавая возможность к тому, чтобы повышенная степень безопасности, полученная путем вычисления  $C_r$  из  $P_{\max}$ , могла бы устранить нежелательное влияние податливости концевых опор, что в действительности происходит далеко не так. Такое положение дел является совершенно неудовлетворительным, особенно в связи с тем фактом, что существует метод расчета, учитывающий упругие перемещения концов пояса. Этот метод излагается в следующем параграфе.

## 82. Стержень с упруго опертыми концами<sup>1)</sup>

При проектировании открытых пролетных строений, как это показано на рис. 151, трудно и даже неэкономично рассчитывать концевые порталные рамы  $F_e$  моста так, чтобы полностью были предотвращены боковые перемещения концов. В большинстве случаев жесткость рам  $F_e$  является величиной того же порядка, что и жесткость промежуточных рам, в связи с чем нельзя пренебрегать влиянием концевых перемещений верхнего пояса. Если обозначить значение жесткости концевых опор через  $C_e$ , а промежуточных —

<sup>1)</sup> Швед а, цит. выше, стр. 302.



через  $C$ , то задачу, которую нужно решать, можно поставить в следующем виде. Даны постоянная осевая сила  $\nu P$ , действующая в верхнем поясе, его постоянный момент инерции  $I$  и жесткость  $C$  промежуточных опор; требуется определить жесткость  $C_e$  концевых опор. Предположим, что число пролетов  $2n$  является четным. На рис. 152 показан сжатый пояс. Начало отсчета 0 находится в середине пояса; опоры пронумерованы от 0 до  $-n$  в левой половине и от 0 до  $n$  в правой половине пояса. Для того чтобы учесть влияние концевых раскосов, находящихся в сжатом состоянии (рис. 151, б), в рассматриваемую систему добавим два элемента с длиной  $d$ , подверженных действию сжимающей силы  $\nu P_d$  и шарнирно соединенных соответственно в точках  $-n$  и  $+n$ .

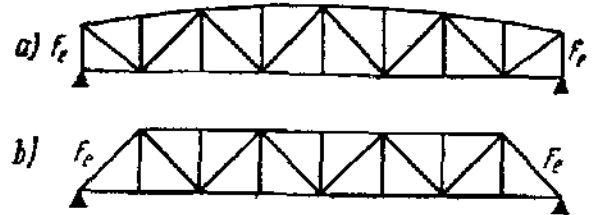


Рис. 151.

Метод исследования такой системы, по существу, тот же, что и изложенный в предыдущем параграфе. Уравнения в конечных разностях (532) и (533), характеристические уравнения (536) и уравнения (537) и (538) остаются неизменными. Граничные условия отличаются от тех, которые рассматривались в предыдущем параграфе. Два из этих условий показывают, что моменты в концевых точках  $\pm n$

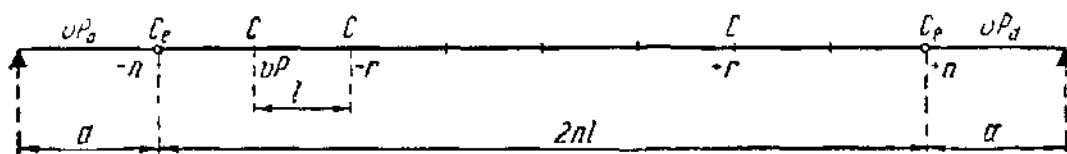


Рис. 152.

должны равняться нулю. Другие два граничных условия получаются из условий равновесия [уравнение (530)], к которым нужно добавить член  $-\nu P_d l/d$ , учитывающий концевые диагонали. Четыре граничных условия выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} M_n &= 0; \quad M_{-n} = 0; \\ -M_{n-1} + \nu P y_{n-1} - \left( \nu P_d \frac{l}{d} + \nu P - C_e l \right) y_n &= 0; \\ -M_{-(n-1)} + \nu P y_{-(n-1)} - \left( \nu P_d \frac{l}{d} + \nu P - C_e l \right) y_{-n} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (554)$$

Значение  $\xi$  в уравнениях (534) в предшествующем параграфе оказалось сложным, но благодаря простой форме выражения граничных условий (541) окончательный результат в доступной форме можно получить без особого труда. В данном случае целесообразно

выражать решения двух дифференциальных уравнений в следующем виде:

$$M = Ae^{ar} \quad \text{и} \quad y = A\gamma e^{ar}, \quad (555)$$

где  $a$  является постоянной, которую нужно определить.

Постоянные  $\xi$  и  $a$  связаны между собой соотношением  $\xi = e^a$ , и, исключая  $\xi$  из уравнения (535), получим:

$$z = \frac{(\xi - 1)^2}{\xi} = 2(\operatorname{ch} a - 1).$$

Уравнения (537) и (538) примут следующий вид:

$$\mu = \frac{2(\operatorname{ch} a - 1)}{2(\operatorname{ch} a - 1)\gamma P + Cl}; \quad (556)$$

$$\operatorname{ch}^2 a - \frac{4\theta + 2\gamma P(1 - \gamma) - Cl}{2(\theta + \gamma P)} \operatorname{ch} a + \frac{2\theta - 2\gamma P + Cl\gamma}{2(\theta + \gamma P)} = 0. \quad (557)$$

Решая последнее уравнение относительно  $a$ , получим два корня  $\operatorname{ch} a_1$  и  $\operatorname{ch} a_2$ , и так как каждому значению  $\pm a$  соответствуют два значения  $\operatorname{ch}$ , то в итоге имеем четыре различных корня  $a$ , соответствующих четырем корням  $\xi$  уравнения (539). В связи с тем, что корень  $\operatorname{ch} a$  имеет вид  $\operatorname{ch} a = v \pm \sqrt{v^2 - t}$ , и предположив, что  $v^2 - t < 0$ , можно написать:

$$\operatorname{ch} a = v \pm \sqrt{v^2 - t} = v \pm ui, \quad (558)$$

где

$$\left. \begin{aligned} u &= \sqrt{t - v^2}; \\ v &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \Phi - \frac{Cl}{2\gamma P \Phi} (\Phi - \sin \Phi) \right]; \\ t &= \left( 1 - \frac{Cl}{2\gamma P} \right) \cos \Phi + \frac{Cl}{2\gamma P \Phi} \sin \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (559)$$

При выводе выражений для  $v$  и  $t$  использовались уравнения (531).

Мы предполагали, что  $v^2 - t < 0$ ; это предположение в дальнейшем будет обосновано. Из него следует, что оба значения  $\operatorname{ch} a_1$  и  $\operatorname{ch} a_2$  являются комплексно сопряженными и вследствие того, что каждому значению  $\operatorname{ch} a$  соответствуют два корня  $\pm a$ , получаются четыре следующих корня:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \alpha + \beta i; & a_3 &= \alpha - \beta i; \\ a_2 &= -\alpha - \beta i; & a_4 &= -\alpha + \beta i. \end{aligned} \right\} \quad (560)$$

Согласно уравнению (556) существуют два значения  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , связанных соответственно с  $a_1, a_2$  и  $a_3, a_4$ .

Для того чтобы получить значения  $\alpha$  и  $\beta$ , напомним формулу

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch}(\alpha + \beta i) = \operatorname{ch} \alpha \cos \beta + i \operatorname{sh} \alpha \sin \beta,$$

а на основе уравнения (558) имеем:

$$v = \operatorname{ch} \alpha \cos \beta; \quad u = \operatorname{sh} \alpha \sin \beta.$$

Решая эти два уравнения относительно  $\operatorname{ch} \alpha$  и  $\cos \beta$ , получим выражения:

$$\left. \begin{aligned} 2 \operatorname{ch} \alpha &= \sqrt{(v+1)^2 + u^2} + \sqrt{(v-1)^2 + u^2}; \\ 2 \cos \beta &= \sqrt{(v+1)^2 + u^2} - \sqrt{(v-1)^2 + u^2}, \end{aligned} \right\} \quad (561)$$

определяющие  $\alpha$  и  $\beta$  при заданных расчетных данных  $\nu P$ ,  $\Phi$  и  $C$ . Подставляя значение  $\operatorname{ch} \alpha = v \pm ul$  в уравнение (556), имеем:

$$p_{1,2} = \frac{p - Cl \pm ql}{\nu P (p \pm ql)}, \quad (562)$$

где

$$p = 2\nu P (v - 1) + Cl; \quad p = 2\nu P u. \quad (563)$$

Общее решение уравнений в конечных разностях в результате принимает вид:

$$\begin{aligned} M_r &= A_1 (p \operatorname{ch} \alpha r \cos \beta r - q \operatorname{sh} \alpha r \sin \beta r) + \\ &+ A_2 (p \operatorname{sh} \alpha r \cos \beta r - q \operatorname{ch} \alpha r \sin \beta r) + \\ &+ A_3 (q \operatorname{ch} \alpha r \cos \beta r + p \operatorname{sh} \alpha r \sin \beta r) + \\ &+ A_4 (q \operatorname{sh} \alpha r \cos \beta r + p \operatorname{ch} \alpha r \sin \beta r). \end{aligned} \quad (564)$$

Вводя эти уравнения в граничные условия (554), получим четыре уравнения относительно неизвестных  $A_1, \dots, A_4$ , детерминант  $\Delta$  которых должен равняться нулю. Вследствие симметрии системы можно условие  $\Delta = 0$  разбить на два отдельных уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta_{1,2} &= \left( C_e l - \nu P - \nu P_a \frac{l}{d} \right) (\operatorname{ch} 2\alpha n \pm \cos 2\beta n) + \\ &+ p [\operatorname{sh} \alpha (2n - 1) \sin \beta \pm \operatorname{sh} \alpha \sin \beta (2n - 1)] + \\ &+ q [\operatorname{ch} \alpha (2n - 1) \cos \beta \pm \operatorname{ch} \alpha \cos \beta (2n - 1)] = 0. \end{aligned} \quad (565)$$

Оба детерминанта имеют один и тот же вид и отличаются только по знакам некоторых членов. Значение  $\Delta_1$ , взятое со знаками плюс, соответствует симметричной форме выпучивания, а значение  $\Delta_2$ , взятое со знаками минус, — несимметричным формам выпучивания.

Из этих двух уравнений можно непосредственно определить значения жесткости концевых опор  $C_e$ , поскольку значения  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  и  $q$  можно вычислить из расчетных данных каждого отдельного случая. Наибольшее из значений  $C_e$ , полученного из уравнений (565), определяет требуемую жесткость концевых рам  $F_e$ .

Несомненно то, что значение  $C$  жесткости промежуточных опор не может быть выбрано произвольно, так как  $C$  ограничена значением  $C_0$ , относящимся к жестким концевым опорам и определяемым уравнением (547). В случае, если концы стержня упруго оперты, значение  $C$  неизбежно будет больше  $C_0$ . При расчете необходимо

подобрать значение  $C = cC_0$ , где  $c$  больше единицы. Далее, предполагая, что  $k > 1,3$ <sup>1)</sup>, а на практике это всегда имеет место, удобно ввести значение  $C = cC_0 = cC_E$  в уравнения (565), где  $C_E$  — значение Энгессера, данное уравнением (521). Отсюда требуемое значение  $C_e$  можно написать в следующем виде:

$$C_e = \frac{vP_d}{d} + \Psi C_E, \quad (566)$$

где

$$C_E = \frac{\pi^2 v P}{4k^2 l}.$$

Согласно Шведу значение коэффициента  $\Psi$  можно выразить в следующей форме:

$$\Psi = \frac{4k^2}{\pi^2 c} \left( 1 - \frac{1}{2u \operatorname{ch} 2\alpha n \pm \cos 2\beta n} \{ m [\operatorname{sh} \alpha (2n - 1) \sin \beta \pm \right. \\ \left. \pm \operatorname{sh} \alpha \sin \beta (2n - 1)] + 2u [\operatorname{ch} \alpha (2n - 1) \cos \beta \pm \cos \beta (2n - 1) \operatorname{ch} \alpha] \} \right), \quad (567)$$

где

$$\left. \begin{aligned} m &= 2(v - 2) + c \frac{\pi^2}{4k^2}; \quad u = \sqrt{t - v^2}; \\ v &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \frac{\pi}{k} - c \frac{\pi}{8k} \left( \frac{\pi}{k} - \sin \frac{\pi}{k} \right) \right]; \\ t &= \left( 1 - c \frac{\pi^2}{8k^2} \right) \cos \frac{\pi}{k} + c \frac{\pi}{8k} \sin \frac{\pi}{k}. \end{aligned} \right\} \quad (567a)$$

Из уравнений (567) можно определить значение  $\Psi$  в функции от  $n$ ,  $k$  и  $c$ .

Используя уравнения (567a), легко доказать, что дискриминант  $v^2 - t$  уравнения (557) отрицателен для значений  $k > 1,2$  и  $c > 1,1$ , как это предполагалось при выводе уравнения (558). В практических расчетах значение  $k$  должно быть не меньше 1,3, а  $c$  — не меньше 1,2. Следовательно, формулы, выведенные выше, применимы для всех случаев, встречающихся на практике.

Шведа составил также таблицу 25. При любых заданных значениях  $c$  и  $k$  и для  $2n = 6, 8, 10, 12$  из таблицы можно получить значение  $\Psi$  и тем самым с помощью простой формулы (566) найти требуемую величину жесткости концевых опор  $C_e$ .

Таблица 25 дает возможность определить также значение жесткости в тех случаях, когда все жесткие рамы образующие опоры сжатого пояса, включая и концевые опоры, имеют одинаковую упругую податливость. Это может иметь место в ферме, показанной

<sup>1)</sup> Предполагается, что пояс рассчитывается по отношению к боковому выпучиванию как шарнирно опертый сжатый стержень длиной  $kl$ , где  $l$  является расстоянием между поддерживающими рамами.

Таблица 25. Значения коэффициента  $\Psi$  в уравнении (566)

	$k$	$c$							
		1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$2n = 6$	1,2	1,00	0,78	0,65					
	1,3	1,25	0,93	0,75					
	1,4	1,41	1,04	0,84					
	1,5	1,39	1,06	0,87					
	1,6	1,35	1,10	0,94	0,82				
	1,7	1,65	1,30	1,09	0,94				
	1,8	2,01	1,54	1,25	1,06	0,94			
	1,9	2,41	1,77	1,40	1,18	1,03	0,90		
	2,0	2,79	1,97	1,55	1,29	1,11	0,97	0,85	
	2,1	2,98	2,12	1,64	1,36	1,17	1,02	0,90	
	2,2	2,93	2,10	1,66	1,38	1,19	1,04	0,94	
	2,3	2,69	1,97	1,60	1,35	1,17	1,04	0,94	0,85
	2,4	2,27	1,76	1,48	1,27	1,12	1,00	0,91	0,83
	2,5	1,99	1,71	1,48	1,32	1,17	1,06	0,96	0,89
$2n = 8$	1,2	0,93	0,74	0,62					
	1,3	1,12	0,86	0,71					
	1,4	1,27	0,96	0,80					
	1,5	1,32	1,01	0,85					
	1,6	1,42	1,12	0,94	0,81				
	1,7	1,69	1,28	1,06	0,90				
	1,8	1,96	1,44	1,17	0,99	0,87			
	1,9	2,07	1,54	1,24	1,06	0,92			
	2,0	2,04	1,54	1,26	1,08	0,95	0,85		
	2,1	1,85	1,47	1,25	1,08	0,96	0,87		
	2,2	2,08	1,66	1,39	1,20	1,05	0,94	0,85	
	2,3	2,43	1,89	1,55	1,32	1,16	1,03	0,92	
	2,4	2,83	2,13	1,73	1,46	1,26	1,11	1,00	0,90
	2,5	3,25	2,37	1,90	1,58	1,36	1,20	1,07	0,97
$2n = 10$	1,2	0,99	0,75	0,63					
	1,3	1,06	0,83	0,70					
	1,4	1,21	0,93	0,78					
	1,5	1,26	1,00	0,84					
	1,6	1,43	1,11	0,93	0,81				
	1,7	1,64	1,24	1,03	0,88				
	1,8	1,74	1,32	1,09	0,94	0,83			
	1,9	1,72	1,34	1,13	0,98	0,87			
	2,0	1,85	1,46	1,22	1,05	0,93	0,83		
	2,1	2,14	1,63	1,34	1,14	1,00	0,89		
	2,2	2,42	1,80	1,45	1,23	1,07	0,95	0,86	
	2,3	2,66	1,92	1,55	1,34	1,14	1,01	0,91	
	2,4	2,74	1,99	1,61	1,36	1,18	1,05	0,94	0,86
	2,5	2,65	2,00	1,63	1,39	1,21	1,08	0,97	0,89

Продолжение

	$k$	$c$							
		1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$2n = 12$	1,2	0,97	0,74	0,62					
	1,3	1,06	0,82	0,69					
	1,4	1,17	0,92	0,77					
	1,5	1,25	0,99	0,84					
	1,6	1,41	1,10	0,93	0,80				
	1,7	1,54	1,19	1,00	0,87				
	1,8	1,60	1,26	1,06	0,92	0,82			
	1,9	1,73	1,35	1,12	0,98	0,87			
	2,0	1,96	1,49	1,22	1,05	0,93	0,83		
	2,1	2,12	1,60	1,30	1,12	0,99	0,88		
	2,2	2,17	1,65	1,37	1,17	1,03	0,92	0,84	
	2,3	2,12	1,66	1,40	1,20	1,06	0,95	0,87	
	2,4	2,28	1,78	1,48	1,27	1,12	1,00	0,91	0,82
	2,5	2,57	1,94	1,60	1,36	1,19	1,06	0,96	0,87

на рис. 151, а. В этих случаях  $P_d = 0$ , а  $\Psi = 1$ , и значение  $c$  можно определить из таблицы 25. Способ вычисления очень прост. На основе расчетных данных пояса в первую очередь определяется значение  $k$ . По данному значению  $k$  находим из таблицы значение  $c$ , соответствующее столбцу, где имеется значение  $\Psi = 1$ . В результате для жесткости найдем следующее выражение:

$$C = cC_E = c \frac{\pi^2 \nu P}{4kl^2}. \quad (568)$$

В большинстве случаев получаются два значения  $c$ , соответствующих значениям  $\Psi$ , составляющих величину несколько меньше и больше единицы. Действительное значение  $c$  можно найти линейной интерполяцией.

### 83. Устойчивость поясов при переменных сжимающих силах, пролетах, моментах инерции и жесткостях опор

В этом параграфе изложен практический метод решения задачи об упруго опертых стержнях при общих условиях нагружения, жесткости стержня и упругих жесткостей опор. В § 80 рассматривалось обычное решение задачи, приводящее к системе однородных линейных уравнений, но сложность вычислительных работ для каждого отдельного случая делает этот метод неприменимым для практических расчетов. Очевидным также является тот факт, что ввиду существующего разнообразия всевозможных случаев нельзя заранее составить расчетные формулы или таблицы, или кривые с учетом различных расчетных характеристик, даже если было бы

возможно численно рассчитать весьма сложное условие устойчивости, полученное с помощью вышеизложенного метода. Следовательно, нашей задачей является разработка метода, достаточно точного для того, чтобы удовлетворить требованиям конструктора, и вместе с тем достаточно простого для того, чтобы в каждом отдельном случае процесс вычисления производился в пределах разумного.

Детально исследованный в главе II метод Ритца позволяет решить поставленную задачу. В данном параграфе приведен метод расчета, учитывающий переменность величин  $P$ ,  $J$ ,  $l$  и  $C$ , при помощи которого можно без большого труда<sup>1)</sup> определить требуемые значения жесткостей.

Рассмотрим стержень длиной  $L$ , шарнирно соединенный с жесткими опорами на обоих концах (рис. 153)<sup>2)</sup>. Переменный момент инерции обозначим через  $J_x$ , переменную осевую силу в момент

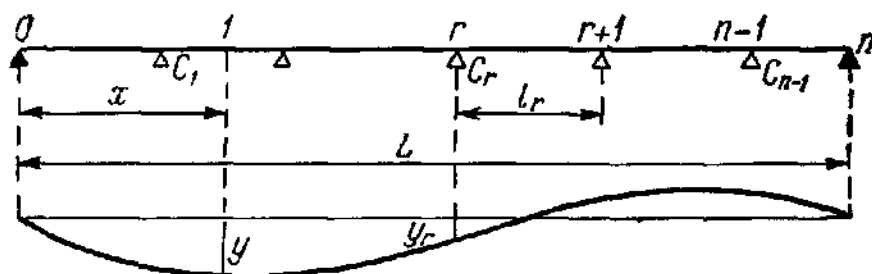


Рис. 153.

выпучивания — через  $P_x$ , а значения жесткостей опор — через  $C_1$ ,  $C_2$ , ...,  $C_{n-1}$ . Выражение для потенциальной энергии системы будет

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L D_x y''^2 dx + \frac{\mu}{2} \sum_{r=1}^{n-1} C_r y_r^2 - \frac{1}{2} \int_0^L P_x y'^2 dx, \quad (569)$$

где  $D_x = E_t J_x$ . Первые два члена правой части уравнения выражают энергию деформации, накопленную в стержне и в опорах. Предполагается, что значения  $D_x$  и  $P_x$  численно даны в функции от  $x$  и что значения всех жесткостей опор  $C_r$  известны. Величина  $P_x$  представляет собой расчетную силу, умноженную на коэффициент безопасности  $\gamma$ .

Коэффициент  $\mu$  является свободным параметром, принимаемым за неизвестное в задаче устойчивости. В случае, если  $\mu$  равно или меньше единицы, величины предполагаемых жесткостей опор, выраженные через жесткости  $C_r$ , достаточны для обеспечения устойчивости пояса. При  $\mu > 1$  опоры становятся очень гибкими, в связи

<sup>1)</sup> Bleich F., Bleich H., Beitrag zur Stabilitätsuntersuchung des punktweise elastisch gestützten Stabes, Der Stahlbau, т. 18, стр. 17, 1917.

<sup>2)</sup> В оригинале рассматриваются также случаи свободных или упруго заделанных концов.

с чем необходимо увеличить моменты инерции элементов пояса или жесткость опор.

Используя метод Ритца, аппроксимируем прогиб  $y$  рядом

$$y = \sum_{i=1}^p a_i \varphi_i, \quad (570)$$

где  $\varphi_i$  представляют собой так называемые координатные функции. Вводя это выражение в уравнение (569), можно определить значения параметра  $\mu$  из следующих условий:

$$\frac{\partial U}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p). \quad (571)$$

Основная особенность описываемого ниже метода заключается в использовании координатных функций, которые являются характеристическими функциями вспомогательной задачи о минимуме, в решении которой учитывается фактор переменности  $D_x$  и  $P_x$ , имеющийся в основной задаче. С этой целью рассмотрим характеристические решения задачи о минимуме, определенной следующим интегралом:

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \int_0^L D_x \varphi''^2 dx - \frac{1}{2} \lambda \int_0^L P_x \varphi'^2 dx, \quad (572)$$

предполагая, что граничные условия вспомогательных задач те же, что и в основной задаче. Применяя теорему о стационарном значении потенциальной энергии<sup>1)</sup>, из условий  $\delta \bar{U} = 0$  в результате варьирования получим дифференциальное уравнение задачи о выпучивании прямого стержня с переменной осевой силой  $P_x$  и переменной жесткостью  $J_x$ , а именно:

$$(D_x \varphi'')'' + \lambda (P_x \varphi')' = 0. \quad (573)$$

Предполагаем, что характеристические значения  $\lambda_i$  и характеристические функции  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) дифференциального уравнения (573) известны. Они образуют полную систему ортогональных функций и служат координатными функциями  $\varphi_i$  для приближенного решения (570) данной задачи. По сравнению с любой другой системой координатных функций, которую можно было бы выбрать для приближенного решения задачи, эта система имеет то преимущество, что условия ортогональности функций  $\varphi_i$  существенно упрощают следующие затем аналитические выкладки.

Условиями ортогональности, вытекающими из уравнения (573), являются

$$\int_0^L P_x \varphi'_i \varphi'_k dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^L D_x \varphi''_i \varphi''_k dx = 0, \quad \text{если} \quad i \neq k. \quad (574)$$

<sup>1)</sup> См. § 23.



Кроме того, имеется следующее соотношение:

$$\int_0^L D_{\varphi_i''^2} dx - \lambda_i \int_0^L P_{\varphi_i'^2} dx = 0, \quad (575)$$

которое также является важным для последующего исследования <sup>1)</sup>.

Вернемся к данной рассматриваемой задаче. Вводя ряд (570) в выражение энергии (569), получим:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L D_{\varphi} \left( \sum a_i \varphi_i'' \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L P_{\varphi} \left( \sum_{i=1}^p a_i \varphi_i' \right)^2 dx + \\ + \frac{\mu}{2} \sum_{r=1}^{n-1} C_r \left( \sum_{i=1}^p a_i \varphi_{ir} \right)^2, \quad (576)$$

где  $\varphi_{ir}$  определяет значение  $\varphi_i$  в опоре  $r$ .

Возведя в квадрат заключенные в скобках выражения в выше-написанном уравнении, получим:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p a_i^2 \left[ \int_0^L D_{\varphi_i''^2} dx - \int_0^L P_{\varphi_i'^2} dx + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j \sum_{r=1}^{n-1} C_r \varphi_{ir} \varphi_{jr} \right]. \quad (577)$$

Заметим, что вследствие условий ортогональности (574) смешанные произведения в первых двух членах правой части уравнения (576) исчезают. На основе уравнения (575) можно написать:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p a_i^2 \left[ \int_0^L D_{\varphi_i''^2} dx - \lambda_i \int_0^L P_{\varphi_i'^2} dx \right] = 0;$$

затем, вычитая это выражение из уравнения (577), получим:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p a_i^2 (\lambda_i - 1) \int_0^L P_{\varphi_i'^2} dx + \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j \sum_{r=1}^{n-1} C_r \varphi_{ir} \varphi_{jr}. \quad (578)$$

<sup>1)</sup> Уравнения (574) и (575) можно получить из уравнения (573) способом, аналогичным способу составления уравнения (75) в § 22.

В результате введения обозначений

$$N_i = (\lambda_i - 1) \int_0^L P_x \varphi_i'^2 dx, \quad (579a)$$

$$\alpha_{ij} = \sum_{r=1}^{n-1} C_r \varphi_{ir} \varphi_{jr} \quad (579b)$$

выражение для  $U$  принимает следующий вид:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p a_i^2 N_i + \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j \alpha_{ij}. \quad (580)$$

Значения коэффициентов  $\alpha_{ij}$  можно получить, умножая ординаты кривой  $\varphi_i$  в точках 1, 2, 3, ...,  $r-1$  на соответствующие ординаты кривой  $\varphi_j$ , затем на соответствующее значение  $C_r$  и, наконец, сложив полученные результаты. Коэффициенты являются симметричными  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ .

В результате из условий устойчивости [уравнения (571)] получим  $p$  линейных уравнений, из которых можно определить значения коэффициентов  $a_i$ , а именно:

$$\left. \begin{aligned} \left( \alpha_{11} + \frac{N_1}{\mu} \right) a_1 + \alpha_{12} a_2 + \alpha_{13} a_3 + \dots &= 0; \\ \alpha_{21} a_1 + \left( \alpha_{22} + \frac{N_2}{\mu} \right) a_2 + \alpha_{23} a_3 + \dots &= 0; \\ \alpha_{31} a_1 + \alpha_{32} a_2 + \left( \alpha_{33} + \frac{N_3}{\mu} \right) a_3 + \dots &= 0; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (581)$$

Детерминант  $\Delta$ , составленный из коэффициентов этой системы уравнений, должен равняться нулю при условии, если существуют значения коэффициентов  $a_i$ , отличные от нуля. Это условие ( $\Delta = 0$ ) дает уравнение  $p$ -й степени относительно  $\mu$ , и наибольший корень  $\mu$  этого уравнения определяет критическое значение  $\mu_{кр}$ . При нагрузках  $P_x$  система устойчива, если величина  $\mu_{кр}$  равна или меньше единицы.

В большинстве случаев использование двухчленного или трехчленного ряда (570) обеспечивает получение достаточно точного значения  $\mu_{кр}$ ; таким образом, детерминант уравнения (581) приводится к детерминанту второго или третьего порядка, который легко вычислить. Однако в связи с тем, что упруго опертый в  $n+1$  точках стержень может выпучиваться по 1, 2, ...,  $n$  полуволнам, не существует способа подбора подходящих функций  $\varphi$  из бесконечного числа характеристических функций, полученных на основе решения вспомогательной задачи. Для того чтобы установить форму

кривой прогибов, целесообразно найти длину  $v$  полуволны на основе формулы Энгессера (518):

$$v = \pi \sqrt[4]{\frac{D_{\text{ср}} I}{C}},$$

применяя это уравнение для средней точки и к сечениям, расположенным на расстоянии одной четверти пролета от каждой из опор. Таким образом, возникает возможность определить число полуволн действительной кривой прогибов и соответственно подобрать группу последовательных координатных функций  $\varphi_i$  так, чтобы их комбинация давала кривую с желаемым числом полуволн. В случаях, когда конструкция симметрична и силы  $P_x$  распределены симметрично, формы выпучивания являются или симметричными, или антисимметричными. Тогда достаточно использовать комбинацию соответственно двух или трех последовательных симметричных или антисимметричных форм выпучивания, чтобы определить критическое значение  $\mu$  с приемлемой точностью. Однако, для того чтобы получить максимальное значение  $\mu$ , часто возникает необходимость применить две последовательности, например  $\varphi_3, \varphi_5$  и  $\varphi_5, \varphi_7$ , соответствующие симметричной форме выпучивания, а также последовательность  $\varphi_2, \varphi_4$  и  $\varphi_4, \varphi_6$  для получения максимального значения  $\mu$ , соответствующего антисимметричной форме выпучивания.

Изложенный метод особенно удобен в тех случаях, когда формы выпучивания вспомогательной задачи заведомо известны, когда, например,  $J_x$  и  $P_x$  являются постоянными или могут рассматриваться постоянными, а значения жесткостей пружин  $C_r$  значительно меняются вдоль стержня. Пример подобного случая показан на рис. 154, *a* и *b*. Упругие опоры, образованные поперечными рамами в плоскостях вертикальных элементов, значительно изменяются в зависимости от длины вертикальных элементов. Упруго опертый, полигональной формы пояс можно без большой ошибки заменить прямым поясом, лежащим на опорах, имеющих значения жесткостей пружин  $C_r$ , равные жесткостям пружин данной мостовой системы. Влияние изменения  $C_r$  на значение  $\mu$  является таким значительным, что становится возможным пренебречь изменением силы  $P_x$  или момента инерции  $J_x$ .

В случаях, когда учитываются изменения силы  $P_x$  и момента инерции  $J_x$ , необходимо определить формы выпучивания двухшарнирного сжатого стержня длиной  $L$  с переменным моментом инерции  $J_x$  и осевой нагрузкой  $P_x$ . Используя метод Ритца, можно без особого труда получить решение вспомогательной задачи, т. е. определить число форм выпучивания и соответствующие характеристические

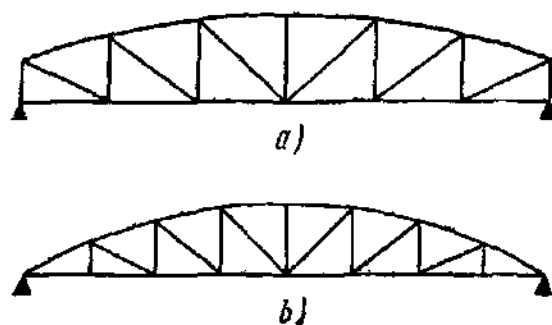


Рис. 154.

значения  $\lambda$ . Эти приближенные решения вспомогательной задачи, полученные методом Ритца, строго удовлетворяют также условиям ортогональности, которые играют весьма существенную роль в разработке метода, описанного в этом параграфе.

#### 84. Влияние кручения на устойчивость сжатых поясов открытых пролетных строений

В предыдущих параграфах при исследовании устойчивости упруго опертых стержней действительная форма поперечного сечения не принималась во внимание; выдвигалось лишь предположение о том, что стержень имеет изгибную жесткость  $EJ$ , которая наряду с упругими жесткостями эпюр определяла критическую силу сжатого стержня. Однако в большинстве случаев пояс имеет открытое тонкостенное поперечное сечение только с одной осью симметрии и, следовательно, в состоянии выпучивания изгиб будет сопровождаться кручением. Таким образом, задача об упруго опертом стержне сводится к задаче о выпучивании вследствие кручения и изгиба. В главе III было показано, что действительное значение критической силы сжатых стержней с поперечными сечениями рассмотренного вида может быть меньше значения критической силы, данного обобщенной формулой Эйлера. С другой стороны, жесткое соединение между поясом и поддерживающей конструкцией противодействует кручению пояса. Следовательно, необходимо исследовать влияние, которое может оказывать явление кручения на критическую силу поясов открытых пролетных строений. Для того чтобы выяснить взаимодействие между

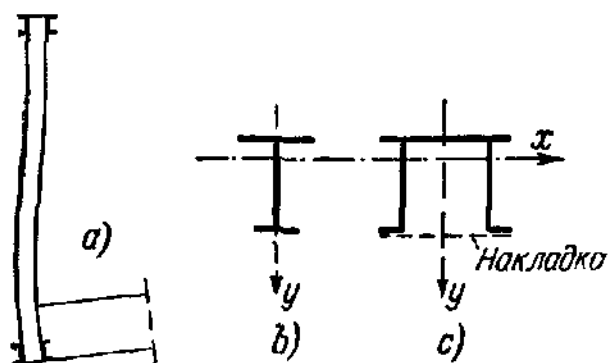


Рис. 155.

поясом и опорами и оценить влияние жесткого соединения элементов пояса и концов вертикальных элементов (рис. 155, а), распространим исследование на случай, когда поддерживающая конструкция сопротивляется горизонтальным перемещениям пояса, а также вращению относительно его продольной оси.

Цель следующего исследования состоит не в разработке более или менее точного практического метода, а лишь в выяснении характера влияния кручения поперечных сечений на устойчивость в тех случаях, когда крутильная жесткость поперечного сечения мала. Для достижения этого упростим исследование, предположив, что реакции опор можно заменить равномерно распределенной реакцией так, как это делалось при выводе формулы Энгессера. Рассмотрим стержень длиной  $L = nl$  ( $l$  — расстояние между опорами) с постоянной изгибной и крутильной жесткостью, непрерывно заземленный против

бокового перемещения и вращения и опертый по концам на жесткие опоры. На стержень действует постоянная сжимающая сила  $P$ . Кроме того, предположим, что поперечное сечение стержня имеет одну ось симметрии и форму, обычно употребляемую в мостовых конструкциях, как это показано на рис. 155,  $b$  и  $c$ . Ось  $y$  является осью симметрии. Из теоремы о стационарном значении потенциальной энергии имеем:

$$U = V + U_w = \text{стационарному значению}, \quad (582)$$

где  $U$  представляет собой полную потенциальную энергию;  $V$  — изменение упругого потенциала всей системы, т. е. стержня и поддерживающей конструкции, тогда, когда система переходит из устойчивого к неустойчивому положению равновесия, а  $U_w$  — изменение потенциальной энергии внешних сил в переходном состоянии. Значение  $V$  состоит из двух частей  $V_1$  и  $V_2$ :  $V_1$  представляет собой энергию деформации, накопленную в изогнутом и закрученном стержне,  $V_2$  — упругую энергию изогнутой поддерживающей конструкции. Значение  $V_1$  дается уравнением (235) главы III, т. е. уравнением

$$V_1 = \frac{\tau}{2} \int_0^L (EJ_y u''^2 + EJ_x v''^2 + + E\Gamma \beta'^2 + GK \beta'^2) dz,$$

где величины  $u$ ,  $v$  обозначают перемещения центра сдвига соответственно в направлениях  $x$  и  $y$ ;  $\beta$  — вращение поперечного сечения;  $J_x$  и  $J_y$  — моменты инерции относительно осей  $x$  и  $y$ , проходящих через центр тяжести;  $GK$  — крутильную жесткость;  $\Gamma$  — геометрическую постоянную поперечного сечения, определенную в § 38 главы III. Сжатый стержень с поперечным сечением, имеющим одну ось симметрии, может выпучиваться в направлении этой оси без кручения или в перпендикулярном к этой оси направлении вследствие кручения и изгиба. В последнем случае, который является весьма интересным, искривление определяется только перемещением  $u$  и вращением  $\beta$ , и следовательно, в выражении для  $V_1$  можно опустить член, зависящий от  $v$ , и написать:

$$V_1 = \frac{\tau}{2} \int_0^L (EJ_y u''^2 + E\Gamma \beta'^2 + GK \beta'^2) dz. \quad (583)$$

Для того чтобы вывести выражение для энергии деформации  $V_2$ , рассмотрим жесткую раму, показанную на рис. 156, состоящую

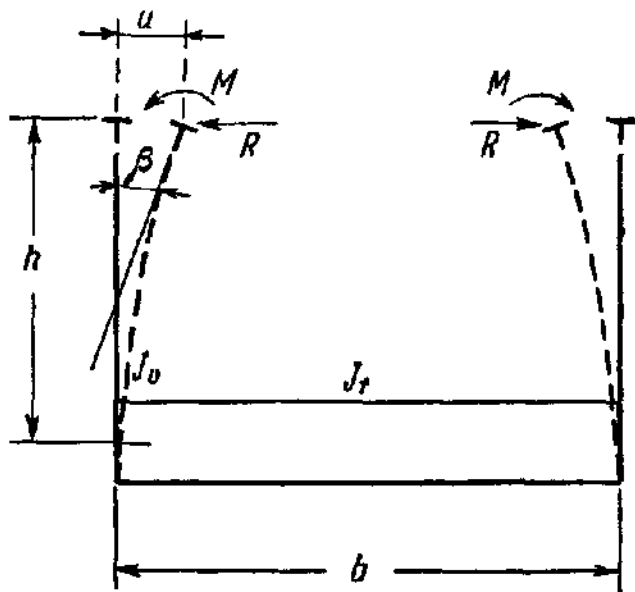


Рис. 156.

из нижней балки и двух вертикальных элементов соответственно с моментами инерции  $J_f$  и  $J_v$ . В связи с тем, что пояс предполагается жестко соединенным с концами вертикальных элементов, на него будут действовать горизонтальная сила  $R$  и момент  $M$ . Реакции  $R$  и  $M$ , действующие на раму в противоположном направлении, вызывают прогиб  $u$  и вращение  $\beta$  верхнего конца вертикальных элементов. Обращаясь к рис. 157, определим

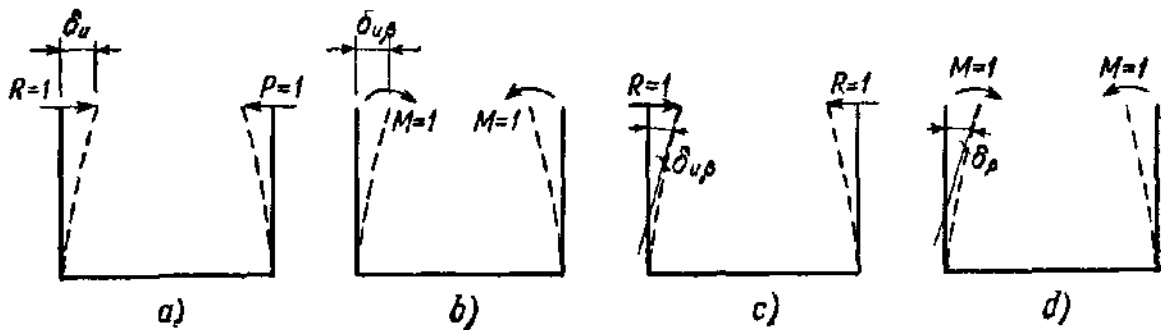


Рис. 157.

следующие перемещения и вращения верхних концов вертикальных элементов:

- $\delta_u$  — горизонтальное перемещение, вызванное силой  $R=1$ , приложенной в верхних концах обоих вертикальных элементов (рис. 157, a);
- $\delta_{u\beta} = \delta_{\beta u}$  — соответственно горизонтальное перемещение, вызванное моментом  $M=1$  (рис. 157, b), и вращение, вызванное силой  $R=1$  (рис. 157, c);
- $\delta_\beta$  — вращение, вызванное моментом  $M=1$  (рис. 157, d).

Эти перемещения и вращения выражаются следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \delta_u &= \frac{h^3}{3EJ_v} + \frac{h^2b}{2EJ_f}; \\ \delta_\beta &= \frac{h}{EJ_v} + \frac{b}{2EJ_f}; \\ \delta_{u\beta} = \delta_{\beta u} &= \frac{h^2}{2EJ_v} + \frac{bh}{2EJ_f}. \end{aligned} \right\} \quad (584)$$

Энергия деформации  $\bar{V}_2$ , накопленная в одной жесткой раме, равна работе, проделанной реакциями  $R$  и  $M$ . Следовательно, имеем:

$$\bar{V}_2 = \frac{1}{2} (Ru + M\beta). \quad (585)$$

Согласно данным выше определениям  $\delta_u$ ,  $\delta_\beta$ ,  $\delta_{u\beta}$ ,  $\delta_{\beta u}$ , можно написать:

$$u = R\delta_u + M\delta_{u\beta}; \quad \beta = R\delta_{\beta u} + M\delta_\beta.$$

Решая эти уравнения относительно  $R$  и  $M$ , получим следующие соотношения:

$$R = \frac{u\delta_\beta - \beta\delta_{u\beta}}{\delta_u\delta_\beta - \delta_{u\beta}^2}; \quad M = \frac{\beta\delta_u - u\delta_{u\beta}}{\delta_u\delta_\beta - \delta_{u\beta}^2}.$$

Таким образом, из уравнения (585) получаем следующее выражение для полной энергии деформации  $V_2$  при том условии, что реакции  $R$  и  $M$  равномерно распределены по всей длине  $l$  жестких рам:

$$V_2 = \frac{1}{2l} \int_0^L (C_1 u^2 - 2C_2 u\beta + C_3 \beta^2) dz. \quad (586)$$

Коэффициенты  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  определяются при помощи соотношений:

$$C_1 = \frac{\delta_\beta}{\delta_u\delta_\beta - \delta_{u\beta}^2}; \quad C_2 = \frac{\delta_{u\beta}}{\delta_u\delta_\beta - \delta_{u\beta}^2}; \quad C_3 = \frac{\delta_u}{\delta_u\delta_\beta - \delta_{u\beta}^2}. \quad (587)$$

На основе уравнения (584) эти соотношения выражают упругое поведение поддерживающей жесткой рамы.

Если предположить, что стержень центрально нагружен осевой силой  $P$ , то уравнение (242) в главе III выражает изменение  $U_w$  потенциальной энергии внешних сил. Для значений  $v=0$  и  $P=As$  это уравнение принимает следующий вид:

$$U_w = \frac{P}{2} \int_0^L \left( u'^2 + 2y_0 u' \beta' + \frac{J_p}{A} \beta'^2 \right) dz, \quad (588)$$

где  $y_0$  обозначает расстояние центра сдвига от центра тяжести рассмотренного поперечного сечения, а  $J_p$  — полярный момент инерции поперечного сечения относительно центра сдвига.

Полная потенциальная энергия  $U$  равна сумме составляющих ее частей [уравнения (583), (586) и (588)], и на основе условия (582) найдем:

$$\begin{aligned} \delta U = \delta(V + U_w) = & \delta \left[ \frac{\tau}{2} \int_0^L (E J_y u''^2 + E \Gamma \beta''^2 + G K \beta'^2) dz + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2l} \int_0^L (C_1 u^2 - 2C_2 u\beta + C_3 \beta^2) dz - \frac{P}{2} \int_0^L \left( u'^2 + 2y_0 u' \beta' + \frac{J_p}{A} \beta'^2 \right) dz \right]. \end{aligned} \quad (589)$$

Согласно правилам вариационного исчисления получим следующие два уравнения Эйлера <sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \tau u^{IV} + Pu'' + Py_0 \beta'' + \frac{C_1}{l} u - \frac{C_2}{l} \beta &= 0; \\ Py_0 u'' + E\Gamma \tau \beta^{IV} + \left( P \frac{J_p}{A} - GK\tau \right) \beta'' - \frac{C_2}{l} u + \frac{C_3}{l} \beta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (590)$$

При вышеупомянутых граничных условиях решения  $u$  и  $\beta$  этих двух однородных дифференциальных уравнений принимают следующий вид:

$$u = A_1 \sin \frac{l\pi z}{L}; \quad \beta = A_2 \sin \frac{l\pi z}{L}, \quad (591)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — постоянные величины, а  $l = 1, 2, \dots$ . Вводя эти выражения в уравнения (590), получим два линейных уравнения относительно постоянных  $A_1$  и  $A_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{l^4 \pi^4}{L^4} EJ_y \tau - P \frac{l^2 \pi^2}{L^2} + \frac{C_1}{l} \right) A_1 - \left( \frac{l^2 \pi^2}{L^2} Py_0 + \frac{C_2}{l} \right) A_2 &= 0; \\ - \left( \frac{l^2 \pi^2}{L^2} Py_0 + \frac{C_2}{l} \right) A_1 + \\ + \left[ \frac{l^4 \pi^4}{L^4} E\Gamma \tau - \frac{l^2 \pi^2}{L^2} \left( P \frac{J_p}{A} - GK\tau \right) + \frac{C_3}{l} \right] A_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (592)$$

Конечные решения  $A_1$  и  $A_2$  существуют только в том случае, если детерминант  $\Delta$ , составленный из коэффициентов этой системы уравнений, равен нулю. Следовательно, условие  $\Delta = 0$  определяет критическое состояние, на основе которого можно вывести значение критической силы  $P_{кр}$  или любого параметра, определяющего жесткость поддерживающих жестких рам.

Введем следующие обозначения:

$$P_i = l^2 \frac{\pi^2 EJ_y \tau}{L^2}; \quad \mu_i = \frac{C_1}{l} \frac{L^2}{l^2 \pi^2} \frac{1}{P_i}, \quad (593)$$

где величина  $\tau$  зависит от  $\sigma_{кр} = P_{кр}/A$ . В результате деления всех членов на  $l^2 \pi^2 P_i / L^2$  условие устойчивости принимает следующий вид:

$$\left| \begin{array}{cc} 1 - \frac{P_{кр}}{P_i} + \mu_i & - \frac{P_{кр}}{P_i} y_0 - \frac{C_2}{C_1} \mu_i \\ - \frac{P_{кр}}{P_i} y_0 - \frac{C_2}{C_1} \mu_i & \frac{\Gamma}{J_y} - \frac{P_{кр}}{P_i} \frac{J_p}{A} + \frac{L^2}{l^2 \pi^2} \frac{GK}{EJ_y} + \frac{C_3}{C_1} \mu_i \end{array} \right| = 0. \quad (594)$$

В этом уравнении  $P$  заменено значением  $P_{кр}$  критической силы  $P_{кр} = \nu P$ , где  $P$  представляет собой расчетную нагрузку, а  $\nu$  — коэффициент безопасности. Уравнение (594) позволяет определить зна-

<sup>1)</sup> См. § 31 в главе II.



чения критической силы  $P_{кр}$  или значения параметра  $\mu_i$ , выражающие величины жесткости поддерживающих жестких рам. Более целесообразно принимать  $\mu_i$  за неизвестное; тогда, раскрывая детерминант (594), получим:

$$\left[ \frac{C_3}{C_1} - \left( \frac{C_2}{C_1} \right)^2 \right] \mu_i^2 - \left[ \left( \frac{P_{кр}}{P_i} - 1 \right) \frac{C_3}{C_1} - Z + \frac{2P_{кр}y_0}{P_i} \frac{C_2}{C_1} \right] \mu_i - \left( \frac{P_{кр}}{P_i} - 1 \right) Z - \left( \frac{P_{кр}}{P_i} \right)^2 y_0^2 = 0, \quad (595)$$

где

$$Z = \frac{\Gamma}{J_y} - \frac{P_{кр}}{P_i} \frac{J_p}{A} + \frac{L^2}{l^2 \pi^2} \frac{GK}{EJ_y}. \quad (596)$$

Полагая последовательно  $l = 1, 2, 3, \dots$  где  $l$  обозначает число полуволн формы выпучивания, получим из уравнения (595) ряд значений параметра  $\mu_i$ . Вводя эти значения  $\mu_i$  в уравнения (593), получим ряд значений  $C_1$ , наибольшее из которых определяет требуемое значение жесткости упругих опор. При помощи уравнений (584) и (587) требуемое значение момента инерции  $J_y$  поддерживающих вертикальных элементов можно рассчитать при условии, если момент инерции  $J_f$  нижней балки рассматривается как заданная расчетная величина конструкции.

Из уравнения (595) можно также определить значение  $\mu_i$  в случае, когда вертикальные элементы не передают поясу никаких моментов; это предположение лежит в основе исследований предыдущих параграфов. В связи с тем, что жесткости пружин  $C_2$  и  $C_3$  равны нулю, для значения  $\mu_i$  имеем следующую формулу:

$$\mu_i = \left( \frac{P_{кр}}{P_i} - 1 \right) + \left( \frac{P_{кр}}{P_i} \right)^2 \frac{y_0^2}{Z}.$$

Выражая в соответствии с уравнениями (593)  $\mu_i$  через  $C_1$ , получим:

$$C_1 = \frac{l^2 \pi^2 l}{L^2} \left[ (P_{кр} - P_i) + P_i \left( \frac{P_{кр}}{P_i} \right)^2 \frac{y_0^2}{Z} \right], \quad (597)$$

где необходимо подобрать такое значение  $l = 1, 2, \dots$ , при котором величина  $C_1$  становится максимальной.

Когда пояс имеет две оси симметрии, центр сдвига совпадает с центром тяжести ( $y_0 = 0$ ), а уравнение (597) принимает следующий вид:

$$C_1 = \frac{l^2 \pi^2 l}{L^2} (P_{кр} - P_i). \quad (598)$$

Второй член в уравнении (597) определяет влияние кручения, которое всегда происходит, если поперечное сечение имеет только одну ось симметрии. Из того факта, что величины  $y_0^2$  и  $Z$  являются положительными, следует, что требуемое значение жесткости

пружины  $C_1$  больше для сечений, имеющих одну ось симметрии, чем для сечений с двумя осями симметрии.

Сравнительные вычисления показывают, что влияние кручения является значительным для открытых сечений пояса, приведенного на рис. 155, *b*, особенно при выпучивании в неупругой области. Пренебрежение этим влиянием привело бы к созданию небезопасной конструкции жестких рам, предназначенных для противодействия боковому выпучиванию пояса. Однако тенденция пояса закручиваться существенно уменьшается при условии, когда пояса жестко прикреплены к верхним концам вертикальных элементов, как это обычно имеет место в правильно спроектированной конструкции моста. Сопоставление результатов, полученных на основе уравнения (595), в котором учитывается влияние кручения, так же как влияние жесткого соединения между поясом и поддерживающими элементами, с результатами, вычисленными по уравнению (597), показывает, что нежелательное влияние кручения до некоторой степени компенсируется вышеупомянутыми связями. Тем не менее, числовые расчеты показывают, что уравнение (595) всегда дает значения жесткости пружины, которые являются на 10—20% выше значений, полученных на основе уравнения (598); последнее уравнение дает значение жесткости пружины при условии, когда пояс рассматривается как упруго заделанный, только по отношению к боковым перемещениям.

Верхние пояса, имеющие коробчатые сечения типа, показанного на рис. 155, *c*, обнаруживают совершенно другие свойства. Вследствие большой крутильной жесткости сечения этого типа можно пренебречь закручиванием пояса; тогда жесткое соединение поясов с верхними концами вертикальных элементов существенно уменьшит искривление рам при изгибе поясов. В результате значение требуемой изгибной жесткости вертикальных элементов становится значительно меньше, чем значение, вычисленное на основе метода, который не учитывает значения жесткого соединения поясов с поддерживающими рамами.

В заключение подведем итоги исследованиям, сделанным в данном параграфе. Обычные методы вычисления необходимой величины жесткости поддерживающих пояса жестких рам открытых пролетных строений завышают значение несущей способности пояса для открытых сечений, но весьма недооценивают ее значение для закрытых коробчатых сечений.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Chwalla E., Die Seitensteifigkeit offener Parallel- und Trapezträgerbrücken, Der Bauingenieur, т. 10, стр. 443, 1929.

Klemperer W. B., Gibbons H. B., Über die Quickfestigkeit eines auf elastischen Zwischenstützen gelagerten Balkens, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. 13, стр. 251, 1933.

Tu Shou-Ngo, Columns with Equal Spaced Elastic Supports, Journ. Aeronaut. Sci., т. 11, стр. 67, 1944.

Lazard A., Flambement en milieu élastique discontinu, Annales des ponts et chaussées, т. 116, стр. 289, 1946.

Ratzersdorfer J., A Buckling Problem. The Case of a Beam Resting on a Continuous Elastic Foundation with Concentrated Elastic End Supports, Aircraft Eng., т. 18, 1946.

Lazard A., Compte rendu d'essais sur la flambage d'une tige posée sur supports élastiques équidistants, Annales de l'institut technique du bâtiment et des travaux publics, 88, 1949.

Schibler W., Stabilität der Druckgurte offener Brücken unter Berücksichtigung der Plastizität der Querträger, Pubs. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., т. 9, стр. 452, 1949.

---

## ГЛАВА IX

### МЕСТНОЕ ВЫПУЧИВАНИЕ ПЛАСТИНЧАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

#### 85. Введение

В предыдущих главах, исследуя условия неустойчивости сжатых стержней, мы рассматривали стержень в целом, т. е. как призматический брус, имеющий изгибную и крутильную жесткости, не принимая во внимание возможности любого изменения в форме поперечного сечения, а также его влияния на несущую способность сжатого стержня. Однако, как правило, сжатые элементы металлических конструкций состоят из пластинчатых элементов. Следовательно, возможно, что даже до появления состояния неустойчивости в рассмотренном до сих пор типе сжатого стержня, который теряет устойчивость в целом (первоначальное выпучивание), пластинки, составляющие стержень, потеряют местную устойчивость, что вызывает внезапное разрушение всего сжатого стержня, характеризующееся искривлением поперечного сечения. Следовательно, при расчете сжатых стержней необходимо учитывать явление устойчивости пластинчатых элементов. Однако нет необходимости в каждом отдельном случае проводить детальное исследование условия появления местного выпучивания. Нижеизложенная теория имеет двойную цель: привести, во-первых, основные законы, определяющие поведение сжатых пластинок при различных условиях заделки, которым подвержены пластинчатые элементы сжатых стержней, и, во-вторых, создать основу для установления надежных правил, определяющих для практических целей требуемую толщину пластинок.

Местное выпучивание пластинчатых элементов сжатых стержней представляет собой только частный случай неустойчивости пластин. При проектировании металлических конструкций возникает большое количество вопросов, касающихся неустойчивости пластин в условиях нагружения, отличных от тех, которые имеют место в строительных элементах, находящихся под действием сжимающей нагрузки. Тонкие стенки балок сплошного сечения могут стать неустойчивыми под одновременным действием продольных и касательных напряжений. Поскольку корабли, по существу, состоят из пластин, находя-

шихся под действием различных условий нагружения, при расчете сжатой обшивки корабля возникают аналогичные случаям расчета сжатых стержней задачи неустойчивости. Однако вследствие специального характера конструкций кораблей и особых условий нагружения, встречающихся при их расчете, возникает ряд особых задач в области устойчивости пластин. Некоторые задачи, связанные с подкрепленными конструкциями типа оболочек, важные при проектировании самолетов, были успешно разрешены исследователями, работающими в этой области, и их работы представляют собой важные этапы на пути к решению задач неустойчивости пластин. Результаты этих исследований имели большое значение для разработки методов расчета обшивки кораблей.

В этой главе исследуются прямоугольные пластины под действием равномерно распределенной на двух противоположных сторонах сжимающей нагрузки; эта задача является главной при расчете центрально сжатых элементов. В последнее время разработанная в этой главе теория приобрела большое значение для расчета пилонов висячих мостов, где возможная местная неустойчивость подкрепленных пластинок под действием краевых сжимающих сил играет решающую роль при определении размеров пластинчатых элементов таких опор. В главе X мы рассмотрим влияние ребер жесткости, подкрепляющих пластины в направлении сжимающих напряжений. Глава XI посвящена исследованию устойчивости стенок сплошных балок, а глава XII — рассмотрению задач устойчивости, встречающихся при расчете обшивки кораблей.

История развития теории устойчивости пластин под действием краевых сжимающих сил восходит к 1891 г., когда Брайан <sup>1)</sup> опубликовал свое исследование о прямоугольной пластине, свободно опертой на всех краях под действием равномерно распределенной на противоположных краях сжимающей нагрузки, расположенной в плоскости пластинки. Брайан был первым ученым, который исследовал задачу устойчивости пластин, а также впервые применил энергетический критерий устойчивости к решению задачи о выпучивании, в чем и состоит важность его классической работы. Позже этот метод оказался мощным средством для исследования тех задач упругой устойчивости, которые вследствие трудностей математического анализа невозможно было бы решить классическими методами.

Спустя более пятнадцати лет задача о выпучивании снова рассматривалась Тимошенко и Рейсснером. Тимошенко <sup>2)</sup> принадлежит

---

<sup>1)</sup> Bryan G. H., On the Stability of a Plane Plate under Thrusts in Its Own Plane with Application on the «Buckling» of the Sides of a Ship, Proc. London Math. Soc., 1891, т. 22, стр. 54.

<sup>2)</sup> Timoshenko S., Einige Stabilitätsprobleme der Elasticitätstheorie, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1910, стр. 337; Sur la stabilité des systèmes élastiques, Annales des ponts et chaussées, 1913, Fasc. III, IV and V. На русском языке впервые в Изв. Политехн. ин-та, Киев, 1907.

заслуга в том, что он наиболее всесторонне рассмотрел задачу о выпучивании прямоугольных пластин, исследуя в ряде работ устойчивость пластин при различных условиях опирания краев, параллельных действующим сжимающим силам, и применяя теорию к исследованию пластинчатых элементов стальных сжатых стержней. Независимо от Тимошенко Рейсснер<sup>1)</sup> в 1909 г. опубликовал решение задачи о прямоугольной пластине с двумя защемленными краями, а также с одним защемленным и одним свободным краем под действием сжимающих краевых сил.

В 1924 г. автор книги<sup>2)</sup> сделал попытку распространить теорию устойчивости плоских пластинок на неупругую область, рассматривая пластинку как анизотропное тело и введя переменный модуль упругости в главное дифференциальное уравнение, на котором основывалось решение, соответствующее упругому выпучиванию.

Рош и Эйхингер<sup>3)</sup>, Бейлард<sup>4)</sup> и Ильюшин<sup>5)</sup> попытались сформулировать рациональную теорию устойчивости пластинок за пределом упругости на базе современных теорий пластичности. Результаты теорий Роша и Эйхингера и Ильюшина не дают точного совпадения с результатами экспериментов. В своей недавно опубликованной статье Бейлард<sup>6)</sup> доказал, что его теория хорошо подтверждает данные опытов Кольбруннера с пластинками, опертыми на всех четырех сторонах. Не так давно Стоуэллу<sup>7)</sup> удалось, используя общие соотношения Ильюшина, разработать рациональную теорию неупругого выпучивания, результаты которой, по-видимому, хорошо соответствуют лабораторным наблюдениям.

Лундкуисту, Стоуэллу и Шютте<sup>8)</sup> принадлежит заслуга в проведении первого детального исследования устойчивости стержневой конструкции, составленной из пластинок; они применили метод распределения моментов к устойчивости таких конструкций. Стоуэлл

1) Reissner H., Über die Knicksicherheit ebener Bleche, Zentralblatt der Bauverwaltung, 1909, стр. 93.

2) Bleich F., Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Julius Springer, Berlin, 1924.

3) Roš M., Eichinger A., Final Rept. 1st Congr., Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., Paris, 1932, стр. 144.

4) Bijlaard P. P., Theory of the Plastic Stability of Thin Plates, Pubs. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., т. VI, стр. 45, 1940—1941.

5) Ильюшин А. А., Упруго-пластическая устойчивость пластин, Прикл. матем. и механ., 1944, т. 9, № 5.

6) Bijlaard P. P., Some Contributions to the Theory of Elastic and Plastic Stability, Pubs. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., m. VIII, стр. 17, 1947.

7) Stowell E. Z., A Unified Theory of Plastic Buckling of Columns and Plates, NACA Tech. Note 1556, 1948; русский перевод: см. сб. «Механика», 1952, № 2.

8) Lundquist E. E., Stowell E. Z., Schuette E. H., Principles of Moment Distribution Applied to Stability of Structures Composed of Bars or Plates, NACA Wartime Rept. L-326.

и Лундквист<sup>1)</sup> рассматривали местную неустойчивость сжатых стержней симметричного прямоугольного, швеллерного и Z-образного сечения.

С целью исследования поведения пластинок в упругой и неупругой областях выпучивания Кольбруннер<sup>2)</sup> в Цюрихе провел опыты на сжатие пластин больших размеров; в 1935 и 1946 гг. он опубликовал результаты своих исследований. В лаборатории Лангеля по исследованию конструкций были проведены многочисленные опыты, имеющие целью разрешить проблему поведения пластинок в результате выпучивания за пределом упругости<sup>3)</sup>.

По сравнению с теорией устойчивости сжатых стержней задача устойчивости пластинок усложнена тем обстоятельством, что значение критической нагрузки может отличаться от значения предельной нагрузки, которую может нести пластинка. В то время как для практических целей критическая нагрузка является наибольшей нагрузкой, которую может воспринимать сжатый стержень, пластинки могут выдерживать в выпученном состоянии предельные нагрузки, значение которых заметно превосходит значения критической нагрузки. Различия между критической и предельной нагрузками становятся значительными только для случаев очень тонких пластинок и для материалов с малым модулем упругости, как, например, для алюминиевых сплавов. Задача определения предельной нагрузки пластинок не является задачей устойчивости и в этой главе не анализируется. Однако в связи с тем, что авиационные инженеры уделяют большое внимание данному вопросу, мы рассмотрим эту задачу в главе X, § 103 и в главе XII, §§ 120—126 в связи с расчетами соответственно подкрепленной пластинки и обшивки кораблей.

Ниже следующее изложение представляет собой решение задачи устойчивости прямоугольных пластинок, сжатых в одном направлении равномерно распределенной нагрузкой, находящейся в плоскости пластинки, и применение этого решения к расчету тонкостенных сжатых элементов. Задача рассматривается в общем виде в упругой и пластической областях выпучивания при всех возможных условиях опирания ненагруженных краев.

---

<sup>1)</sup> Lundquist E. E., Local Instability of Symmetrical Rectangular Tubes, NACA Tech. Note 686, 1939. Stowell E. Z., Lundquist E. E., Local Instability of Columns with Channel and Rectangular Tube Sections, NACA Tech. Note 743, 1939.

<sup>2)</sup> Kollbrunner C. F., Das Ausbeulen des auf Druck beanspruchten freistehenden Winkels, Mitteilungen 4, Institut für Baustatik, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich, 1935, and Das Ausbeulen der auf einseitigen, gleichmässig verteilten Druck beanspruchten Platten im elastischen und plastischen Bereich, Mitteilungen 17, Institut für Baustatik, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich, 1946.

<sup>3)</sup> Heimerl G. J., Determination of Plate Compressive Strength, NACA Tech. Note 1480, 1947.

### 86. Основное дифференциальное уравнение задачи о пластинке

Рассмотрим плоскую пластинку, нагруженную на двух краях  $b$ , параллельных оси  $y$ , равномерно распределенной нагрузкой  $t\sigma_x$ , где  $t$  — толщина пластинки (рис. 158,  $a$ ). Предположим, что эти края свободно оперты таким образом, что пластинка может свободно вращаться вокруг них <sup>1)</sup>. Края, параллельные оси  $x$  (края  $a$ ), могут быть оперты различными способами.

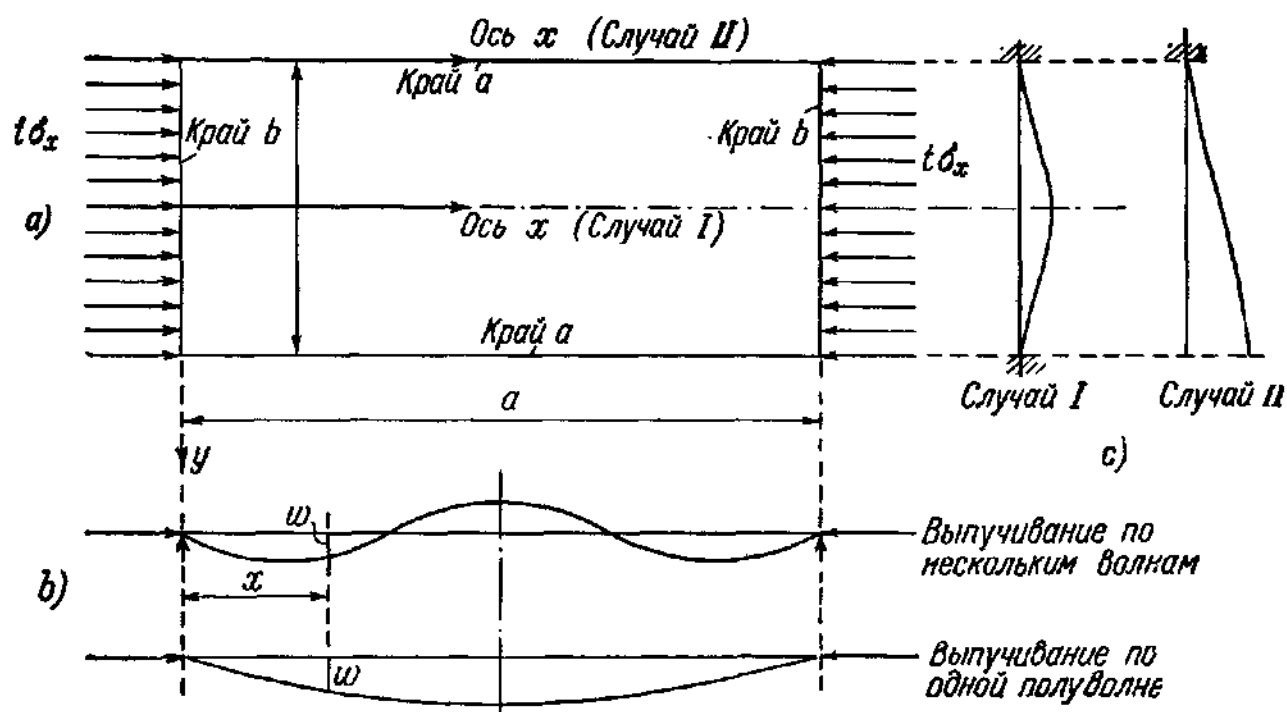


Рис. 158.

**Случай I.** Пластика упруго заделана на обоих краях. Из этого случая в пределе получаются условия защемленных или свободно опертых краев.

**Случай II.** Один край  $a$  упруго заделан, другой — свободный. Подобно случаю I этот случай также содержит два предельных условия, когда опертый край свободно вращается или защемлен.

На рис. 158,  $b$  показаны типичные продольные сечения выпущенной пластинки, а на рис. 158,  $c$  — поперечные сечения для каждого случая опирания. В случае пластинок, опертых на обоих краях (случай I), выпучивание происходит по одной или более полуволнам в зависимости от отношения  $a/b$ . В случае II, где один край пластинок свободен, выпучивание происходит по одной полу-

<sup>1)</sup> Защемление нагруженных краев не имеет заметного влияния на величину критической нагрузки длинных пластинок, применяемых в сжатых стержнях. Влияние этого вида опирания на края, параллельные направлению нагружения, является решающим. Влияние защемления нагруженных краев коротких пластинок рассматривается в § 116.



волне, когда пластинка свободно вращается на опертом крае, и по одной или более полуволнам, когда она упруго заделана или защемлена.

Нижеследующее исследование базируется на основном дифференциальном уравнении для прогиба  $w$  тонкой плоской пластинки под действием сил, находящихся в ее срединной плоскости. Это уравнение выводится при предположении малости прогиба  $w$  по сравнению с толщиной пластинки. Оно имеет вид<sup>1)</sup>

$$\frac{EJ}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + t \left( \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0, \quad (599)$$

где  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  являются соответственно нормальными напряжениями в направлении осей  $x$  или  $y$ , а  $\tau_{xy}$  — касательным напряжением в сечении, перпендикулярном к плоскости пластинки и параллельном оси  $x$  или  $y$ . Эти напряжения вызваны силами, действующими вдоль границы пластинки, и рассматриваются как заданные функции от  $x$  и  $y$ . При этом изменениями напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  при изгибе пластинки пренебрегается. Величина  $J = t^3/12$  представляет собой момент инерции площади поперечного сечения полосы пластинки единичной ширины и толщины  $t$ . Предполагается, что коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

В случае, если рассматривается только равномерно распределенная на краях  $b$  сжимающая нагрузка, как это показано на рис. 158, *a*, напряжения  $\sigma_x$  будут постоянными, а  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  равны нулю. Тогда дифференциальное уравнение для прогиба  $w$  принимает следующий упрощенный вид:

$$\frac{EJ}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \sigma_x t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (600)$$

Это уравнение является однородным дифференциальным уравнением и играет ту же роль в теории устойчивости пластинок, что и однородное дифференциальное уравнение

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = 0$$

при сжатии. Аналогично результатам, найденным в теории сжатых стержней, решения  $w$  уравнения (600) существуют только при определенных значениях  $\sigma_{кр}$  (характеристические значения) параметра  $\sigma_x$ . Это решение описывает вид неустойчивой, криволинейной

<sup>1)</sup> Существованием этого уравнения мы обязаны Сен-Венану. Его вывод см. Timoshenko S., Theory of Elastic Stability, p. 302, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1936, русский перевод: С. П. Тимошенко, Устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, 1955, стр. 313—316.

формы равновесия пластинки, соответствующей характеристическому значению  $\sigma_{кр}$ . В случае, когда значение параметра  $\sigma_x$  отлично от характеристических значений, уравнение (600) удовлетворяется только при  $w=0$ . Допустив, что значение  $\sigma_x$  постепенно возрастает от нуля до наименьшего характеристического значения  $\sigma_x$ , мы приходим к моменту, когда наряду с плоской формой равновесия  $w=0$  возможна криволинейная, но неустойчивая форма равновесия. Эта бифуркация состояния равновесия указывает на то, что критическое значение  $\sigma_x$ , т. е. критическая нагрузка достигнута. Говоря языком математики, определение значения  $\sigma_{кр}$  сводится к определению характеристических значений параметра  $\sigma_x$  в уравнении (600).

В настоящем его виде вышенаписанное дифференциальное уравнение применимо только в пределах закона Гука и должно быть видоизменено для случая, когда значение  $\sigma_x$  превосходит предел пропорциональности. Ильюшин и Стоуэлл, основываясь на общепринятых гипотезах пластичности, вывели дифференциальные уравнения для этого случая, которые приводятся в следующем параграфе. Однако полученные ими результаты слишком громоздки, чтобы на их базе устанавливать расчетные правила, поэтому дальнейшее исследование в этой и в последующих главах основывается на приближении, предложенном автором книги<sup>1)</sup>. Естественно предположить, что когда значение  $\sigma_x$  превосходит предел пропорциональности, в направлении оси  $x$  эффективным будет касательный модуль  $E_t$ , в то время как в направлении  $y$  вследствие условия  $\sigma_y=0$  пригоден модуль Юнга  $E$ . Таким образом, в случае, когда значение критического напряжения  $\sigma_{кр}$  лежит выше предела упругости, предполагается, что поведение пластинки анизотропное; это означает, что растяжение плоской пластинки за пределом пропорциональности в направлении  $x$  не влияет заметно на упругие свойства в направлении оси  $y$ . Подобная точка зрения подвергалась сомнению некоторыми исследователями<sup>2)</sup>, которые указали, что пластическая деформация материала изотропна и что растяжение пластинки за пределом упругости в одном направлении вызывает текучесть во всех других направлениях. В случае, если пластинка остается изотропной, в уравнении (600) модуль Юнга следует просто заменить приведенным модулем  $\bar{E}$  для пластинки, значение которого лежит очень близко к значению приведенного модуля Кармана. Однако многочисленные опыты, поставленные на образцах уголкового профиля из различных алюминиевых сплавов и сталей средней и высокой прочности, так же как эксперименты на нагруженных по краям пластинках при различных условиях опирания вдоль

<sup>1)</sup> Блейх, цит. выше, стр. 338.

<sup>2)</sup> Roš M., Eichinger A., Final Rept. 1st Congr. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., Paris, 1932, стр. 144.

ненагруженных краев, показали хорошее соответствие с результатами теории двойного модуля, выдвинутой автором книги, при выпучивании за пределом пропорциональности<sup>1)</sup>. Необходимо также отметить, что дифференциальное уравнение (600) автора книги можно рассматривать как приближенное уравнение, основанное на результатах, полученных из теории Стоуэлла.

Вернемся теперь к уравнению (600). В случае, если прогиб  $w$  не является функцией от  $y$ , второй и третий члены, заключенные в скобки, равны нулю, и тогда это выражение примет следующий вид:

$$\frac{EJ}{1-\nu^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \sigma_x t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение упругой линии изогнутого стержня под действием нагрузки  $\sigma_x t$ , где коэффициент  $1/(1-\nu^2)$  выражает влияние поперечных реакций пластинок. Первый член соответствует изгибу полос, параллельных оси  $x$ . В связи с тем, что эти полосы пластинки находятся под действием продольной силы  $\sigma_x t$  в случае, когда значение  $\sigma_x$  превосходит предел пропорциональности, необходимо вместо  $E$  подставить произведение  $E\tau$ . Предположим, что  $\tau = E_t/E$ , где  $E_t$  (см. гл. I) является касательным модулем. Таким образом, первый член уравнения (600), находящийся в скобках, будет иметь вид

$$\tau \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}.$$

Аналогично третий член, заключенный в скобках, можно рассматривать как член, выражающий изгиб полос пластинки в направлении оси  $y$ . Так как  $\sigma_y = 0$ , эти полосы свободны от напряжений, за исключением действия малых нормальных напряжений, обусловленных изгибом;  $E$  сохраняет свое значение, и отсюда третий член будет иметь вид  $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ .

Наконец, средний член в скобках выражает искривление квадратного элемента пластинки, обусловленное крутящими моментами, действующими на элемент. Учитывая то обстоятельство, что различные упруго-пластические свойства в направлении двух осей  $x$  и  $y$  влияют на этот член, введен коэффициент, который должен иметь значение, среднее между значениями 1 и  $\tau$ . Выбираем до некоторой степени произвольно значение  $\sqrt{\tau}$  и отсюда для второго члена в скобках получим следующее выражение:  $\sqrt{\tau} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$ . Уравнение (600) в случае пластических деформаций принимает следующую форму:

$$D \left( \tau \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\sqrt{\tau} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \sigma_x t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (601)$$

<sup>1)</sup> Кольбруннер, цит. выше, стр. 339.

где

$$D = \frac{EJ}{1 - \nu^2}.$$

До сих пор подразумевалось, что коэффициент Пуассона  $\nu$  не зависит от  $\sigma_x$ . Влияние коэффициента  $\nu$  очень мало в связи с тем, что эта величина меняется крайне незначительно.

Граничные условия для дифференциального уравнения (601) можно получить из условий опирания пластинки. С этой целью выражения<sup>1)</sup> для моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$  также необходимо видоизменить, вводя аналогичным образом коэффициенты  $\tau$  или  $\sqrt{\tau}$ . Соответствующие выражения для моментов будут:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left( \tau \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \sqrt{\tau} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left( \nu \sqrt{\tau} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_{xy} &= -M_{yx} = D \sqrt{\tau} (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (602)$$

а для поперечных сил имеем:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sqrt{\tau} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \sqrt{\tau} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (603)$$

Теорию пластинок, основанную на уравнении (601), необходимо рассматривать как полурациональную теорию, обосновать которую можно только путем сравнения теоретических результатов с данными опытов. В § 95 доказывается, что опыты подтверждают гипотезу об анизотропном поведении пластинки, нагруженной в одном направлении за пределом упругости, и что на основе вышеупомянутых предположений можно получить теоретические значения  $\sigma_{кр}$ , которые довольно хорошо совпадают с наблюдаемыми значениями при условии, если значение  $\tau$  определяется по теории касательного модуля.

Предположение, сделанное Рошем и Эйхингером относительно того, что пластинка остается изотропной даже тогда, когда значение  $\sigma_w$  превосходит предел пропорциональности, значительно упрощает дифференциальное уравнение (601). С учетом замечаний, высказанных на стр. 343, уравнение (601) принимает следующий вид:

$$D\tau \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \sigma_w t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (604)$$

<sup>1)</sup> Timoshenko S., Theory of Plates and Shells, стр. 88, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1940; русский перевод: Тимошенко С. П., Пластинки и оболочки, М., Гостехиздат, 1948, стр. 89.

Используя общепринятую в то время теорию двойного модуля Кармана, Рош и Эйхиндер предлагали следующее значение:  $\tau = \bar{E}/E$ . Казалось бы целесообразным использовать основанное на выводах главы I значение  $\tau = E_t/E$ , приводящее к очень простой теории выпучивания пластинок. Если бы использовалось уравнение (604), то теоретические результаты, полученные в предположении идеально упругого поведения пластинки, можно было бы применять в неупругой области, заменяя значение  $E$  касательным модулем  $E_t$ . В § 95 доказано, что результаты опытов опровергают уравнение (604) независимо от того, используется ли модуль Кармана или касательный модуль. В связи с этим дальнейшее исследование в этой главе основано на несколько более сложном уравнении (601).

### 87. Теории устойчивости Ильюшина и Стоуэлла

Ильюшин<sup>1)</sup> основывал свое решение задачи о пластическом выпучивании на идее, согласно которой в момент начала выпучивания определенная область в вогнутой стороне изогнутой пластинки находится в пластическом состоянии деформирования, тогда как остальная часть пластинки деформируется упруго, т. е. на выпуклой стороне изогнутой пластинки происходит разгрузка. Для того чтобы получить условие равновесия элемента пластинки в пластической области, он вводит условие пластичности Губера, Мизеса и Генки, которое предполагает изотропность материала в пластическом состоянии<sup>2)</sup>. Ильюшин предполагает, что материал несжимаем, и значение коэффициента Пуассона принимает  $\nu = 0,5$ . Принятие гипотезы о разгрузке на выпуклой стороне, как и в теории двойного модуля устойчивости сжатых стержней, и предположение о постоянном значении  $\nu = 0,5$  могут объяснить несоответствие данных теории Ильюшина с результатами опытов.

Стоуэлл<sup>3)</sup> усовершенствовал и упростил теорию Ильюшина, основав ее на концепции Шэнли, согласно которой в равномерно нагруженном за пределом упругости сжатом элементе прогиб вследствие выпучивания и возрастание нагрузки происходят одновременно таким образом, что ни в какой части элемента не происходит изменения знака деформации. Стоуэлл принимает также значение коэффициента Пуассона равным 0,5 и последствия всякой ошибки в значении  $\nu$  частично устраняются приемом, использованным при вычислении значения критического напряжения  $\sigma_{кр}$ . Для того чтобы найти значение критического напряжения  $\sigma_{кр}$  для случая пластического выпучивания, необходимо критическое напряжение,

<sup>1)</sup> И л ь ю ш и н, цит. выше, стр. 338.

<sup>2)</sup> Согласно этому условию энергия сдвига в момент потери устойчивости, обусловленная действием комбинированной системы напряжений, равна энергии сдвига при простом растяжении.

<sup>3)</sup> С т о у э л л, цит. выше, стр. 338.

вычисленное для случая упругого выпучивания, умножить на коэффициент  $\eta$ . Значения  $\eta$  найдем путем деления значения критического напряжения пластинки в пластической области на критическое напряжение, вычисленное при условии идеально упругого поведения материала, но со значением  $\nu = 0,5$  вместо  $\nu = 0,3$ . Отношения  $\eta$  значений этих двух критических напряжений можно считать мало зависящими от возможных ошибок в значениях  $\nu$ .

В своей работе Стоуэлл в основном следует математическим операциям Ильюшина. Следовательно, достаточно в общих чертах изложить исследование Стоуэлла. В случае двухосного напряженного состояния, определяемого нормальными напряжениями  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  и касательными  $\tau_{xy}$ , интенсивности напряжений  $\sigma_i$  и деформаций  $e_i$ , согласно условию пластичности Губена — Мизеса — Генки, определяются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}, \\ e_i &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_x \epsilon_y + \frac{\gamma^2}{4}}. \end{aligned} \right\} \quad (605)$$

Напряжение  $\sigma_i$  можно рассматривать как эквивалентное растягивающее напряжение, вызывающее ту же деформацию  $e_i$ , что и комбинация напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ . Интенсивность напряжений  $\sigma_i$  для любого заданного материала является единственным образом определенной функцией от интенсивности деформаций  $e_i$  при условии, если значение  $\sigma_i$  возрастает вместе с  $e_i$  (условие нагружения). В случае, если значение  $\sigma_i$  убывает (условие разгрузки), соотношение между  $\sigma_i$  и  $e_i$  становится линейным. Следовательно, для условия нагружения имеем следующее выражение:

$$\sigma_i = \omega(e_i),$$

где  $\omega$  называется функцией пластичности. Вследствие предполагаемой изотропии материала в пластической области имеют место следующие соотношения между напряжениями и деформациями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x - \nu \sigma_y}{\epsilon_x} = \frac{\sigma_i}{e_i} = \frac{\omega(e_i)}{e_i}; \quad \frac{\sigma_y - \nu \sigma_x}{\epsilon_y} = \frac{\sigma_i}{e_i} = \frac{\omega(e_i)}{e_i}; \\ \frac{\tau_{xy}}{2(1+\nu)\gamma} = \frac{\sigma_i}{e_i} = \frac{\omega(e_i)}{e_i}, \end{aligned} \right\} \quad (606)$$

где  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  обозначают соответственно деформации в направлении  $x$  и  $y$ , а  $\gamma$  — сдвиг.

Функция пластичности  $\omega(e_i)$  определяется при помощи диаграммы зависимости между напряжением и деформацией рассматриваемого материала. Следовательно, отношение  $\omega(e_i)/e_i$  идентично с секущим модулем  $E_s$  материала, так как  $\sigma_i/e_i = E_s$ . Подставляя значения  $\nu = \frac{1}{2}$

и  $\omega(e_i)/e_i = E_s$ , уравнения (606) можно написать в следующем виде:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \frac{\sigma_y}{2}}{E_s} = \frac{S_x}{E_s}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \frac{\sigma_x}{2}}{E_s} = \frac{S_y}{E_s}; \quad \gamma = \frac{3\tau_{xy}}{E_s}, \quad (607)$$

где  $S_x = \sigma_x - \frac{\sigma_y}{2}$ ,  $S_y = \sigma_y - \frac{\sigma_x}{2}$  или

$$\sigma_x = \frac{4}{3} \left( S_x + \frac{1}{2} S_y \right), \quad \sigma_y = \frac{4}{3} \left( S_y + \frac{1}{2} S_x \right), \quad \tau_{xy} = \frac{E_s}{3} \gamma. \quad (608)$$

Незначительное искривление пластинки при выпучивании вызывает вариации деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\gamma$ . Вариации  $\delta\varepsilon_x$ ,  $\delta\varepsilon_y$  и  $\delta\gamma$  обусловлены частично вариациями деформаций срединной поверхности (мембранные напряжения) и частично деформациями вследствие изгиба. В связи с тем, что рассматриваются только малые деформации, вариации деформаций срединной поверхности являются малыми величинами более высокого порядка и их влиянием на изгиб пластинки можно пренебречь. Деформации, вызванные изгибом, линейно меняются с изменением расстояния  $z$  от срединной поверхности и пропорциональны изменениям кривизн  $\delta\chi_1$ ,  $\delta\chi_2$  в направлении  $x$  и  $y$  и изменению крутки  $\delta\chi_3$ . Таким образом, имеем:

$$\delta\varepsilon_x = -z\delta\chi_1; \quad \delta\varepsilon_y = -z\delta\chi_2; \quad \delta\gamma = 2z\delta\chi_3. \quad (609)$$

Знак минус выбран для согласования с правилом знаков, использованном при выводе условия равновесия [уравнение (615)].

Учитывая, что в уравнении

$$S_x = \varepsilon_x E_s$$

$E_s$  является функцией от  $e_i$ , вариация  $S_x$  будет:

$$\begin{aligned} \delta S_x &= E_s \delta\varepsilon_x + \varepsilon_x \delta E_s = E_s \delta\varepsilon_x + \varepsilon_x \delta \frac{\sigma_i}{e_i} = \\ &= E_s \delta\varepsilon_x - \frac{\varepsilon_x}{e_i} \left( \frac{\sigma_i}{e_i} - \frac{d\sigma_i}{de_i} \right) \delta e_i. \end{aligned} \quad (610)$$

Так как напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , обусловленные внешними силами, не меняются, работа, проделанная внутренними силами, когда пластинка переходит от плоской формы к изогнутой, равна

$$\sigma_i \delta e_i = \sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + 2\tau_{xy} \delta\gamma,$$

и в результате подстановки уравнения (609) имеем:

$$\delta e_i = -\frac{z}{\sigma_i} (\sigma_x \delta\chi_1 + \sigma_y \delta\chi_2 + 2\tau_{xy} \delta\chi_3).$$

Вводя это выражение в уравнение (610), получим:

$$\delta S_x = E_s \delta\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x}{\sigma_i e_i} \left( \frac{\sigma_i}{e_i} - \frac{d\sigma_i}{de_i} \right) z (\sigma_x \delta\chi_1 + \sigma_y \delta\chi_2 + 2\tau_{xy} \delta\chi_3),$$

и после замены величины  $\sigma_i/e_i$  на  $E_s$  и  $\frac{d\sigma_i}{de_i}$  на касательный модуль  $E_t$ , используя также первое уравнение (609), имеем:

$$\delta S_x = -E_s z \delta \chi_1 + \frac{\varepsilon_x}{\sigma_i e_i} (E_s - E_t) z (\sigma_x \delta \chi_1 + \sigma_y \delta \chi_2 + 2\tau_{xy} \delta \chi_3). \quad (611a)$$

Аналогичным образом получим:

$$\delta S_y = -E_s z \delta \chi_2 + \frac{\varepsilon_y}{\sigma_i e_i} (E_s - E_t) z (\sigma_x \delta \chi_1 + \sigma_y \delta \chi_2 + 2\tau_{xy} \delta \chi_3), \quad (611b)$$

$$\delta \tau_{xy} = -\frac{2}{3} E_s z \delta \chi_3 + \frac{\gamma}{3\sigma_i e_i} (E_s - E_t) z (\sigma_x \delta \chi_1 + \sigma_y \delta \chi_2 + 2\tau_{xy} \delta \chi_3). \quad (611c)$$

Напряжения  $\delta \sigma_x$ ,  $\delta \sigma_y$  и  $\delta \tau_{xy}$ , действующие на сторонах прямоугольного элемента толщиной  $t$ , дают результирующие моменты  $\delta M_x$ ,  $\delta M_y$  и  $\delta M_{xy}$ :

$$\delta M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \delta \sigma_x z dz, \quad \delta M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \delta \sigma_y z dz, \quad \delta M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \delta \tau_{xy} z dz. \quad (612)$$

Подставляя значение  $\sigma_x$  из уравнения (608), получим:

$$\delta M_x = \frac{4}{3} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left( \delta S_x + \frac{1}{2} \delta S_y \right) z dz.$$

На основе уравнений (610) имеем:

$$\delta S_x z = - \left[ E_s \delta \chi_1 - \frac{\varepsilon_x}{\sigma_i e_i} (E_s - E_t) (\sigma_x \delta \chi_1 + \sigma_y \delta \chi_2 + 2\tau_{xy} \delta \chi_3) \right] z^2,$$

$$\frac{1}{2} \delta S_y z = - \frac{1}{2} \left[ E_s \delta \chi_2 - \frac{\varepsilon_y}{\sigma_i e_i} (E_s - E_t) (\sigma_x \delta \chi_1 + \sigma_y \delta \chi_2 + 2\tau_{xy} \delta \chi_3) \right] z^2,$$

и следовательно,

$$\begin{aligned} \delta M_x = & \frac{4}{3} \frac{E_s t^3}{12} \left[ - \left( \delta \chi_1 + \frac{1}{2} \delta \chi_2 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_y}{2}}{\sigma_i e_i} \left( 1 - \frac{E_t}{E_s} \right) (\sigma_x \delta \chi_1 + \sigma_y \delta \chi_2 + 2\tau_{xy} \delta \chi_3) \right]. \end{aligned}$$



В результате, используя уравнения (607) для выражения  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_y$  через  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ , получим:

$$\delta M_x = -D' \left[ \left( 1 - \frac{3}{4} k \frac{\sigma_x^2}{\sigma_i^2} \right) \delta \chi_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} k \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_i^2} \right) \delta \chi_2 - \frac{3}{2} k \frac{\sigma_x \tau_{xy}}{\sigma_i^2} \delta \chi_3 \right], \quad (613a)$$

где

$$D' = \frac{E_s t^3}{9} \quad \text{и} \quad k = 1 - \frac{E_t}{E_s}. \quad (614)$$

Аналогичным образом

$$\delta M_y = -D' \left[ \left( 1 - \frac{3}{4} k \frac{\sigma_y^2}{\sigma_i^2} \right) \delta \chi_2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} k \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_i^2} \right) \delta \chi_2 - \frac{3}{2} k \frac{\sigma_y \tau_{xy}}{\sigma_i^2} \delta \chi_3 \right], \quad (613b)$$

$$\delta M_{xy} = -\frac{D'}{2} \left[ \left( 1 - k \frac{3\tau^2}{\sigma_i^2} \right) \delta \chi_3 - \frac{3}{2} k \left( \frac{\sigma_x \tau_{xy}}{\sigma_i^2} \delta \chi_1 + \frac{\sigma_y \tau_{xy}}{\sigma_i^2} \delta \chi_2 \right) \right]. \quad (613c)$$

Если через  $w$  обозначить прогиб пластинки вследствие изгиба в направлении, перпендикулярном к ее плоскости, уравнение равновесия элемента пластинки можно написать в следующем виде<sup>1)</sup>:

$$\frac{\partial^2 (\delta M_x)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 (\delta M_{xy})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (\delta M_y)}{\partial y^2} - \\ - t \left( \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0,$$

где силы  $\sigma_x t$ ,  $\sigma_y t$  и  $\tau_{xy} t$  предполагаются заданными. Напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  считаются положительными при сжатии. Величины  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  представляют собой изменения кривизн, ранее обозначенные через  $\delta \chi_1$  и  $\delta \chi_2$ , а  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  — изменение крутки, обозначенное через  $\delta \chi_3$ .

В случае прямоугольной пластинки, нагруженной на противоположных сторонах равномерно распределенными силами  $\sigma_x t$ , выше-написанное уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 (\delta M_x)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 (\delta M_{xy})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (\delta M_y)}{\partial y^2} - t \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (615)$$

<sup>1)</sup> Timoshenko S., Theory of Elastic Stability, p. 305, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, 1936; русский перевод: Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, 1955, стр. 315.

Выражая величины  $\delta\chi_1$ ,  $\delta\chi_2$  и  $\delta\chi_3$  в уравнениях (613) через  $w$  и подставляя  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ , получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 (\delta M_x)}{\partial x^2} &= -D' \left[ \left( 1 - \frac{3}{4} k \frac{\sigma_x^2}{\sigma_i^2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right]; \\ \frac{\partial^2 (\delta M_y)}{\partial y^2} &= -D' \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right); \\ \frac{\partial^2 (\delta M_y)}{\partial x \partial y} &= -\frac{D'}{2} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right),\end{aligned}$$

и уравнение (615) будет

$$D' \left[ \left( 1 - \frac{3}{4} k \frac{\sigma_x^2}{\sigma_i^2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + t\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Так как  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ , из уравнения (605) получим, что  $\sigma_i = \sigma_x$ , и в результате имеем:

$$D' \left[ \left( 1 - \frac{3}{4} k \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + t\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (616)$$

В противоположность уравнению (601), где упруго-пластические свойства материала выражены одним параметром  $t$ , уравнение (616) содержит два параметра: секущий модуль и касательный модуль [см. уравнения (614)]. В результате исследование, основанное на этом уравнении, становится чрезмерно сложным. Взаимосвязь между результатами, полученными на основе дифференциального уравнения Стоуэлла (616) и упрощенного уравнения (601), рассматривается в § 95.

### 88. Общее решение дифференциального уравнения (601)

Решение дифференциального уравнения в частных производных (601) должно удовлетворить граничным условиям на всех четырех краях пластинки. Сейчас исследуем только граничные условия на нагруженных краях  $b$ ; остальные два края рассмотрим в дальнейшем (см. рис. 158). Из условий свободного опирания на краях  $b$  получим, что перемещение  $w$  и моменты  $M_x$  на краях  $x=0$ ,  $x=a$  равны нулю. Согласно уравнению (602) имеем:

$$\begin{aligned}w &= 0, \\ M_x &= -D \left( \tau \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sqrt{\tau} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0.\end{aligned}$$

Так как, по предположению, края  $x=0$ ,  $x=a$  остаются прямыми, выражение  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  равно нулю, отсюда граничные условия будут:

$$w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (617)$$

Дифференциальное уравнение (601) и граничные условия (617) удовлетворяются при помощи выражения

$$w = Y \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (618)$$

где  $Y$  является функцией от  $y$ , подлежащей определению. Вводя это выражение в дифференциальное уравнение (601) и исключая  $\sin \frac{n\pi x}{a}$ , получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} - 2\sqrt{\tau} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 Y}{dy^2} + \left[\tau \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 - \frac{\sigma_{кр} t}{D} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right] Y = 0.$$

В этом уравнении напряжение  $\sigma_w$  заменено через  $\sigma_{кр}$ , обозначающее неизвестное критическое продольное напряжение, при котором пластинка выпучивается. С учетом обозначений

$$\mu^2 = \frac{\sigma_{кр} t}{D\tau} \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \quad (619)$$

вышенаписанное дифференциальное уравнение примет следующий вид:

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} - 2\sqrt{\tau} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 Y}{dy^2} + \tau \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 (1 - \mu^2) Y = 0. \quad (620)$$

Из этого дифференциального уравнения определяется значение параметра  $\mu$ , при помощи которого на основе уравнения (619) получим следующую формулу для критического напряжения:

$$\sigma_{кр} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \frac{D\tau}{t} \mu^2. \quad (621)$$

Общее решение уравнения (620) имеет вид:

$$Y = C_1 \operatorname{ch} k_1 y + C_2 \operatorname{sh} k_1 y + C_3 \cos k_2 y + C_4 \sin k_2 y, \quad (622)$$

где значения  $k_1$  и  $k_2$  определяются выражениями:

$$k_1 = \frac{n\pi}{a} \sqrt[4]{\tau} \sqrt{\mu + 1} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{n\pi}{a} \sqrt[4]{\tau} \sqrt{\mu - 1}. \quad (623)$$

Таким образом, общее решение уравнения (600), выраженное при помощи уравнения (618), в результате принимает следующий вид:

$$w = \sin \frac{n\pi x}{a} (C_1 \operatorname{ch} k_1 y + C_2 \operatorname{sh} k_1 y + C_3 \cos k_2 y + C_4 \sin k_2 y). \quad (624)$$

Значения постоянных  $C_1, \dots, C_4$  необходимо определить таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям на двух краях  $a$ . В следующих параграфах рассматриваются особые случаи этих граничных условий.

### 89. Случай I: пластинка, свободно опертая по краям $b$ и упруго заделанная по краям $a$

Предположим, что начало координат  $x, y$  находится в середине левого края пластинки, как это показано на рис. 158. В случае, если имеются равные упругие заделки обоих ненагруженных краев, прогиб  $w$ , соответствующий наименьшему значению  $\sigma_{кр}$ , будет симметричной функцией  $y$  и

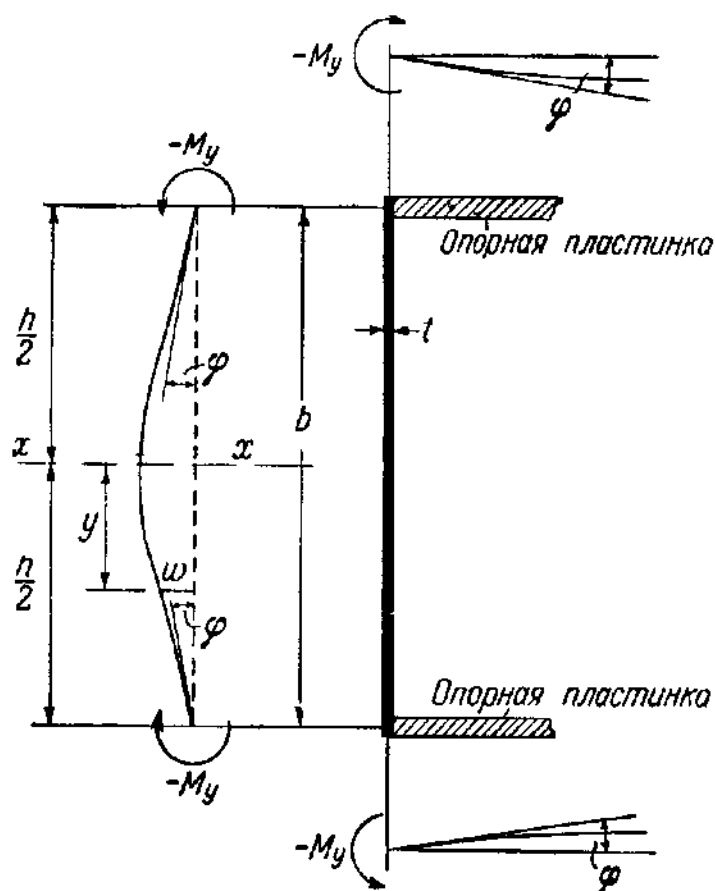


Рис. 159.

члены  $C_2 \operatorname{sh} k_1 y$  и  $C_4 \sin k_2 y$  в уравнении (624) равны нулю. Следовательно, это уравнение принимает следующий вид:

$$w = \sin \frac{n\pi x}{a} (C_1 \operatorname{ch} k_1 y + C_3 \cos k_2 y). \quad (625)$$

Для того чтобы определить значения постоянных  $C_1$  и  $C_3$ , используем граничные условия на ненагруженных краях  $a$ , а именно:

$$[w]_{y=\pm b/2} = 0, \quad (626a)$$

$$\varphi = \bar{\varphi}. \quad (626b)$$

Первое условие выражает тот факт, что края  $y = \pm b/2$  остаются при выпучивании пластинки прямыми. Второе уравнение

представляет собой условие непрерывности, которое показывает, что угол поворота  $\varphi$  на краю полученной пластинки равен углу поворота  $\bar{\varphi}$  жесткой пластинки, к которой она прикреплена (рис. 159).

Для того чтобы иметь возможность ввести решение (625) в граничное условие (626b), необходимо выразить значения  $\varphi$  и  $\bar{\varphi}$  через прогиб  $w$ . Предполагается, что изгибающий момент  $M_y$  на единицу длины, действующий на краю при искривлении пластинки, пропорционален углу  $\bar{\varphi}$ . Эту упругую реакцию можно выразить следующим уравнением:

$$M_y = -\bar{\zeta} \bar{\varphi}, \quad (627)$$

где  $\bar{\zeta}$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров опоры, и предполагается постоянным вдоль края. С другой сто-

роны, момент  $M_y$  согласно уравнению (602) равен

$$M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \sqrt{\zeta} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{y=\pm \frac{b}{2}}.$$

Так как везде вдоль краев  $a$ :  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ , то это уравнение сводится к следующему:

$$M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{y=\pm \frac{b}{2}}.$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (627), получим:

$$\bar{\varphi} = \frac{D}{\zeta} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{y=\pm \frac{b}{2}}.$$

В связи с тем, что  $\varphi = \pm \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_{y=\pm \frac{b}{2}}$ , граничное условие (626b) будет

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial y} \pm \frac{D}{\zeta} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0.$$

Отношение  $D/\zeta$  имеет размерность длины, поэтому целесообразно написать уравнение в следующем виде:

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial y} \pm \frac{b}{2} \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0, \quad (628)$$

где  $\zeta$  определяется выражением

$$\zeta = \frac{2}{b} \frac{D}{\zeta}. \quad (629)$$

Величина  $\zeta$  является безразмерным числом и предполагается постоянной вдоль краев  $a$ . Она является функцией размеров выпучивающейся и опорной пластинок и будет названа коэффициентом заделки. Метод определения его значения рассмотрим ниже. Нужно отметить, что теоретически значения  $\zeta$  могут изменяться от 0 до  $\infty$ . При  $\zeta = 0$  пластинка полностью защемлена на краях  $a$ , при  $\zeta = \infty$  она свободно вращается относительно этих краев.

Вводя решение (625) в граничные условия (626a) и (628), получим следующие два уравнения:

$$C_1 \operatorname{ch} k_1 \frac{b}{2} + C_3 \cos k_2 \frac{b}{2} = 0;$$

$$\left( C_1 k_1 \operatorname{sh} k_1 \frac{b}{2} - C_3 k_2 \sin k_2 \frac{b}{2} \right) + \zeta \frac{b}{2} \left( C_1 k_1^2 \operatorname{ch} k_1 \frac{b}{2} - C_3 k_2^2 \cos k_2 \frac{b}{2} \right) = 0.$$

Они представляют собой однородные линейные дифференциальные уравнения и ненулевые значения для  $C_1$  и  $C_3$  возможны только тогда, когда детерминант  $\Delta$  этой системы уравнений равен нулю.

Следовательно, уравнение  $\Delta = 0$  представляет собой критерий выпучивания, на основе которого получим условие устойчивости

$$k_1 \operatorname{th} k_1 \frac{b}{2} + k_2 \operatorname{tg} k_2 \frac{b}{2} + \zeta \frac{b}{2} (k_1^3 + k_2^3) = 0.$$

Вводя отношение  $\alpha = a/b$  в уравнения (621) и (623), получим их в следующем виде:

$$\sigma_{кр} = \frac{1}{b^2} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \frac{D\tau}{t} \mu^2; \quad (630)$$

$$k_1 \frac{b}{2} = \frac{n\pi}{2a} \sqrt[4]{\tau} \sqrt{\mu+1} \quad \text{и} \quad k_2 \frac{b}{2} = \frac{n\pi}{2a} \sqrt[4]{\tau} \sqrt{\mu-1}, \quad (631)$$

а вышеописанное условие устойчивости будет

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu+1} \operatorname{th} \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\mu+1} \frac{n \sqrt[4]{\tau}}{a} \right) + \sqrt{\mu-1} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\mu-1} \frac{n \sqrt[4]{\tau}}{a} \right) + \\ + \pi \zeta \mu \frac{n \sqrt[4]{\tau}}{a} = 0. \end{aligned} \quad (632)$$

Это трансцендентное уравнение устанавливает связь между параметром  $\mu$  и соотношением  $n \sqrt[4]{\tau}/a$ . В случае, если из этого уравнения вычисляется значение  $\mu$  при заданном значении отношения  $n \sqrt[4]{\tau}/a$ , определение напряжения  $\sigma_{кр}$  из уравнения (630) сравнительно просто. Однако, прежде чем исследовать общее уравнение (632), детально рассмотрим один особый случай для того, чтобы глубже усвоить сущность задачи.

Вводя значение  $\zeta = \infty$  в уравнение (632), получим условие устойчивости для свободно опертой на краях пластинки<sup>1)</sup>

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\mu-1} \frac{n \sqrt[4]{\tau}}{a} \right) = -\infty.$$

Наименьший корень этого уравнения будет

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\mu-1} \frac{n \sqrt[4]{\tau}}{a} = \frac{\pi}{2}$$

и

$$\mu^2 = \left[ \left( \frac{a}{n \sqrt[4]{\tau}} \right)^2 + 1 \right]^2. \quad (633)$$

<sup>1)</sup> Чтобы получить это уравнение, очень важно запомнить, что функция  $\operatorname{th}$  принимает значения только между  $+1$  и  $-1$ .

Используя уравнения (630) и подставляя  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ , получим:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \sqrt[4]{\tau}}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left( \frac{a}{n \sqrt[4]{\tau}} + \frac{n \sqrt[4]{\tau}}{a} \right)^2. \quad (634)$$

Единственным неизвестным в уравнении (634), оставшимся для определения, является  $n$ ; оно обозначает число полуволн, по которым пластинка выпучивается в направлении  $x$ . Для того чтобы определить это число полуволн при заданном отношении  $\alpha$ , поступаем следующим образом: в случае достаточно коротких пластинок, т. е. при малых значениях  $\alpha$ , выпучивание происходит по одной полуволе. Выше определенного значения отношения  $\alpha$  образуются две полуволны. При предельном значении отношения  $\alpha$ , когда происходит переход от одного состояния равновесия к другому, т. е. когда оба состояния одинаково возможны при одном и том же значении критического напряжения  $\sigma_{кр}$ , из уравнения (634) получим одно и то же значение  $\sigma_{кр}$  независимо от того, какое значение  $n = 1$  или  $n = 2$  мы подставляем. Аналогичным образом можно определить предельное значение  $\alpha$  при выпучивании по двум или трем полуволнам. Вообще, предельное значение  $\bar{\alpha}$  отношения  $\alpha$ , при котором образуются  $n$  или  $n + 1$  полуволн, можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{\bar{\alpha}}{n \sqrt[4]{\tau}} + \frac{n \sqrt[4]{\tau}}{\bar{\alpha}} = \frac{\bar{\alpha}}{(n+1) \sqrt[4]{\tau}} + \frac{(n+1) \sqrt[4]{\tau}}{\bar{\alpha}}.$$

Из этого уравнения следует, что

$$\bar{\alpha} = \sqrt[4]{\tau} \sqrt{n(n+1)};$$

для  $n = 1, 2, 3, \dots$  имеем  $\bar{\alpha}/\sqrt[4]{\tau} = \sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{12}, \dots$

В упругой области, когда  $\tau = 1$ , число полуволн не зависит от материала. В случае, когда выпучивание происходит за пределом упругости, свойства материала заметно влияют на число полуволн. В упругой области выпучивание происходит по одной полуволе для значений, доходящих до  $a = 1,414b$  и по двум полуволнам для значений от  $a = 1,414b$  до  $a = 2,449b$ . В случае длинных пластинок длина полуволн приближается к ширине  $b$  пластинки. Значения предельных отношений приближаются друг к другу, когда предел упругости превзойден, так как в этом случае  $\tau < 1$  и по мере укорочения волны увеличиваются значения критического напряжения  $\sigma_{кр}$ <sup>1)</sup>.

Для длинных пластинок длина полуволн стремится к значению  $b \sqrt[4]{\tau}$ .

<sup>1)</sup> Нужно отметить, что согласно гипотезе об изотропности число полуволн должно быть независимым от  $\tau$  и остается неизменным независимо от того, происходит выпучивание ниже или выше предела упругости.

Если  $\tau = 1$ , то уравнение (634) принимает следующий вид:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left(\frac{a}{n} + \frac{n}{a}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k.$$

Коэффициент  $k$  указывает на зависимость  $\sigma_{кр}$  от отношения  $\alpha$ . Значения  $k = \left(\frac{a}{n} + \frac{n}{a}\right)^2$  определяют последовательность кривых, показанных на рис. 160, соответствующих выпучиванию по 1, 2, 3, ... полуволнам, в зависимости от значения  $\alpha$ . Легко видеть, что кривые

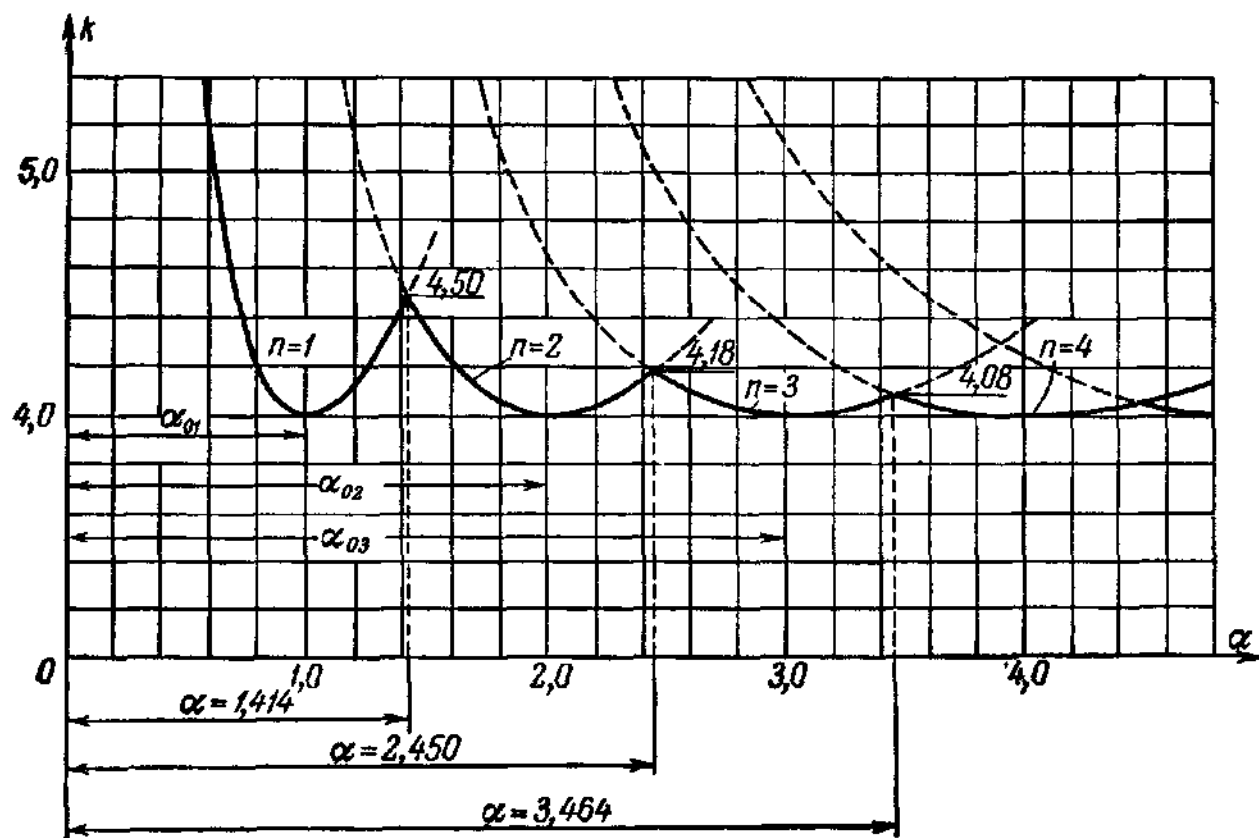


Рис. 160.

для значений  $n = 2, 3, \dots$  можно непосредственно получить из кривой для значения  $n = 1$  путем умножения абсциссы на 2, 3 и т. д., оставляя ординаты неизменными. В результате части этих кривых, начерченных сплошными линиями, определяют зависимость  $\sigma_{кр}$  от отношения  $\alpha$ .

Каждому числу полуволн соответствует отношение  $\alpha$ , при котором  $k$ , а следовательно и  $\sigma_{кр}$ , принимает минимальное значение. Минимумы кривых находятся в точках  $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ . Минимальные значения отдельных ветвей кривой повсюду равны, и с увеличением длины  $a$  пластинки различие между значением  $k$ , соответствующим действительной длине пластинки, и минимальным значением  $k$  уменьшается. В связи с необходимостью рассматривать только длинные, узкие пластинки, употребляемые в сжатых стержнях, расчет можно основывать на минимальном значении  $k$ , которое является постоянным для всех отношений длины на ширину  $\alpha$ , что значительно упро-



щает исследование. Аналогичные условия имеют место, когда  $\tau < 1$ , т. е. когда превзойден предел упругости.

Значение  $\alpha$ , при котором напряжение имеет минимальное значение  $\sigma_{кр}$ , можно определить из условия  $\frac{\partial \sigma_{кр}}{\partial \alpha} = 0$ ; оно равно<sup>1)</sup>

$$\alpha_0 = n \sqrt[4]{\tau}.$$

Вводя  $\alpha_0$  в уравнение (633), получим критическое напряжение длинной, свободно опертой пластинки:

$$\sigma_{кр \min} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2, \quad (635)$$

или, подставляя  $\nu = 0,3$ ,

$$\sigma_{кр \min} = 3,615 E \sqrt{\tau} \left(\frac{t}{b}\right)^2. \quad (635a)$$

При  $\tau = 1$  получим формулу Брайана.

Возвращаясь теперь к исследованию общего условия устойчивости (632) для упруго заделанных пластинок, находим, что трансцендентная форма зависимости  $\mu$  от  $\alpha/n\sqrt[4]{\tau}$  неудобна для практических целей. В случае расчета свободно опертой пластинки, подробно рассмотренной выше, получим алгебраическое выражение [уравнение (633)] для  $\mu^2$ , а именно:

$$\mu^2 = 1 + 2 \left( \frac{\frac{\alpha}{4}}{n \sqrt[4]{\tau}} \right)^2 + \left( \frac{\frac{\alpha}{4}}{n \sqrt[4]{\tau}} \right)^4.$$

Приблизительно можно выразить связь между  $\mu^2$  и величиной  $\alpha/n\sqrt[4]{\tau}$ , определяемой уравнением (632), при помощи аналогичного алгебраического выражения. Значение  $\mu^2$  можно вычислить на основе следующего соотношения:

$$\mu^2 = 1 + p \left( \frac{\frac{\alpha}{4}}{n \sqrt[4]{\tau}} \right)^2 + q \left( \frac{\frac{\alpha}{4}}{n \sqrt[4]{\tau}} \right)^4 \quad (636)$$

с ошибкой менее чем на 10%, где  $p$  и  $q$  являются величинами, зависящими от коэффициента заделки  $\zeta$ .

---

<sup>1)</sup> При определении значения  $\alpha_0$  предполагается, что  $\tau$  не зависит от  $\sigma_{кр}$ , что, строго говоря, является неверным. Однако при  $n > 1$  влияние предположения о независимости  $\sigma_{кр}$  от  $\tau$  на величину  $\alpha_0$  весьма незначительно.

Значения  $p$  и  $q$  вычислены для различных значений  $\zeta$  на основе точного условия устойчивости (632). На рис. 161 приведены значения  $p$  и  $q$  в зависимости от  $\zeta$ <sup>1)</sup>.

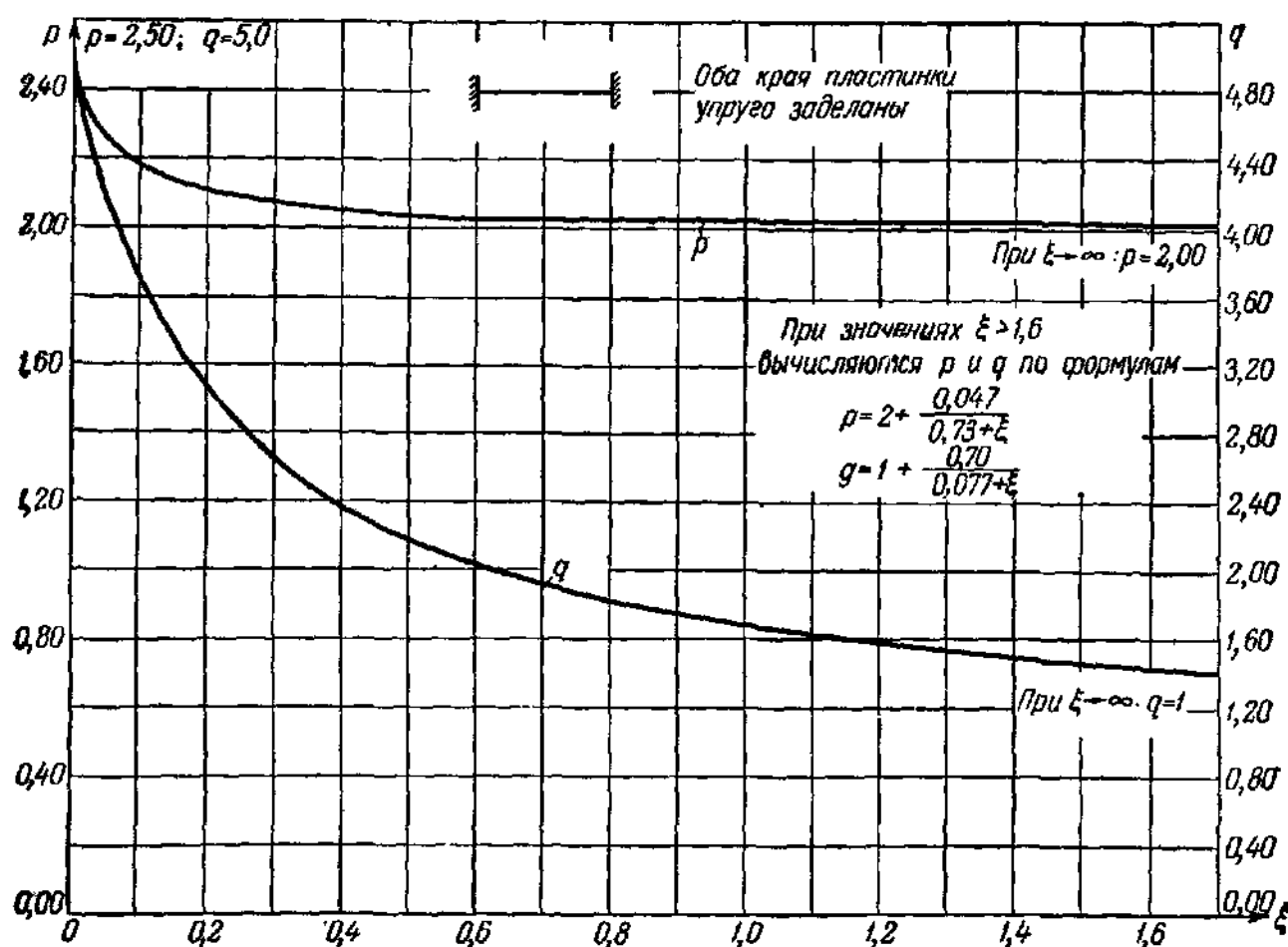


Рис. 161.

Подставляя выражение (636) в уравнение (630) и вводя  $D = Et^3/12(1 - \nu^2)$  и  $a = ab$ , получим следующее уравнение для  $\sigma_{кр}$ , пригодное для всевозможных значений жесткостей упругой заделки:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left[ \left(\frac{n \sqrt[4]{\tau}}{a}\right)^2 + p + q \left(\frac{a}{n \sqrt[4]{\tau}}\right)^2 \right]. \quad (637)$$

Вводя обозначение

$$k = \left(\frac{n \sqrt[4]{\tau}}{a}\right)^2 + p + q \left(\frac{a}{n \sqrt[4]{\tau}}\right)^2, \quad (638)$$

<sup>1)</sup> Коэффициенты  $p$  и  $q$  впервые введены в исследование автором книги; см. Блейх, цит. выше, стр. 338. Преимущество введения кривых значений  $p$  и  $q$  заключается в том, что достаточно двух кривых для определения значения коэффициента  $k$  при любом значении  $\zeta$ . В противном случае для определения значений коэффициента  $k$  необходимо иметь семейство  $k$  кривых для различных значений  $\zeta$ , находящихся между 0 и  $\infty$ .

напишем уравнение для  $\sigma_{кр}$  в виде

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k, \quad (638a)$$

где  $k$  — безразмерный коэффициент, зависящий от отношения  $\alpha$  пластинки, от условий опирания ненагруженных краев и от значения  $\tau$ .

Основываясь на аналогичном рассуждении для свободно опертой пластинки, можно получить предельное отношение  $\bar{\alpha}$ , при котором имеют место  $n$  или  $n+1$  полуволн:

$$\bar{\alpha} = \sqrt[4]{\frac{\tau}{q}} \sqrt{n(n+1)}, \quad (639)$$

где значение  $q$  лежит между 1 и 5. При  $q=1$  (свободно опертые края а)  $\bar{\alpha} = \sqrt[4]{\tau} \sqrt{n(n+1)}$ , как было получено выше, а при  $q=5$  (оба края полностью защемлены)  $\bar{\alpha} = 0,668 \sqrt[4]{\tau} \sqrt{n(n+1)}$ . Длина полуволн значительно сокращается при защемлении краев пластинки. Значение  $\alpha_0$ , при котором  $\sigma_{кр}$  достигает минимума и на котором можно основывать расчет длинных пластинок, можно определить из условия  $\frac{\partial \sigma_{кр}}{\partial \alpha} = 0$ , а именно:

$$\alpha_0 = n \sqrt[4]{\frac{\tau}{q}}.$$

Подставляя значение  $\alpha_0$  в уравнение (637), получим следующее выражение:

$$\sigma_{кр \min} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 (p + 2\sqrt{q}) = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k, \quad (640)$$

не зависящее от  $n$  и пригодное для сжатых стержней любой длины. Коэффициент устойчивости

$$k = p + 2\sqrt{q} \quad (641)$$

становится независимым от  $\tau$ . Это является очень важным фактом, так как позволяет использовать заранее вычисленные таблицы и диаграммы значений для коэффициента  $k$ , которые можно применить в упругой и неупругой областях выпучивания.

Интересно сопоставить полученные выше результаты с результатами, выведенными из дифференциального уравнения (604), основанного на гипотезе изотропности. Наиболее важные формулы легко получить из уравнений (634), (637) и (639), заменяя величину  $\sqrt{\tau}$  на  $\tau$  и  $\sqrt[4]{\tau}$  — на единицу. Таким образом, из уравнения (631) имеем:

$$k_1 \frac{b}{2} = \frac{n\pi}{2a} \sqrt{\mu+1} \quad \text{и} \quad k_2 \frac{b}{2} = \frac{n\pi}{2a} \sqrt{\mu-1}; \quad (631a)$$

из уравнения (634)

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \tau}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left(\frac{a}{n} + \frac{n}{a}\right)^2; \quad (634a)$$

из уравнения (637)

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \tau}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + p + q \left(\frac{a}{n}\right)^2\right]; \quad (637a)$$

из уравнения (639)

$$\bar{\alpha} = \sqrt[4]{\frac{1}{q}} \sqrt{n(n+1)}. \quad (639a)$$

Величина  $\tau$  всегда меньше  $\sqrt{\tau}$ ; следовательно, значение  $\sigma_{кр}$ , вычисленное из уравнения (634a) или (637a), лежит ниже значения  $\sigma_{кр}$ , полученного из уравнения (634) или (637). Однако действительное различие между этими значениями намного меньше, чем это выражено в отношении  $\tau/\sqrt{\tau}$ , так как само значение  $\tau$  является функцией  $\sigma_{кр}$ , что уменьшает различие между значениями  $\sigma_{кр}$ , полученными из двух дифференциальных уравнений (601) и (604). Сравнительные вычисления показывают, что различие для стали или алюминиевого сплава едва превышает 10% в случае, когда значение  $\sigma_{кр}$  близко к пределу текучести при малых отношениях  $b/t$ . Различие уменьшается, когда  $\sigma_{кр}$  убывает с увеличением отношения  $b/t$ . Следовательно, уравнения (634a) и (637a) дают приближенные, но надежные значения для критического напряжения  $\sigma_{кр}$  и использование более простого дифференциального уравнения (604) может быть оправдано в случаях, когда экономичность конструкции не является самым важным фактором и возможно наибольшее упрощение расчетного метода.

Уравнение (604) играет важную роль для пластинок с малым значением отношения  $\alpha$ , когда  $\alpha < 1$ . Значения  $\sigma_{кр}$ , полученные из уравнения (637a), по мере убывания  $\alpha$  стремятся к значениям  $\sigma_{кр}$ , вычисленным из первоначального уравнения (637). Этот факт легко объяснить тем, что изгибные напряжения в направлении  $y$  и касательные напряжения быстро убывают по мере уменьшения  $\alpha$  и вместе с  $\alpha$  стремятся к нулю. В этом предельном случае поведение пластинки аналогично поведению сжатого стержня длиной, равной длине пластинки  $a$ , а критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  пропорционально значению  $\tau$ .

Сравнивая уравнения (639) и (639a), определяющие число полуволн, по которым выпучивается пластинка, найдем, что две данные теории, применяемые для случаев с длинными пластинками, когда значение  $\sigma_{кр}$  находится в окрестности предела текучести, а значение  $\tau$  мало, дают заметно отличающиеся друг от друга величины. Опыты, описанные в § 95, подтверждают уравнение (639) и, следовательно, обосновывают гипотезу анизотропности, положенную в основу дифференциального уравнения (601).

До сих пор предполагалось, что на обоих ненагруженных краях имеются одинаковые условия заделки. Для исследования влияния неравных степеней заделки ненагруженных краев пластинки Лундквист и Стоуэлл<sup>1)</sup> предложили следующий приближенный метод. Описанный выше метод в случае равных степеней заделки обоих ненагруженных краев применяется сначала с использованием коэффициента заделки  $\zeta_1$  одной стороны для определения коэффициента устойчивости  $k_1$  из уравнения (641), а затем с использованием другого значения  $\zeta_2$  для определения коэффициента устойчивости  $k_2$ . Среднее значение  $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$  является весьма хорошим приближением точного значения  $k$ ; это среднее значение можно подставить в уравнение (638a) и получить значения критического напряжения рассматриваемой пластинки. Лундквист и Стоуэлл в некоторых случаях сравнили приближенные и точные значения  $k$  и показали, что в худшем случае различия достигают только нескольких процентов точного значения.

В случае, когда значение  $\sigma_{кр}$  лежит выше предела пропорциональности, целесообразно вычислить значение  $\sigma_{кр}$ , соответствующее  $k_1$ , а затем значение  $\sigma_{кр}$ , соответствующее  $k_2$ , и затем найти среднее от этих двух значений  $\sigma_{кр}$ .

#### 90. Случай II: пластинка, свободно опертая на краях $b$ , упруго заделанная на одном краю $a$ и свободная на другом

Удобно использовать следующую систему координат  $x, y$ : ось  $x$  совпадает с опертым краем  $a$ , а ось  $y$  проведена вдоль левого края пластинки, как это показано на рис. 158. В связи с тем, что симметрии относительно оси  $x$  не существует, необходимо использовать общее решение дифференциального уравнения (624):

$$w = \sin \frac{n\pi x}{a} (C_1 \operatorname{ch} k_1 y + C_2 \operatorname{sh} k_1 y + C_3 \cos k_2 y + C_4 \sin k_2 y), \quad (642)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  определяются уравнениями (623).

Граничные условия, определяющие значения четырех постоянных  $C_1, \dots, C_4$ , следующие:

$$\text{для } y=0 \quad w=0 \quad \text{и} \quad \varphi=\bar{\varphi}; \quad (643a)$$

$$\text{для } y=b \quad M_y=0 \quad \text{и} \quad Q_y=0, \quad (643b)$$

где  $Q_y$  есть поперечная сила на свободном краю. Так как в обоих случаях I и II имеются одинаковые граничные условия в заделанных краях (рис. 162), то уравнения (643a) идентичны приведенным выше

<sup>1)</sup> Lundquist E., Stowell E. Z., Critical Compressive Stress for Flat Rectangular Plates Supported along All Edges and Elastically Restrained against Rotation along the Unloaded Edges, NACA Tech. Note, 733, 1942.

уравнениям (626). Следовательно, рассуждая так же, как и в случае I, получим уравнение

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{b}{2} \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{y=0} = 0, \quad (644)$$

которое соответствует уравнению (628). Для  $M_y$  и  $Q_y$  имеем выражение (602); отсюда уравнения (643b) будут:

$$\left. \begin{aligned} M_y &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \sqrt{\tau} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{y=b} = 0; \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \nu) \sqrt{\tau} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{y=b} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (645)$$

Подставляя решение (642) в граничные условия для  $y = 0$ , получим:

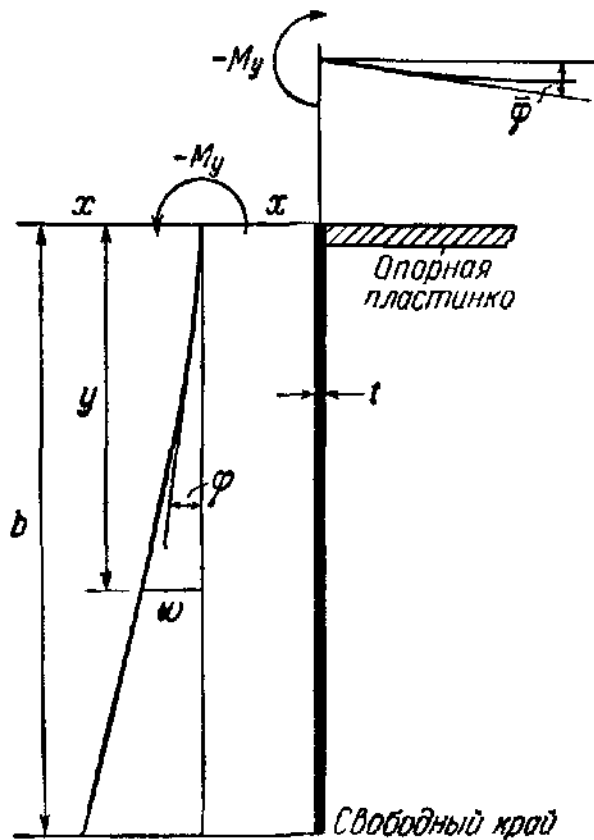


Рис. 162.

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0; \\ C_2 k_1 + C_4 k_2 - \zeta \frac{b}{2} (C_1 k_1^2 - C_3 k_2^2) &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} C_1 &= -C_3; \\ C_2 &= C_4 \frac{k_2}{k_1} - C_3 \zeta \frac{b}{2} \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1^2}. \end{aligned}$$

С учетом этих выражений уравнение (642) примет вид

$$\begin{aligned} w &= \sin \frac{2\pi x}{a} \left[ C_3 \left( \cos k_2 y - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \operatorname{ch} k_1 y - \zeta \frac{b}{2} \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1} \operatorname{sh} k_1 y \right) + \right. \\ &\quad \left. + C_4 \left( \sin k_2 y - \frac{k_2}{k_1} \operatorname{sh} k_1 y \right) \right]. \end{aligned}$$

Вводя это выражение в два граничных условия (645), получим следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} C_3 (r \cos k_2 b + t \operatorname{ch} k_1 b + h t \operatorname{sh} k_1 b) + C_4 \left( r \sin k_2 b + t \frac{k_2}{k_1} \operatorname{sh} k_1 b \right) &= 0; \\ C_3 \left( t \frac{k_2}{k_1} \sin k_2 b - r \operatorname{sh} k_1 b - h r \operatorname{ch} k_1 b \right) - \\ - C_4 \left( t \frac{k_2}{k_1} \cos k_2 b + r \frac{k_2}{k_1} \operatorname{ch} k_1 b \right) &= 0. \end{aligned}$$

где  $r$ ,  $t$  и  $h$  определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} r &= k_2^2 + \nu \sqrt{\tau} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 = k_1^2 - (2 - \nu) \sqrt{\tau} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2; \\ t &= k_1^2 - \nu \sqrt{\tau} \left( \frac{a\pi}{a} \right)^2 = k_2^2 + (2 - \nu) \sqrt{\tau} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2; \\ h &= \zeta \frac{b}{2} \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1}. \end{aligned}$$

В результате из уравнения  $\Delta = 0$  получим условие устойчивости

$$\frac{2rt}{\operatorname{ch} k_1 b \cos k_2 b} + r^2 + t^2 - \frac{r^2 k_1^2 - t^2 k_2^2}{k_1 k_2} \operatorname{th} k_1 b \operatorname{tg} k_2 b + \\ + h \left( t^2 \operatorname{th} k_1 b - r^2 \frac{k_1}{k_2} \operatorname{tg} k_2 b \right) = 0. \quad (646)$$

Аналогично <sup>1)</sup> случаю I значение критического напряжения  $\sigma_{кр}$  можно выразить в следующем виде:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 \left[ \left( \frac{n \sqrt{\tau}}{a} \right)^2 + p + q \left( \frac{a}{n \sqrt{\tau}} \right)^2 \right]. \quad (647)$$

Используя обозначение (638), это уравнение можно записать в сокращенном виде:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 k. \quad (648)$$

Параметры  $p$  и  $q$  в этом уравнении зависят от коэффициента заделки  $\zeta$ . Они вычислены на основе уравнения (646) и приведены на рис. 163 в зависимости от  $\zeta$ .

Рассуждая так же, как и в случае I, получим предельное отношение  $\bar{\alpha}$ , при котором имеют место  $n$  или  $n+1$  полуволн. т. е.

$$\bar{\alpha} = \sqrt[4]{\frac{\tau}{q}} \sqrt{n(n+1)}. \quad (649)$$

<sup>1)</sup> Критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  определяется как функция от  $\mu$  [уравнение (630)], а значения  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $r$  и  $t$  можно выразить через  $\mu$  следующим образом:

$$\begin{aligned} k_1 b &= \frac{n\pi}{a} \sqrt[4]{\tau} \sqrt{\mu+1} \quad \text{и} \quad k_2 b = \frac{n\pi}{a} \sqrt[4]{\tau} \sqrt{\mu-1}; \\ r &= \frac{1}{b^2} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \sqrt{\tau} \sqrt{\mu-1+\nu} \quad \text{и} \quad t = \frac{1}{b^2} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \sqrt{\tau} \sqrt{\mu+1-\nu}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (646) представляет собой соотношение между величинами  $\mu$  и  $a/n\sqrt[4]{\tau}$  и может быть аппроксимировано выражением вида (636).

Отношение  $\alpha_0$ , соответствующее минимальному значению  $\sigma_{кр}$ , будет

$$\alpha_0 = n \sqrt[4]{\frac{\tau}{q}} \quad (650)$$

и, таким образом,

$$\sigma_{кр \min} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 (p + 2\sqrt{q}) = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k, \quad (651)$$

где коэффициент устойчивости  $k$  не зависит от величины  $\tau$  и имеет следующее значение:

$$k = p + 2\sqrt{q}.$$

Отметим, что уравнения (637) и (647) имеют один и тот же вид, но отличаются числовыми значениями  $p$  и  $q$ .

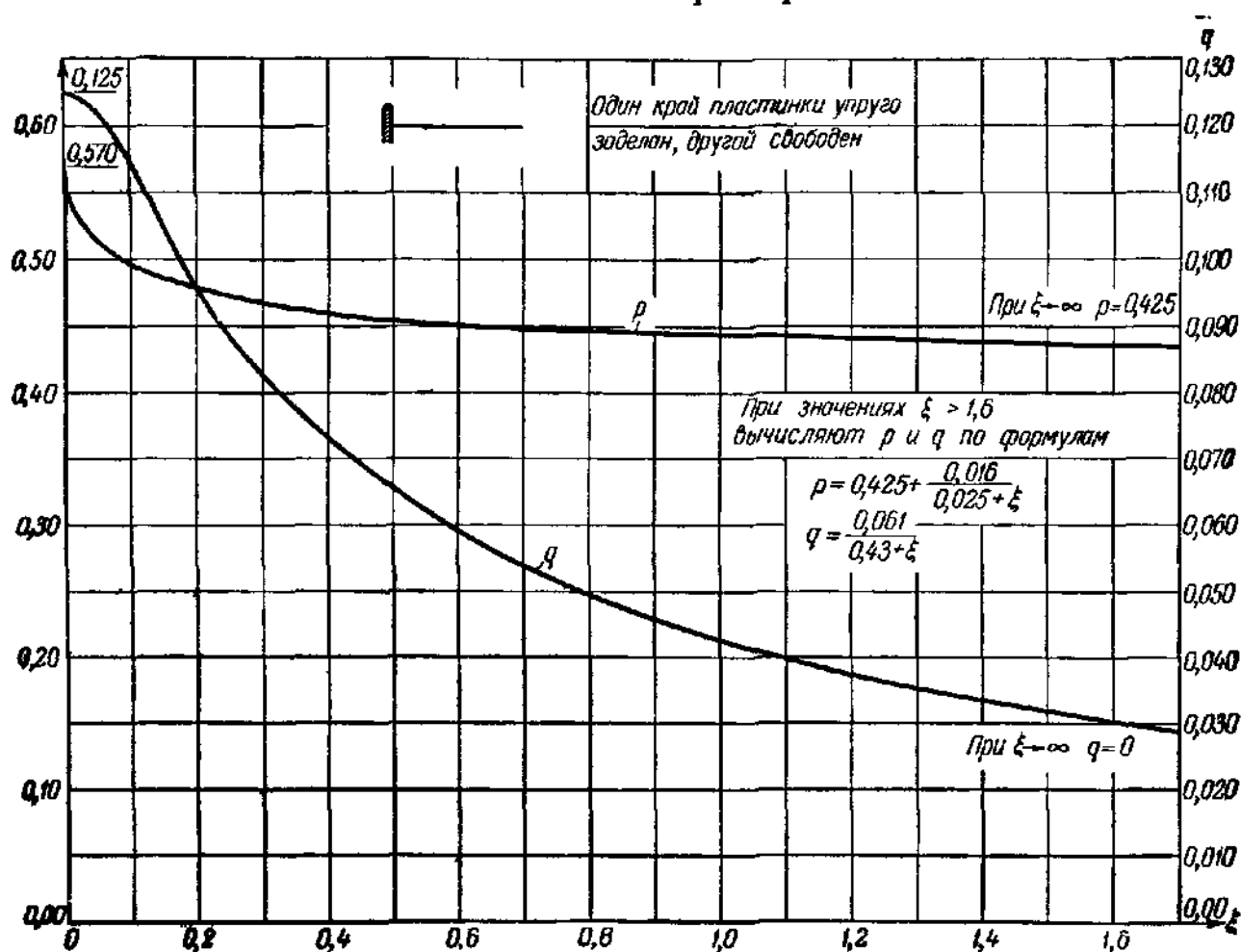


Рис. 163.

Из уравнения (650) следует, что с уменьшением степени упругой заделки величина  $\alpha_0$  будет постоянно возрастать, так как  $q$  монотонно убывает. В предельном случае свободно опертого края ( $q=0$ ) значение отношения  $\alpha_0$  будет бесконечным и пластинка будет выпучиваться по одной полуволне. С увеличением  $\alpha_0$  критическое напряжение ( $\sigma_{кр \min}$ ) убывает и асимптотически стремится к значению

$$\sigma_{кр \min} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\tau}{b}\right)^2 p. \quad (652)$$



В случае, если один край  $a$  пластинки свободно вращается, пластинка независимо от ее длины будет выпучиваться по одной полуволе. Однако независимо от длины пластинки значение критического напряжения не может стать ниже значения, данного уравнением (652). Если одна сторона пластинки упруго заделана, то уравнение (649) показывает, что в случае достаточно длинной пластинки образуются несколько полуволи.

Недавно Лундкуист и Стоуэлл<sup>1)</sup> точно рассчитали условия устойчивости (632) и (646) для случаев I и II при различных значениях  $\zeta$ , находящихся между 0 и  $\infty$ . Они использовали другое значение коэффициента заделки  $t=2/\zeta$ . Значения коэффициента устойчивости пластинки  $k$  в уравнениях (640) и (651) приведены в работе Лундкуиста и Стоуэлла в виде диаграмм и таблиц. Сравнение показывает, что кривые значений  $p$  и  $q$  на рис. 161 и 163 дают значения  $k$  с ошибкой менее чем 1%.

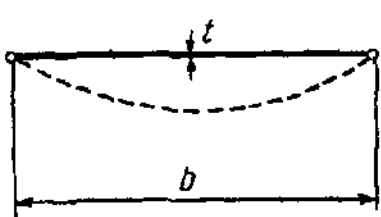
### 91. Критические напряжения и длины полуволи для свободно опертой или полностью зашеченной пластинок

В последующих параграфах и главах мы будем иметь возможность неоднократно ссылаться на предельные случаи, когда пластинка на ненагруженных краях свободно оперта ( $\zeta=\infty$ ) или зашечена ( $\zeta=0$ ). В таблице 26 приведены значения коэффициента устойчивости пластинки  $k$  и числовое значение коэффициента  $\beta$  для вычисления значения критического напряжения  $\sigma_{кр}$  и длины полуволи  $\lambda$ :

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k \quad \text{и} \quad \lambda = \beta b \sqrt[4]{\tau}. \quad (653)$$

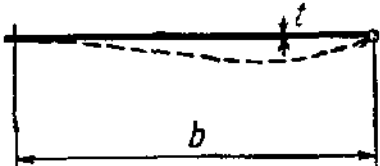
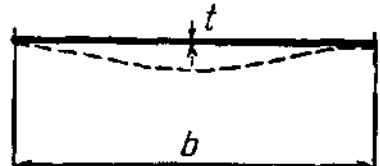
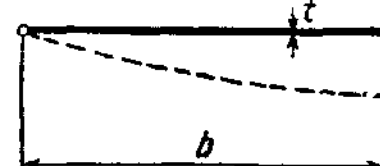
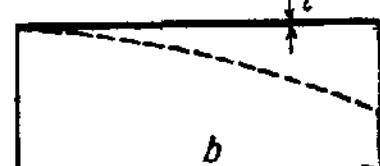
Числовые значения, приведенные в таблице 26, применимы только при расчете длинных пластинок.

Таблица 26. Значения коэффициентов  $k$  и  $\beta$  в уравнениях (653)

Случай	Описание условий опирания ненагруженных краев	$k$	$\beta$
	Оба края свободно оперты	4,00	1,000

<sup>1)</sup> Лундкуист, Стоуэлл, цит. выше, стр. 361 и Critical Compressive Stress for Outstanding Flanges, NACA Tech. Note 734, 1942.

Продолжение

Случай	Описание условий опирания ненагруженных краев	$k$	$\beta$
	Один край свободно оперт, другой заще- млен	5,42	0,800
	Оба края заще- млены	6,97	0,668
	Один край свободно оперт, другой свобо- ден	0,425	*)
	Один край заще- млен, другой свободен	1,277	1,680

\*)  $\lambda$  всегда равна длине пластинки  $a$ .

## 92. Определение значения коэффициента заделки

В предыдущих параграфах при исследовании прямоугольных пластинок было введено понятие коэффициента заделки  $\zeta$ . Теперь остается показать способ, с помощью которого можно будет определить значение этого коэффициента в каждом отдельном случае. В начале § 89 предполагалось, что краевой момент  $M_y$  пропорционален углу поворота  $\varphi$ , причем было установлено, что коэффициент пропорциональности зависит от размеров опорной конструкции. В отношении пластинчатых элементов сжатых стержней, рассматриваемых в этом параграфе, необходимо добавить, что коэффициент пропорциональности зависит также от сжимающих напряжений, действующих на поддерживающие элементы конструкции. Изгиб и кручение опорных пластинок, показанных на рис. 164, например, обусловлены не только влиянием упругого взаимодействия между пластинками стенки и опор-

ными элементами, но также продольными сжимающими силами, действующими на опорные пластинки. Чем жестче опорные пластинки, тем слабее будет влияние сжимающих напряжений. Это влияние становится практически важным, когда отношение  $b/t$  выпучивающихся пластинок и отношение  $c/t_c$  опорных пластинок стремятся к одному и тому же значению. В предельном случае, когда обе пластинки выпучиваются одновременно, эффект заделки исчезает, и каждый элемент ведет себя как свободно опертая по ненагруженным краям пластинка.

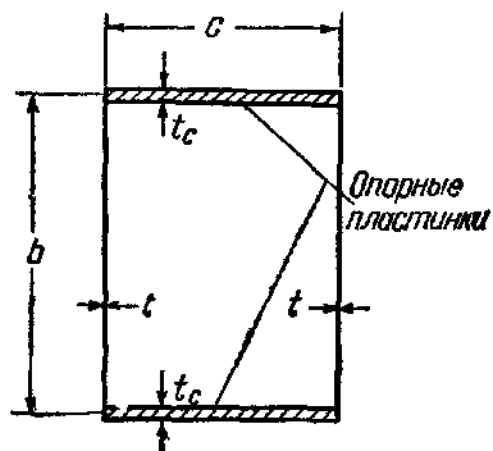


Рис. 164.

На рис. 165 в качестве примера показано коробчатое сечение. В случае, если сжимающими силами нагружена только одна пара пластинок, вторая пара благодаря присущей пластинкам жесткости сможет оказать некоторое сдерживающее влияние. Однако, когда равномерно сжаты все четыре стороны, как это имеет место в сжатых стержнях, обе пары пластинок одновременно переходят в неустойчивое положение равновесия, и ни одна из них не в состоянии поддерживать другую. Пластины ведут себя так, как если бы они были оперты без краевых моментов защемления. В действительности в неустойчивое положение, характеризуемое начинающимся искривлением поперечного сечения сжатого стержня, переходит не одна пластинка, но вся совокупность их.

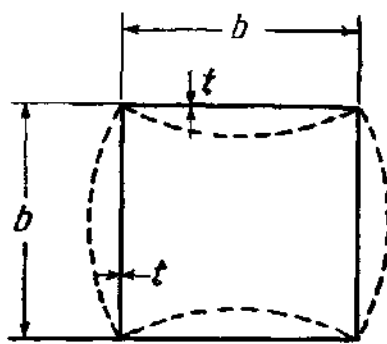


Рис. 165.

Конечно, существует возможность найти точное решение этой задачи, если рассмотреть устойчивость всей совокупности пластинок. Для любой комбинации пластинок можно использовать общее решение [уравнение (624)], однако такой способ в конечном счете приводит к очень громоздким математическим результатам, которые трудно использовать для практических целей.

Лундквист и Стоуэлл <sup>1)</sup> получили точное решение задачи для случая прямоугольных труб с поперечными сечениями, имеющими две оси симметрии, и для сжатых стержней с двутавровыми швеллерами и Z-образными поперечными сечениями и опубликовали диаграммы значений коэффициентов устойчивости пластинки  $k$  в функции от

<sup>1)</sup> Lundquist E. E., Local Instability of Symmetrical Rectangular Tubes, NACA Tech. Note 686, 1939; Stowell E. Z., Lundquist E. E., Local Instability of Columns with I-, Z-, Channel- and Rectangular tube Sections, NACA Tech. Note 743, 1939.

отношения  $b/c$  в значениях  $t/t_0 = 0,5, 1$  и  $2$ . Гартманн <sup>1)</sup> исследовал устойчивость тавровых сжатых стержней и применил свой метод, разработанный с помощью некоторых упрощающих предположений, к одному числовому примеру. Он обратил внимание на тот факт, что сопротивление фланца кручению значительно способствует упругой заделке стенки.

Применяя принципы метода распределения моментов к устойчивости конструкций, составленных из длинных пластинок, находящихся под действием продольных сжимающих нагрузок, Лундквист, Стоуэлл и Шютте <sup>2)</sup> смогли создать удобный метод для решения задач устойчивости конструкции, составленной из пластинок. Их метод основывается на принципах метода распределения моментов, примененного Джеймсом для элементов, находящихся под действием осевых нагрузок <sup>3)</sup>. Эти авторы разработали способ для вычисления критического значения коэффициента устойчивости пластинки  $k$  и вывели выражения для коэффициентов передачи нагрузки и жесткости. В главе XII в связи с исследованием конструкции корпуса кораблей описан другой метод для непосредственного решения задачи местной неустойчивости конструкции, составленной из пластинок. Этот метод основан на принципе уравнения четырех моментов для стержневых систем и имеет особые преимущества при исследовании конструкций, составленных из секций, используемых при проектировании кораблей.

Точное решение задач устойчивости различных типов конструкций, составленных из пластинок, является чрезвычайно громоздким, а построение диаграмм для практических расчетов — очень трудоемким процессом. Однако сжатые стержни в строительных конструкциях составлены из нескольких пластинчатых элементов и обычно имеют две оси симметрии. Для таких сжатых стержней имеется возможность установить приближенные формулы для коэффициента заделки  $\zeta$ , при помощи которого определяется коэффициент устойчивости пластинок  $k$ . С целью получить практический метод для определения значения  $\zeta$ , результаты которого можно непосредственно применять в обычных расчетах, считается вполне возможным допущение неточности при условии, если результаты приближения являются надежными. Зная точное решение многих специальных задач местной неустойчивости сжатых стержней, можно проверить степень точности упрощенных расчетных формул.

Значительно облегчает задачу то, что влияние сжимающих напряжений на искривление опорной пластинки или пластинок, данных

<sup>1)</sup> Hartmann F., Die Berechnung von T-Gurten auf Ausbeulung, Der Stahlbau, т. 7, 1934.

<sup>2)</sup> Lundquist E. E., Stowell E. Z., Schuette E., Principles of Moment Distribution Applied to Stability of Structures Composed of Bars or Plates, NACA Wartime Rept. L-326.

<sup>3)</sup> См. § 61.

в примере рис. 164, уменьшается очень быстро с увеличением разности между отношениями  $b/t$  и  $c/t_e$  таким образом, что влияние сжимающих напряжений в опорных элементах можно учитывать при помощи соответствующего коэффициента, который в предельном случае, когда отношение  $b/t$  равно  $c/t_e$ , дает точное значение  $\zeta$ . В нижеследующем изложении допустим сначала, что коэффициент  $\zeta$  не зависит от продольных напряжений  $\sigma_{\text{ср}}$  в опорных элементах, и затем раскроем, каким образом можно учесть, в крайнем случае приблизительно, влияние сжимающих напряжений в опоре.

Определим теперь значение коэффициентов заделки  $\zeta$  для стенок и поясов некоторых практически важных сечений. Полученные результаты используются в § 94 с целью установления простых расчетных правил для этих сечений сжатого стержня, основанных на данных, выведенных в §§ 89 и 90. Нижеизложенные исследования базируются на следующих предположениях:

1. Выпучивание всей конструкции, составленной из пластинок перед местной потерей устойчивости, не имеет места.
2. Края, где соединяются пластинки, остаются прямыми и не искривляются до появления местной потери устойчивости.

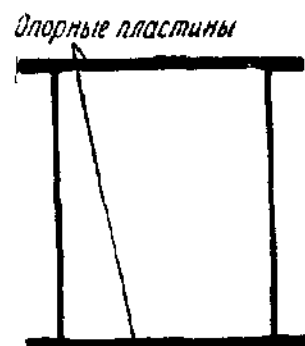


Рис. 166.

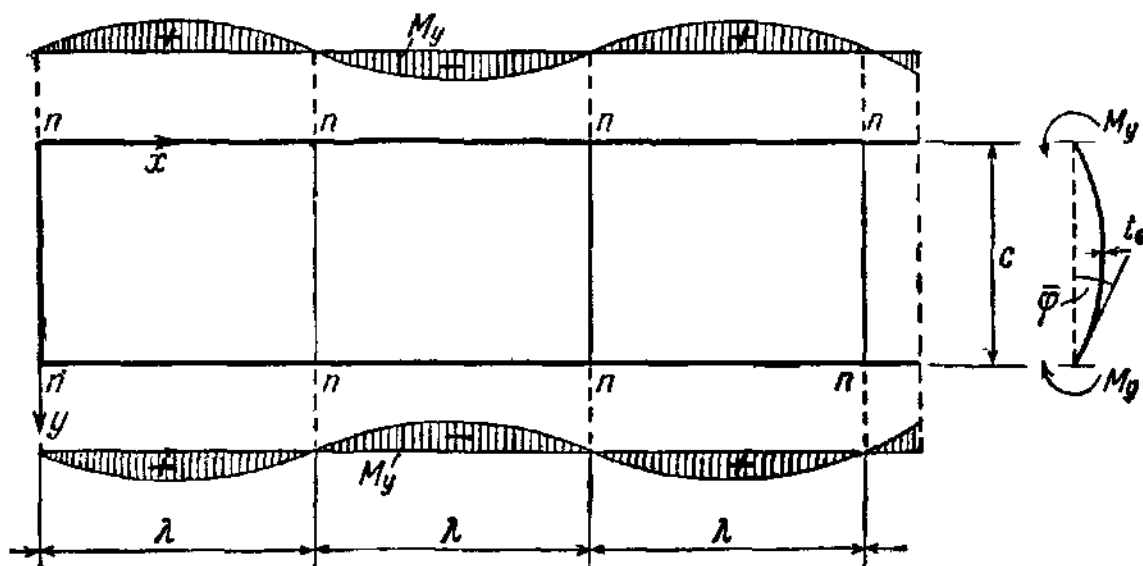


Рис. 167.

**Коробчатые сечения.** Начнем с примера для коробчатого сечения, показанного на рис. 164<sup>1)</sup>. При искривлении поперечного сечения на единицу длины обоих ненагруженных краев каждой опорной пластинки шириной  $c$  действуют моменты  $M_y$ , распределенные так, как это показано на рис. 167. На основе уравнения (624)

<sup>1)</sup> Общеупотребляемые заклепанные или сварные коробчатые сечения имеют вид, показанный на рис. 166. Влияние заземления наружных частей накладок сравнительно мало и его значением можно пренебречь,

закключаем, что момент  $M_y$  должен быть пропорционален значению  $\sin \frac{\pi x}{a}$ , где  $a$  обозначает длину пластинки, а  $\lambda = a/n$  — длину полу-волны. Распределение  $M_y$  вдоль краев  $a$  синусоидально, как это показано на рис. 167. Опорная пластинка деформируется попеременно вверх и вниз, и линии  $n-n$  на рис. 167 являются узловыми. Следовательно, каждая панель между двумя такими прямыми узловыми линиями представляет собой свободно опертую на всех четырех краях пластинку, симметрично нагруженную на двух противоположных краях переменными моментами  $M_y$  на единицу длины. Предполагая, что на опорную пластинку не действуют сжимающие силы, можно для этого особого условия нагружения вывести следующие выражения угла поворота  $\bar{\varphi}$  в функции от  $M_y$  <sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= -\frac{\lambda}{2\sqrt[4]{\tau} D'} \frac{1}{\pi} \operatorname{th} \frac{\pi c \sqrt[4]{\tau}}{2\lambda} \left[ 1 + \frac{\frac{\pi c \sqrt[4]{\tau}}{\lambda}}{\operatorname{sh} \frac{\pi c \sqrt[4]{\tau}}{\lambda}} \right] M_y = \\ &= -\frac{\lambda}{2\sqrt[4]{\tau} D'} \rho_1 \left( \frac{\sqrt[4]{\tau} c}{\lambda} \right) M_y. \end{aligned} \quad (654)$$

Трансцендентный член  $\rho_1$ , определяемый этим уравнением, не зависит от  $x$ , вследствие чего отношение момента  $M_y$  к углу поворота  $\bar{\varphi}$  постоянно вдоль края, как это предполагалось в уравнении (627). Величины  $c$  и  $t_c$  означают ширину и толщину опорной пластинки,  $D = Et_c^3/12(1 - \nu^2)$  — ее изгибную жесткость, а  $\lambda$  — длину полуволны выпученной пластинки.

Значение длины  $\lambda$  полуволны лежит между значениями  $0,668 \sqrt[4]{\tau} b$  для случая защемленных краев и  $\sqrt[4]{\tau} b$  для случая свободно опертых

<sup>1)</sup> Прогиб  $\bar{w}$  опорной пластинки можно определить из дифференциального уравнения (601). Вследствие предположения, что  $\sigma_x = 0$  последний член этого уравнения равен нулю, однако, принимая во внимание влияние анизотропии, вызванной сжимающими напряжениями  $\sigma_x$ , находящимися за пределом упругости, оставляем коэффициенты  $\tau$  и  $\sqrt[4]{\tau}$  в первых двух членах дифференциального уравнения. Для рассматриваемого условия нагружения  $M_y = C \sin \frac{\pi x}{l}$  прогиб  $\bar{w}$  можно выразить в следующем общем виде:

$$\bar{w} = \left( C_1 \operatorname{sh} \frac{\sqrt[4]{\tau} \pi y}{\lambda} + C_2 \operatorname{ch} \frac{\pi y \sqrt[4]{\tau}}{\lambda} + C_3 y \operatorname{sh} \frac{\pi y \sqrt[4]{\tau}}{\lambda} + C_4 y \operatorname{ch} \frac{\pi y \sqrt[4]{\tau}}{\lambda} \right),$$

где  $C_1, \dots, C_4$  являются постоянными величинами, которые определяются заданными граничными условиями. В случае, когда все четыре стороны пластинки свободно оперты, выражение для прогиба  $\bar{w}$  принимает следую-

краев, где  $b$  — ширина стенки<sup>1)</sup>. В целях упрощения предположим, что  $\lambda = \sqrt[4]{\tau} b$  не зависит от степени заземления краев стенки. Ошибка, допущенная в связи с таким предположением, незначительна и вполне безопасна, так как увеличение длины волн  $\lambda$  всегда влечет уменьшение действительного значения заделки. Вводя это значение  $\lambda$  в уравнение (654), получим  $\sqrt[4]{\tau} \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{b}$  и

$$\bar{\varphi} = -\frac{b}{2D'} \rho_1 \left( \frac{c}{b} \right) M_y. \quad (655)$$

На рис. 168 приведены значения  $\rho_1$  в функции от  $\sqrt[4]{\tau} \frac{c}{\lambda}$ . Кривая начинается в точке  $\rho_1 = 0$ ,  $\sqrt[4]{\tau} \frac{c}{\lambda} = 0$  достигает максимального значения  $\rho_1 = 0,386$  при  $\sqrt[4]{\tau} \frac{c}{\lambda} = 0,764$  и асимптотически стремится к значению  $\frac{1}{\pi}$ . Так как  $\frac{b}{2D'} \rho_1 \left( \frac{c}{b} \right)$  представляет собой коэффициент  $1/\zeta$  в уравнении (627), выражение для коэффициента  $\zeta$ , определенного уравнением (629), будет

$$\zeta = \frac{2}{b} \frac{D}{\zeta} = \frac{2D}{b} \frac{b}{2D'} \rho_1 \left( \frac{c}{b} \right) = \frac{t^3}{t_c^3} \rho_1 \left( \frac{c}{b} \right). \quad (656)$$

До сих пор мы пренебрегали влиянием продольных напряжений  $\sigma_x$  на жесткость опорной пластинки. Теперь, для того чтобы учесть это влияние, необходимо видоизменить уравнение (656); приближенно это можно сделать, умножая выражение (656) на следующий коэффициент:

$$r = \frac{1}{1 - \frac{t^2 c^2}{t_c^2 b^2}}. \quad (657)$$

Итого вид:

$$\bar{\varphi} = \frac{c\lambda}{2\pi D' \operatorname{sh} \left( \frac{\pi y \sqrt[4]{\tau}}{\lambda} \right)} \left[ \frac{y}{c} \operatorname{ch} \frac{\pi (y-c) \sqrt[4]{\tau}}{\lambda} + \left( 1 - \frac{y}{c} \right) \operatorname{ch} \frac{\pi y \sqrt[4]{\tau}}{\lambda} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi y \sqrt[4]{\tau}}{\lambda} + \operatorname{sh} \frac{(y-c) \pi \sqrt[4]{\tau}}{\lambda}}{\operatorname{sh} \frac{\pi y \sqrt[4]{\tau}}{\lambda}} \right] M_y$$

Используя соотношение  $\bar{\varphi} = \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right)_{y=c}$ , получим уравнение (654).

<sup>1)</sup> См. случаи 1 и 3 в таблице 26 на стр. 365.

Это выражение удовлетворяет точно условиям предельных случаев. Величина  $r$ , а следовательно и  $\zeta$ , становится бесконечной при  $t/b = t_c/c$ , когда обе пластинки свободно оперты. При условии, когда в связи с большой жесткостью опорных элементов отношение  $t^3 c^2 / t_c^2 b^3$  очень мало, значение  $r$  стремится к единице, что совершенно логично, так как в этом случае в уравнении (656) не требуется каких-либо

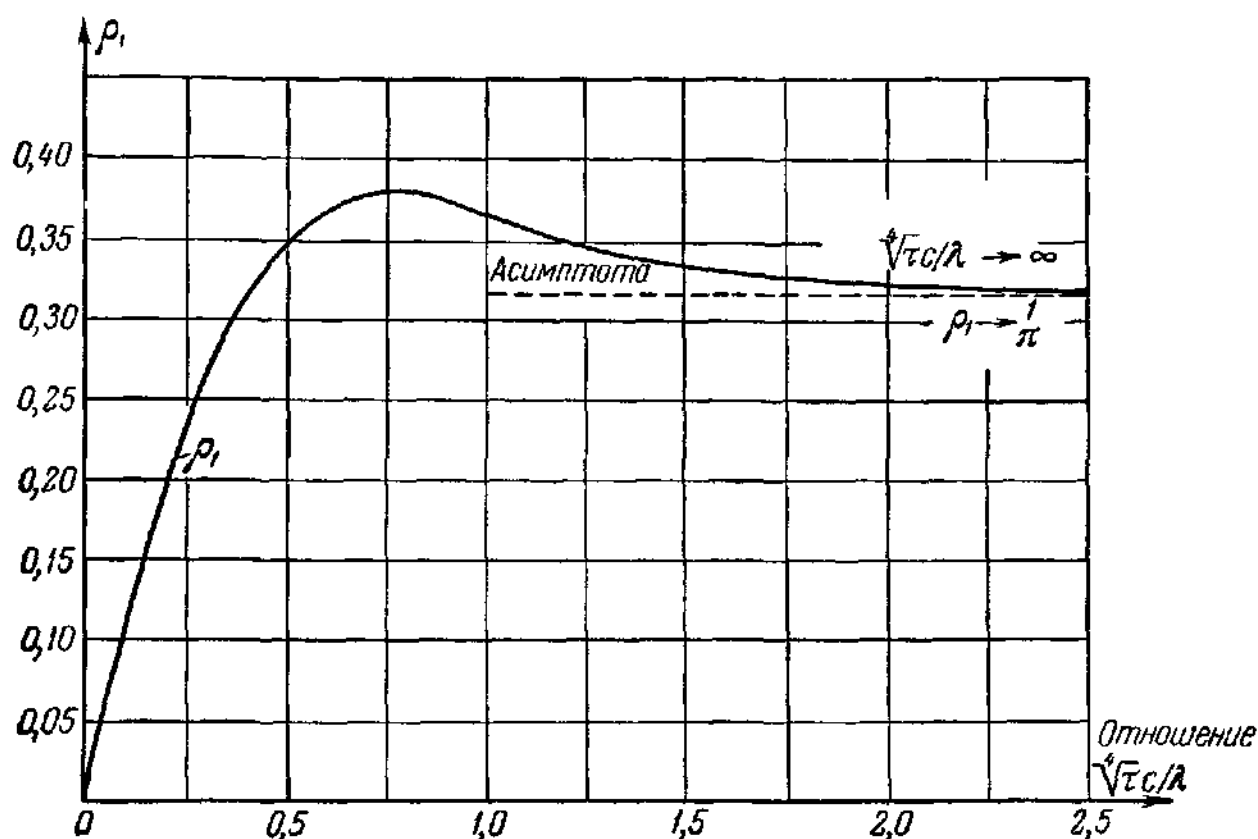


Рис. 168.

изменений. В результате, вводя выражение  $r$  как коэффициент в уравнение (656), получим:

$$\zeta = \frac{t^3}{t_c^3} \frac{\rho_1 \left( \frac{c}{b} \right)}{1 - \frac{t^2 c^2}{t_c^2 b^2}}. \quad (658)$$

Это уравнение применимо тогда, когда  $tc/t_c b \leq 1$ .

Вычисляя в любом данном случае значение  $\zeta$  при помощи диаграммы для  $\rho_1$ , приведенной на рис. 168, из рис. 161 можно найти значения параметров  $p$  и  $q$ . Отсюда получим значение коэффициента  $k = p + 2\sqrt{q}$ , требуемое для определения  $\sigma_{кр}$  по уравнению (640).

На рис. 169 показано применение вышеописанного метода. Значения  $k$  нанесены при  $t_c/t = 1$  и  $t_c/t = 2$  для значений отношений  $c/b$ , лежащих между нулем и единицей. Пунктирные кривые на рис. 169, взятые из диаграммы в работе Лундкуиста<sup>1)</sup>, выражают результаты

<sup>1)</sup> Лундкуист, цит. выше, стр. 368.



точного вычисления условия устойчивости коробчатого сечения. Обе сплошные кривые дают несколько меньше, чем в точном расчете

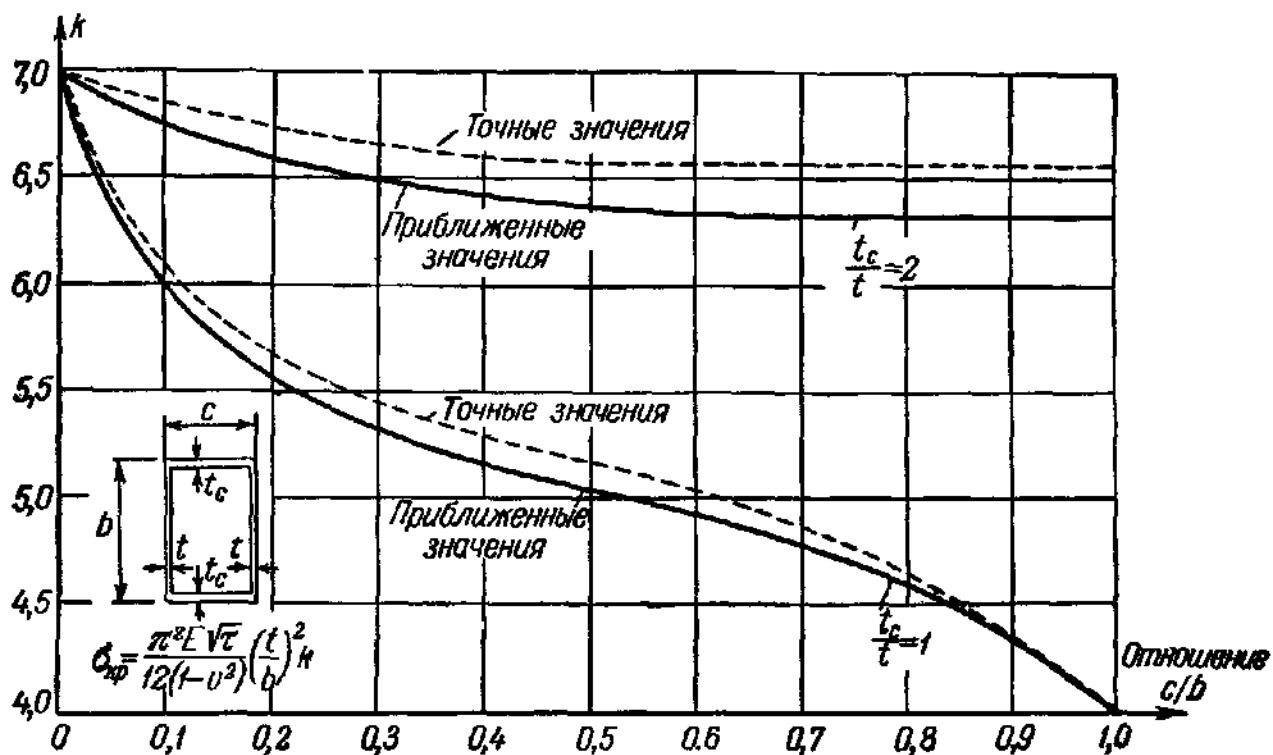


Рис. 169.

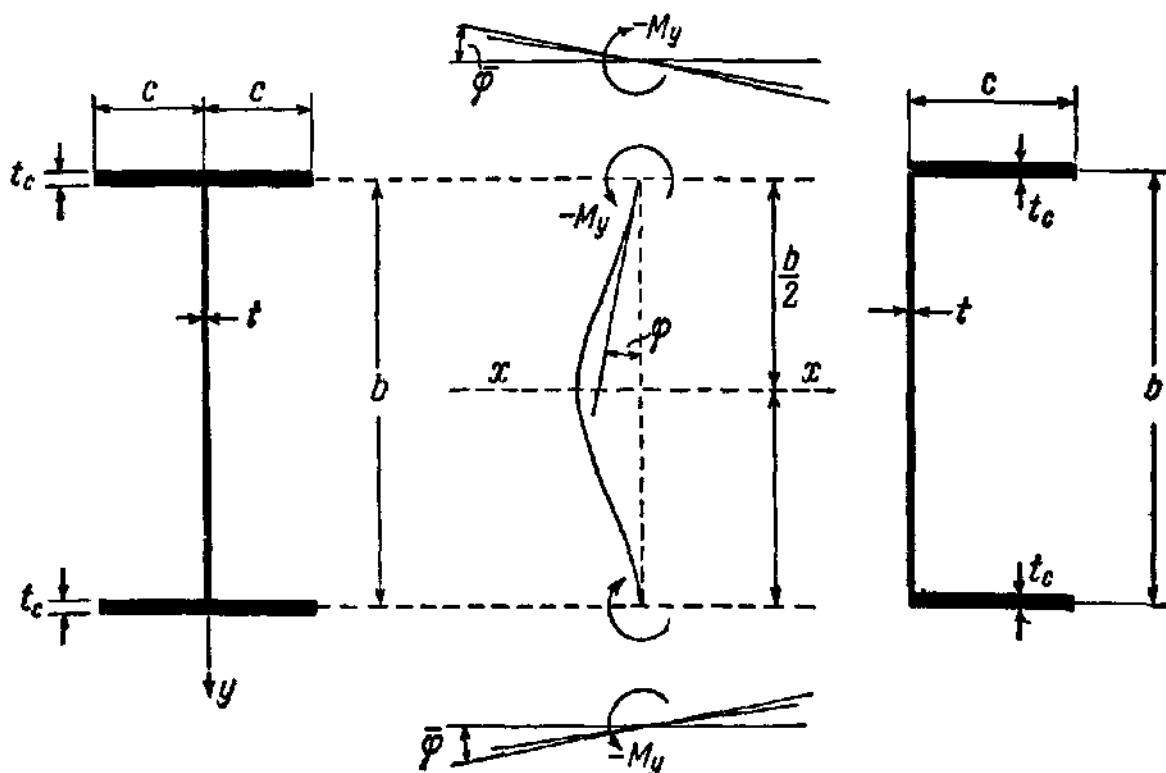


Рис. 170.

значения для  $k$ ; следовательно, приближенные результаты являются надежными. Максимальные отклонения точных и приближенных значений  $k$  достигают 2% от точного значения при  $t_c/t = 1$  и приблизительно 5% при  $t_c/t = 2$ . Эти отклонения являются главным образом

следствием упрощения, сделанного в результате предположения о том, что длины полуволн  $\lambda = b \sqrt[4]{\tau}$ . Этот факт объясняет появление большего расхождения при более высокой степени заделки.

**Стенки двутавровых и швеллерных сечений.** Вернемся теперь к двутавровым и швеллерным сечениям, стенки которых одинаково заделаны на обеих сторонах полками. Из рис. 170 видно, что в случае двутаврового сечения на каждой полке вдоль ее осевой линии действует момент  $M_y$ . Рассуждая так же, как и раньше, заключаем, что  $M_y$  меняется согласно закону  $\sin \frac{n\pi x}{a}$  с длиной полуволны  $\lambda = \frac{a}{n}$ . Исследуя это условие нагружения полки, получим следующее уравнение для угла поворота <sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} = - \frac{\lambda}{2 \sqrt[4]{\tau} D'} \frac{1}{2\pi} \frac{3 \operatorname{ch}^2 \left( \sqrt[4]{\tau} \frac{\pi c}{\lambda} \right) + \sqrt{\tau} \frac{\pi^2 c^2}{\lambda^2} + 1}{\frac{\pi c}{\lambda} \sqrt[4]{\tau} + 3 \operatorname{sh} \left( \frac{\pi c}{\lambda} \sqrt[4]{\tau} \right) \operatorname{ch} \left( \frac{\pi c}{\lambda} \sqrt[4]{\tau} \right)} M_y = \\ = - \frac{\lambda}{2 \sqrt[4]{\tau} D'} \rho_2 \left( \frac{c \sqrt[4]{\tau}}{\lambda} \right) M_y. \end{aligned} \quad (659)$$

Предполагая, как и раньше, что  $\lambda = \sqrt[4]{\tau} b$ , можно написать:

$$\bar{\varphi} = \frac{-b}{2D'} \rho_2 \left( \frac{c}{b} \right) M_y. \quad (660)$$

На рис. 171 показана функция  $\rho_2$ . Аналогичным способом из уравнений (627) и (629) получим:

$$\zeta = \frac{t^3}{t_c^3} \rho_2 \left( \frac{c}{b} \right). \quad (661)$$

Для того чтобы учесть влияние сжимающих напряжений, действующих в полках, это выражение нужно умножить на коэффициент

$$r = \frac{1}{1 - 9,4 \left( \frac{t^2 c^2}{t_c^2 b^2} \right)}. \quad (662)$$

Этот коэффициент определялся таким образом, чтобы его значение стало бесконечным для случаев, если полка и стенка как свободно опертые пластинки выпучиваются при одинаковом напряжении.

<sup>1)</sup> Это уравнение получено из общего решения, данного в сноске на стр. 370. Прогиб  $\bar{w}$  и угол поворота  $\bar{\varphi}$  определялись для одной половины полки, представляющей собой свободно опертую на трех сторонах и свободную на четвертой стороне пластинку, на которой действует момент  $M_y/2$  вдоль длинной опертой стороны.

В соответствии со случаями 1 и 4 таблицы 26 это происходит, если  $4(t/b)^2 = 0,425(t_c/c)^2$  или, после деления, если  $9,4t^2c^2/b^2t_c^2 = 1$ . Вводя  $r$  в уравнение (661), в результате получим следующее выражение коэффициента заделки  $\zeta$  для стенок двутавровых балок:

$$\zeta = \frac{t^3}{t_c^3} \frac{\rho_2 \frac{c}{b}}{1 - 9,4 \frac{t^2c^2}{t_c^2b^2}}. \quad (663)$$

Это уравнение применимо при условии, если  $9,4t^2c^2/t_c^2b^2 \leq 1$ .

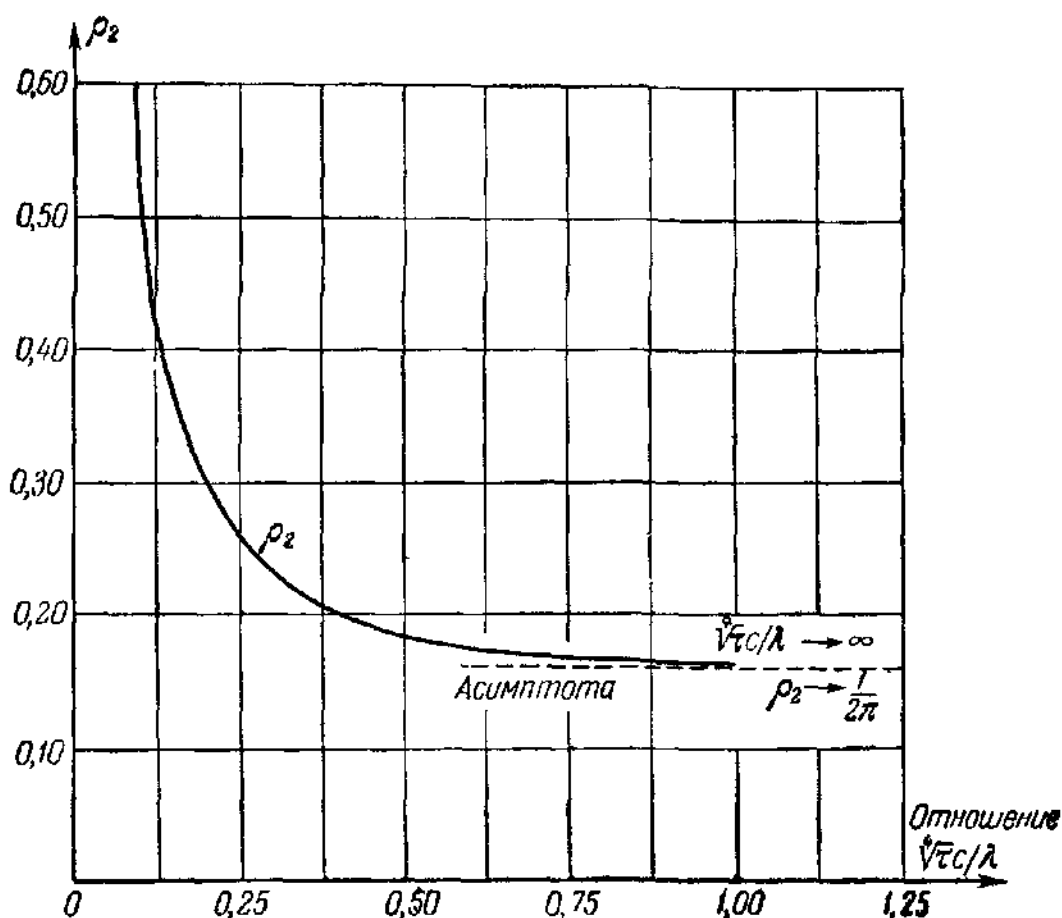


Рис. 171.

Легко видеть, что в случае швеллерных сечений (рис. 170) влияние заделки полки на половину меньше того же влияния в двутавровом сечении. Следовательно, значение  $\zeta$  становится вдвое больше значения, данного уравнением (663). Отсюда для швеллерных сечений имеем:

$$\zeta = 2 \frac{t^3}{t_c^3} \frac{\rho_2 \frac{c}{b}}{1 - 9,4 \frac{t^2c^2}{t_c^2b^2}}. \quad (664)$$

В случае, когда выражение  $9,4t^2c^2/t_c^2b^2$  больше единицы, подразумевается, что не стенка заделана в полке, а наоборот, полка

представляет собой более слабую пластинку, заделанную в стенке. Этот случай исследуется в следующем параграфе.

**Полки швеллерных и Z-образных сечений.** Полки некоторых типов поперечных сечений представляют собой свободно опертые по трем сторонам и свободные по одной длинной стороне пластинки с большим значением отношения  $\alpha$ . Такие условия опирания рассмотрены в случае II § 90.

Сначала исследуем условие заделки двух выступающих полок со стороны стенки поперечного сечения, показанного на рис. 172, а. Вдоль ненагруженных краев стенки действуют моменты  $M_y$ , аналогично рассмотренному ранее случаю с коробчатым сечением. Однако

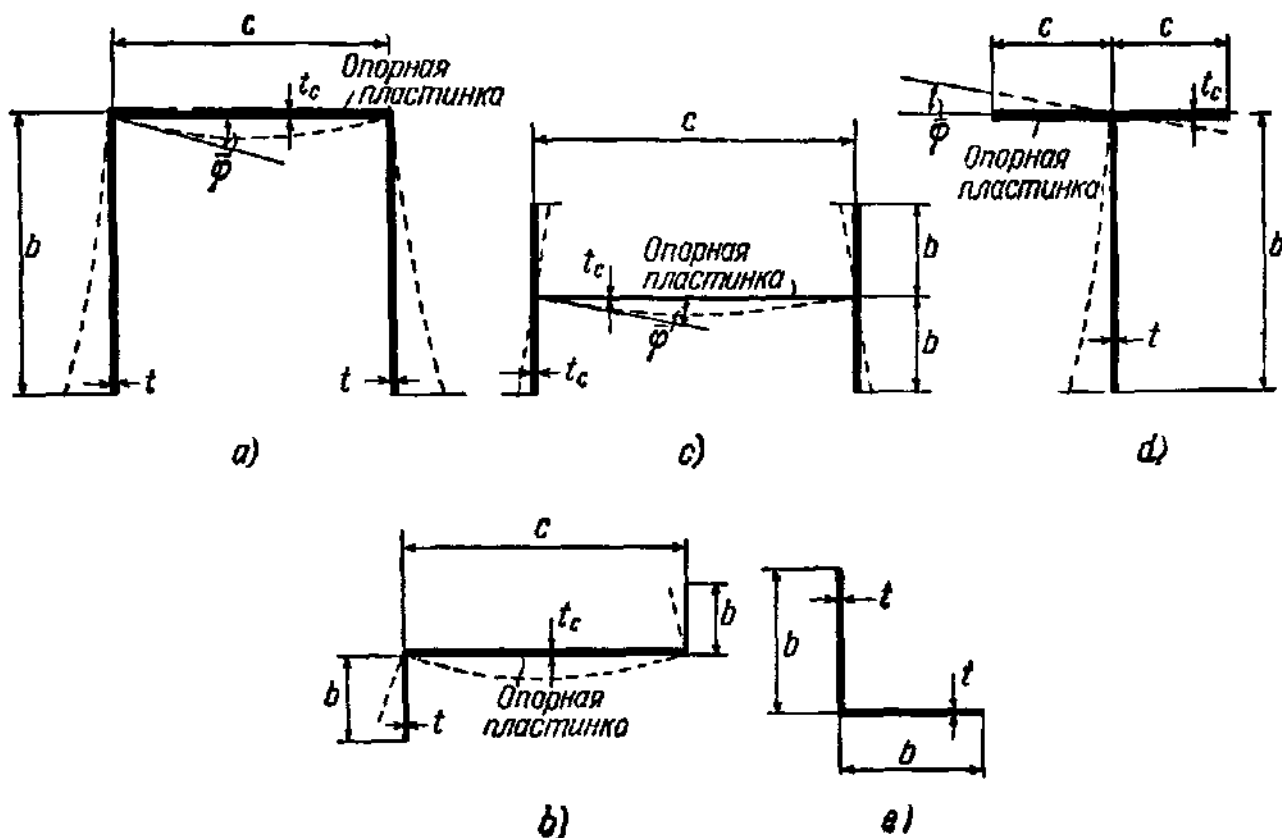


Рис. 172

теперь длина полуволн выпученной полки лежит между значением  $1,68b\sqrt[4]{\tau}$  и всей длиной  $a$  пластинки<sup>1)</sup>. Если предположить, что длина волн  $\lambda = \infty$ , получим приемлемый простой результат, введя это значение в уравнение (654):

$$\bar{\varphi} = -\frac{c}{2D'} M_y$$

и в результате

$$\zeta = \frac{D}{D'} \frac{c}{b} = \frac{t^3 c}{t_c^3 b}. \quad (665)$$

<sup>1)</sup> См. случаи 4 и 5 в таблице 26.

Поступая так же, как и раньше, можно учесть влияние сжимающих напряжений, действующих в закрепляющей стенке, вводя коэффициент  $r$  подобно выражению (662), учитывая, однако, что предельный случай  $\zeta = \infty$  имеет место при  $(0,425/4) (t^2 c^2 / t_c^2 b^2) = 1$ . Следовательно, для швеллерных сечений имеем:

$$\zeta = \frac{t^3}{t_c^3} \frac{c}{b} \frac{1}{1 - 0,106 \frac{t^2 c^2}{t_c^2 b^2}} \quad (666)$$

пригодное при  $0,106 t^2 c^2 / t_c^2 b^2 \leq 1$ . Это уравнение можно также применить для Z-образных сечений (рис. 172, б).

**Полки двутавровых сечений.** В случае двутавровых сечений (рис. 172, с), когда предполагается, что полки заделаны стенкой, имеем:

$$\bar{\varphi} = \frac{c}{D'} M_y,$$

и значение коэффициента заделки  $\zeta$  для полок будет

$$\zeta = 2 \frac{t^3}{t_c^3} \frac{c}{b} \frac{1}{1 - 0,106 \frac{t^2 c^2}{t_c^2 b^2}} \quad (667)$$

Кривые значений коэффициента  $k$ , опубликованные Стоуэллом и Лундкуистом<sup>1)</sup> для швеллерных и двутавровых сечений, дают возможность проверить точность выведенных выше выражений  $\zeta$  для выпучивания полки и стенки этих сечений. Значения коэффициента  $k$  двутавровых сечений определялись на основе уравнений (663) и (667) для двух отношений  $t_w/t_f = 1$  и  $t_w/t_f = 0,5$ , где  $t_w$  и  $t_f$  обозначают соответственно толщину стенки и полки. На рис. 173 значения  $k$  нанесены в зависимости от отношения  $b_w/b_f$ . Сплошные кривые вычислены на основе уравнений (663) и (666); пунктирные кривые изображают точные значения  $k$ , данные Стоуэллом и Лундкуистом. Легко видеть, что кривые значений  $k$ , построенные на основе приближенных формул для  $\zeta$ , достаточно точно совпадают с точными кривыми, и описанный выше метод дает в крайнем случае для практических целей довольно точные и заниженные значения  $k$ .

**Стенки тавровых сечений.** Стенка представляет собой пластинку, опертую и упруго заделанную против поворота вдоль одной стороны и свободную — на другой. К полке вдоль ее осевой линии приложен крутящий момент  $M_y$ , который меняется по закону  $\sin \frac{\pi x}{\lambda}$ , где  $\lambda$  — длина полуволн искривленной стенки. Величина  $\lambda$  лежит между значением  $1,68b \sqrt[4]{\tau}$  и всей длины пластинки<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Стоуэлл и Лундкуист, цит. выше, стр. 368.

<sup>2)</sup> См. случай 4 и 5 в таблице 26.

Значение угла поворота  $\bar{\varphi}$  на рис. 172,  $d$  дано уравнением (659). Пробные вычисления показывают, что даже в случае тонких и маленьких полок, употребляемых обычно в стальных конструкциях,

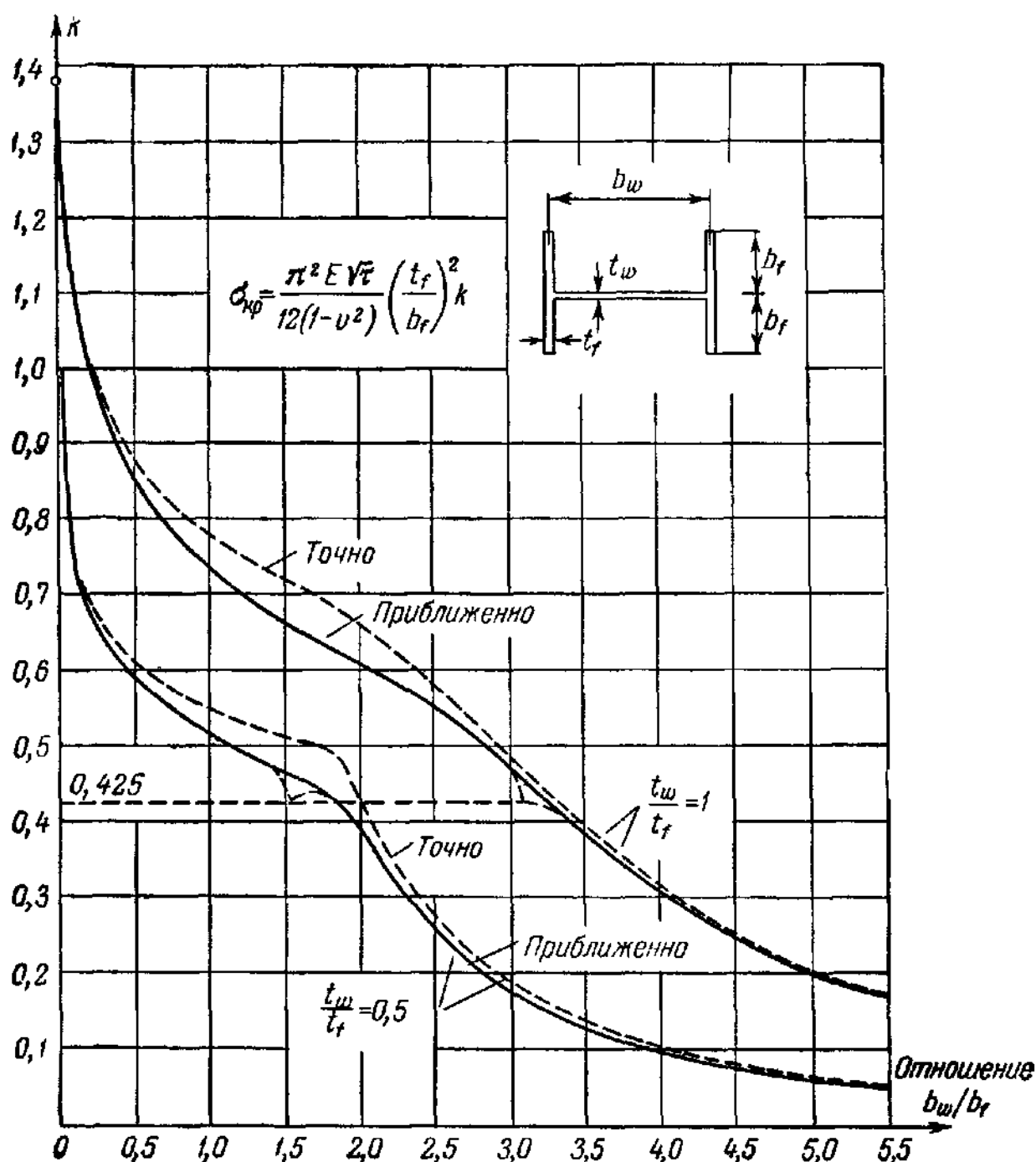


Рис. 173.

влияние заделки полки значительно, и длина полуволн, по которым выпучивается стенка, не превышает заметно значения  $2b\sqrt[4]{\tau}$ , где  $b$  — ширина стенки. Используя значение  $\lambda = 2b\sqrt[4]{\tau}$  и считая, что наибольшее значение отношения  $c/b$  равно  $1/5$ , на основе уравнения (659) находим  $c\sqrt[4]{\tau}/\lambda = c/2b = 1/10$  для  $\rho_2 = 0.53 = 1/2$  и по ана-

логии с предыдущим получим:

$$\zeta = \frac{t^3}{t_c^3}. \quad (668)$$

Это уравнение показывает, что значение  $\zeta$  зависит главным образом от отношения  $t/t_c$ .

Влияние сжимающих напряжений, действующих в подкрепляющей полке, можно вычислить, умножая это выражение на коэффициент  $r$ , определенный уравнением (657). В результате получим соотношение

$$\zeta = \frac{\frac{t^3}{t_c^3}}{1 - \frac{t^2 c^2}{t_c^3 b^3}}, \quad (669)$$

применимое при  $t/t_c \leq 1$  и  $c/b \leq 1$ .

**Полки уголков.** Легко убедиться в том, что каждая сторона уголка (рис. 172, *e*) ведет себя как свободно опертая на трех сторонах и свободная на четвертой стороне пластинка. В связи с тем, что обе стороны с предполагаемой равной шириной выпучиваются одновременно, ни одна из сторон не может сдерживать другую и, следовательно, значение коэффициента заделки  $\zeta$  равно бесконечности. В длинных уголках коэффициент устойчивости пластинки стремится к значению 0,425<sup>1)</sup>. Обе стороны уголка выпучиваются по одной полуволне.

В случае неравнобоких уголков малая сторона оказывает некоторое поддерживающее влияние на более широкую сторону. Точное решение задачи устойчивости неравнобоких уголков, данное автором книги, показывает, что в длинных уголках коэффициент устойчивости пластинки  $k$  стремится к значению 0,504 для отношения сторон 2 к 3 и к 0,568 для отношения сторон 1 к 2. Вышеприведенные значения  $k$  относятся к более широкой стороне и, следовательно, возникает необходимость использовать  $k$  в формуле для  $\sigma_{кр}$  вместе со значением гибкости  $b/t$  более широкой стороны. Независимо от длины уголка стороны выпучиваются по одной полуволне.

### 93. Определение значения критического напряжения в неупругой области выпучивания

В данной главе доказывается, что значение критического напряжения  $\sigma_{кр}$  длинных прямоугольных пластинок, продольно нагруженных сжимающими силами в своей плоскости, можно определить из следующей формулы:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k,$$

<sup>1)</sup> См. случай 1 в таблице 26.

Т а б л и ц а 27. Определение значения критического напряжения  $\sigma_{кр}$  для стали,  $\text{кг/см}^2$   
 ( $\sigma_{\pi} = 1760 \text{ кг/см}^2$ ;  $\sigma_{\tau} = 2330 \text{ кг/см}^2$ )

$\sigma_{кр}/\sqrt{\tau}$	$\sigma_{кр}$	$\sigma_{кр}/\sqrt{\tau}$	$\sigma_{кр}$	$\sigma_{кр}/\sqrt{\tau}$	$\sigma_{кр}$
1760	1760	2471	2002	8472	2298
1800	1781	2541	2018	9884	2305
1835	1797	2612	2032	11296	2310
1870	1813	2682	2045	12708	2314
1906	1827	2753	2058	14120	2318
1941	1842	2824	2070	17650	2322
1976	1856	3177	2120	21180	2324
2012	1869	3530	2156	28240	2326
2047	1882	3883	2185	35300	2328
2082	1894	4236	2206		
2118	1906	4942	2238		
2188	1928	5648	2259		
2259	1948	6354	2273		
2329	1967	7060	2283		
2400	1985				

Т а б л и ц а 28. Определение значений критического напряжения для стали,  $\text{кг/см}^2$   
 ( $\sigma_{\pi} = 2400 \text{ кг/см}^2$ ;  $\sigma_{\tau} = 3177 \text{ кг/см}^2$ )

$\sigma_{кр}/\sqrt{\tau}$	$\sigma_{кр}$	$\sigma_{кр}/\sqrt{\tau}$	$\sigma_{кр}$	$\sigma_{кр}/\sqrt{\tau}$	$\sigma_{кр}$
2400	2400	3247	2699	7060	3062
2435	2417	3318	2726	7766	3081
2471	2433	3388	2732	8472	3095
2506	2449	3459	2748	9178	3107
2541	2465	3530	2763	9884	3117
2576	2480				
		3671	2790	10690	3124
2612	2495	3812	2815	14120	3147
2647	2509	3953	2838	17650	3156
2682	2523	4094	2859	21180	3163
2718	2536	4236	2877		
2753	2550			28240	3169
2788	2562	4589	2918	35300	3172
		4942	2951	42360	3173
2824	2574	5295	2979		
2894	2598	5648	3003		
2965	2621	6001	3020		
3036	2642	6354	3036		
3106	2662	6707	3050		
3177	2684				



где коэффициент  $k$  не зависит от  $\tau$ . В упругой области выпучивания, когда  $\tau = 1$ , значение критического напряжения  $\sigma_{кр}$  можно вычислить непосредственно из этого уравнения. Однако в неупругой области величина  $\tau$ , зависящая от  $\sigma_{кр}$ , в начале расчета является неизвестной, поэтому значение  $\sigma_{кр}$  необходимо определить методом проб. Этого можно избежать, если вышеприведенное уравнение напишем в следующем виде:

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sqrt{\tau}} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k. \quad (670)$$

Определяя из этого уравнения значение  $\sigma_{кр}/\sqrt{\tau}$ , соответствующее значению  $\sigma_{кр}$ , можно найти из заранее вычисленной таблицы значения  $\sigma_{кр}$  в функции от  $\sigma_{кр}/\sqrt{\tau}$ . Такую таблицу можно составить, исходя из значений  $\tau$  рассматриваемого материала. Примерами такой таблицы являются таблицы 27 и 28.

Значения  $\tau$ , на базе которых составлялись эти таблицы, вычислены из уравнения (64) главы I. Таблица 27 применима для стали с пределом пропорциональности  $\sigma_{\pi} = 1760 \text{ кг/см}^2$  и пределом текучести  $\sigma_{\tau} = 2330 \text{ кг/см}^2$ , в то время как таблица 28 применима для  $\sigma_{\pi} = 2400 \text{ кг/см}^2$ ,  $\sigma_{\tau} = 3177 \text{ кг/см}^2$ <sup>1)</sup>.

#### 94. Расчетные формулы для требуемой толщины пластинчатых элементов сжатых стержней

Для того чтобы предотвратить внезапное разрушение сжатых элементов вследствие местного выпучивания, необходимо подобрать такое поперечное сечение, в котором отдельные пластинки имели бы одинаковое или большее сопротивление местному выпучиванию, чем весь элемент явлению выпучивания в целом сжатого стержня. Следовательно, значение критического напряжения местной неустойчивости должно быть равным или больше, чем значение критического напряжения, при котором сжатый стержень с гибкостью  $l/r$  выпучивается в целом. Это можно выразить следующим неравенством:

$$\frac{\pi^2 E \tau}{(l/r)^2} \leq \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k,$$

на основе которого получим следующий расчетный критерий:

$$\frac{b}{t} \leq \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{3(1-\nu^2)\sqrt{\tau}}} \frac{l}{r} = \frac{0,303}{\sqrt{\tau}} \frac{l}{r} \sqrt{k}. \quad (671)$$

Это уравнение указывает на тот важный факт, что допустимое значение отношения ширины пластинки  $b$  к толщине  $t$  возрастает по мере увеличения гибкости сжатого стержня. Следовательно,

<sup>1)</sup> Эти данные относятся (соответственно) к сталям со средним и высоким сопротивлением разрыву согласно спецификации № 48557 Военно-морского департамента США, ноябрь 1945 г.

в гибких сжатых стержнях можно применять более тонкие стенки, чем в коротких.

Обозначая выражение  $(0,303/\sqrt[4]{\tau})(\frac{l}{r})$  в уравнении (671) через  $C$ , получим:

$$\frac{b}{t} \leq C \sqrt{k}. \quad (672)$$

Коэффициент  $C$  является функцией только от гибкости  $l/r$ , в то время как величина  $\tau$  зависит от характерного для данного материала критического напряжения  $\sigma_{кр}$ , которое в свою очередь на основе кривой критических напряжений является функцией от  $l/r$ . Следовательно, исходя из кривой критических напряжений, для любого материала можно построить кривую значений  $C$ . Для значений напряжений, находящихся выше предела пропорциональности, эти кривые значений  $C$  можно аппроксимировать алгебраическими выражениями вида

$$C = a \sqrt{\frac{l}{r}} - b, \quad (673)$$

где  $a$  и  $b$  являются постоянными, зависящими от формы кривой критических напряжений рассматриваемого материала.

Определяя значения  $\tau$  на основе уравнения (64), выведем выражение (673) для стали<sup>1)</sup> с пределом пропорциональности  $\sigma_{\pi} = 1760 \text{ кг/см}^2$  и пределом текучести  $\sigma_{\tau} = 2330 \text{ кг/см}^2$

$$\left. \begin{aligned} 20 < \frac{l}{r} < 108; \quad C &= 3,37 \sqrt{\frac{l}{r}} - 2,30; \\ \frac{l}{r} > 108; \quad C &= 0,303 \frac{l}{r}; \end{aligned} \right\} \quad (673a)$$

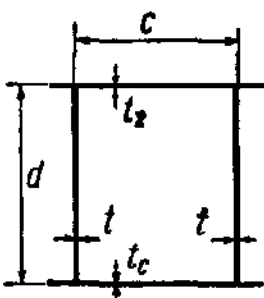
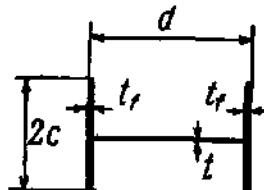
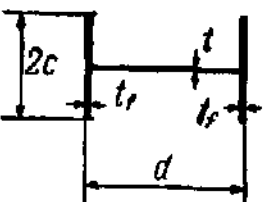
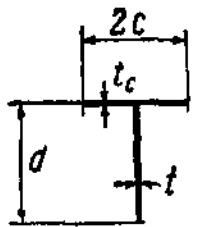
при  $\sigma_{\pi} = 2400 \text{ кг/см}^2$ ,  $\sigma_{\tau} = 3177 \text{ кг/см}^2$

$$\left. \begin{aligned} 20 < \frac{l}{r} < 93; \quad C &= 3,17 \sqrt{\frac{l}{r}} - 2,40; \\ \frac{l}{r} > 93; \quad C &= 0,303 \frac{l}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (673b)$$

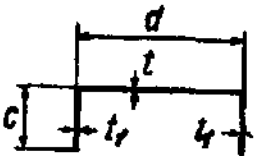
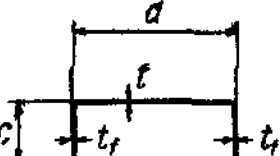
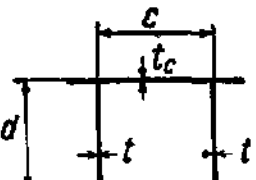
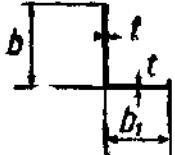
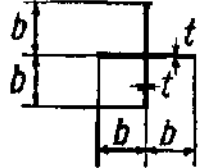
Для того чтобы получить допустимое значение отношения  $b/t$  из уравнения (672), необходимо определить коэффициент устойчивости пластинки  $k$  при помощи кривых, приведенных на рис. 161 и 163 в §§ 89 и 90. Для применения результатов, полученных в этих параграфах, нужно использовать выведенные в § 92 значения коэффициента заделки  $\zeta$ . Несмотря на то, что способ вычисления коэффициента пластинки  $k$  из уравнений (641) и (652) ( $k = p + 2\sqrt{q}$ ), не представляет трудностей, его можно еще более упростить,

<sup>1)</sup> См. сноску на стр. 381.

Таблица 29. Расчетные формулы для требуемой толщины пластинчатых элементов сжатых стержней. [Значения коэффициента  $C$  определяются уравнениями (673a) и (673b)]

Форма поперечного сечения	Коэффициент заделки $\zeta$	$\sqrt{k}$	Требуемая толщина пластинки
<p>Стенки коробчатого сечения</p> 	$\zeta = \frac{t^3}{t_c^3} \frac{0,38}{1 - \frac{t^2}{t_c^2} \frac{c^2}{d^2}}$ <p>Справедливо при <math>\frac{tc}{t_c d} \leq 1</math></p>	$2 + \frac{2}{10\zeta + 3}$	$\frac{d}{t} \leq C\sqrt{k}$
<p>Стенка двутаврового сечения</p> 	$\zeta = \frac{t^3}{t_f^3} \frac{0,16 + 0,0056 (d/c)^2}{1 - 9,4 \frac{t^2}{t_f^2} \frac{c^2}{d^2}}$ <p>Справедливо при <math>9,4 \frac{t^2 c^2}{t_f^2 d^2} \leq 1</math></p>	$2 + \frac{2}{10\zeta + 3}$	$\frac{d}{t} \leq C\sqrt{k}$
<p>Полки двутаврового сечения</p> 	$\zeta = 2 \frac{t_f^3 d}{t^3 c} \frac{1}{1 - 0,106 \frac{t_f^2}{t^2} \frac{d^2}{c^2}}$ <p>Справедливо при <math>9,4 \frac{t^2 c^2}{t_f^2 d^2} \geq 1</math></p>	$0,65 + \frac{2}{3\zeta + 4}$	$\frac{c}{t_f} \leq C\sqrt{k}$
<p>Стенка таврового сечения</p> 	$\zeta = \frac{t^3}{t_c^3} \frac{1}{1 - 0,106 \frac{t^2}{t_c^2} \frac{c^2}{d^2}}$ <p>Справедливо при <math>0,106 \frac{t^2 c^2}{t_c^2 d^2} \leq 1</math></p>	$0,65 + \frac{2}{3\zeta + 4}$	$\frac{d}{t} \leq C\sqrt{k}$

Продолжение табл. 29

Форма поперечного сечения	Коэффициент заделки $\zeta$	$\sqrt{k}$	Требуемая толщина пластинки
Стенка швеллерного сечения 	$\zeta = 2 \frac{t^3}{t_f^3} \frac{0,16 + 0,0056 (d/c)^2}{1 - 9,4 \frac{t^2}{t_f^2} \frac{c^2}{d^2}}$ Справедливо при $9,4 \frac{t^2 c^2}{t_f^2 d^2} \leq 1$	$2 + \frac{2}{10\zeta + 3}$	$\frac{d}{t} \leq C \sqrt{k}$
Полки швеллерного сечения 	$\zeta = \frac{t_f^3 d}{t^3 c} \frac{1}{1 - 0,106 \frac{t_f^2}{t^2} \frac{d^2}{c^2}}$ Справедливо при $9,4 \frac{t^2 c^2}{t_f^2 d^2} \geq 1$	$0,65 + \frac{2}{3\zeta + 4}$	$\frac{c}{t} \leq C \sqrt{k}$
Стенки U-образного сечения *) 	$\zeta = \frac{t^3}{t_c^3} \frac{c}{d} \frac{1}{1 - 0,106 \frac{t^2}{t_c^2} \frac{c^2}{d^2}}$ Справедливо при $9,4 \frac{t_c^2 d^2}{t^2 c^2} \geq 1$	$0,65 + \frac{2}{3\zeta + 4}$	$\frac{d}{t} \leq C \sqrt{k}$
Уголок 	$\frac{b_1}{b} = 1 : \frac{b}{t} \leq 0,652 C$ $\frac{b_1}{b} = \frac{2}{3} : \frac{b}{t} \leq 0,711 C$ $\frac{b_1}{b} = \frac{1}{2} : \frac{b}{t} \leq 0,754 C$		
Крестообразное сечение 		$\frac{b}{t} \leq 0,652 C$	

\*) Приведенная формула неприменима в случае, если нижние края стенок соединены решеткой.

ближенно выражая  $\sqrt{k}$  при помощи алгебраических функций от  $\zeta$  следующим образом; на основе уравнения (641) и рис. 161 для граничных условий случая I:

$$\sqrt{k} = 2 + \frac{2}{10\zeta + 3}; \quad (674)$$

на основе уравнения (652) и рис. 163 для граничных условий случая II:

$$\sqrt{k} = 0,65 + \frac{2}{3\zeta + 4}. \quad (675)$$

Эти выражения теоретически не обоснованы; они получены путем построения кривых значений  $\sqrt{k}$  в функции от  $\zeta$  и подбора выражений, аппроксимирующих эти кривые.

Значения коэффициента  $\zeta$  в уравнениях (674) и (675), определенные в § 92 для некоторых форм поперечного сечения и для практического применения, приведены в таблице 29 в § 94. В некоторых случаях эти значения являются функциями коэффициентов  $\rho_1\left(\frac{c}{b}\right)$  или  $\rho_2\left(\frac{c}{b}\right)$ , приведенных на рис. 168 и 171. В связи с тем, что на практике значение отношения  $c/b$  для каждого сечения меняется только в ограниченных пределах, в таблице 29 эти коэффициенты заменены либо постоянным значением, либо простым алгебраическим выражением.

Автор книги и Бейлард<sup>1)</sup> составили таблицы расчетных характеристик для различных сечений, подобные таблице 29.

## 95. Опыты с выпучиванием пластинок

**Опыты с выпучиванием, проведенные в Швейцарии.** Вышеупомянутые опыты Кольбруннера<sup>2)</sup> были поставлены главным образом для проверки теории сжатых длинных прямоугольных пластинок во всей упругой и неупругой области. Испытывалось более 500 стальных уголков и уголков из алюминиевого сплава с различными размерами поперечного сечения и длинами, а также 349 пластинок из алюминиевого сплава с различными условиями опирания ненагруженных краев. Опыты проводились над уголками в связи с тем, что каждая сторона его ведет себя как свободно опертая на одном краю и свободная на другом пластинка; по сравнению с другими постановками опытов в данном случае возможность появления случайной заделки на опертом краю мала. На рис. 174 приведена экспериментальная кривая, на которой отмечено, что, за исключением двух образцов, выпучивание произошло в упругой области. Для

<sup>1)</sup> Блейх, цит. выше, стр. 338; Бейлард, цит. выше, стр. 338.

<sup>2)</sup> Кольбруннер, цит. выше, стр. 339.

всех значений отношения  $\alpha$  экспериментальные точки хорошо совпадают с теоретической кривой устойчивости, построенной на основе уравнения (647) при значениях  $\tau = 1$  и  $p = 0,425$ ,  $q = 0$ , полученных из кривой, показанной на рис. 163 для  $\xi = \infty$ .

Кольбруннер определил критические напряжения  $\sigma_{кр}$  на основе значений  $\tau_r$ , полученных из диаграммы зависимости между напряжением и деформацией, согласно теории двойного модуля. Он обнаружил, что наблюдаемые значения  $\sigma_{кр}$  имеют тенденцию оставаться

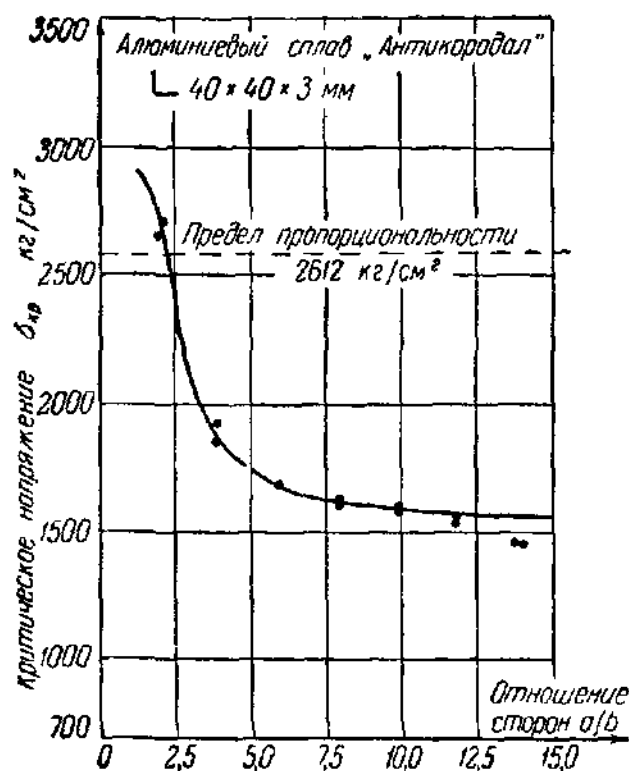


Рис. 174.

несколько ниже вычисленных значений. Для того чтобы получить лучшее соответствие между теорией и экспериментом, он предлагал заменить величину  $\sqrt{\tau}$  в уравнениях (637) и (647) через  $(\tau_r + \sqrt{\tau_r})/2$ .

Однако, применяя теорию касательного модуля, на которой основывается изложение этой главы, можно получить хорошее соответствие между теорией и опытами, не прибегая к произвольной замене  $\sqrt{\tau}$  на  $(\tau_r + \sqrt{\tau_r})/2$ . Этот факт был установлен на основе ряда сравнительных вычислений. На рис. 175 приведен пример соответствия между наблюдаемыми и рассчитанными значениями критических напряжений. На ней показана типичная экспериментальная кривая выпучивания пластинки в неупругой области. Кривая 1, построенная на основе уравнения (647), где значение  $\tau$  определялось в соответствии с теорией касательного модуля, дает значение критического напряжения  $\sigma_{кр}$  в зависимости от отношения  $a/b$ . Кривая 2 построена в предположении изотропного поведения пластинки в пластической области (теория Роша — Бруннера). Соответствие между экспериментальными точками и кривой 1 удовлетворительно, тогда как кривая 2 лежит явно ниже измеренных значений.

На рис. 175 помечены значения  $\tau = E_t/E$ , полученные на основе диаграммы зависимости между напряжением и деформацией, приведенной в работе Кольбруннера.

В своих опытах над пластинками из алюминиевого сплава Кольбруннер исследовал четыре вида опирания ненагруженных краев, а именно: один край зашпелен, другой — свободен; оба края свободно оперты; один край зашпелен, другой свободно оперт; оба

края зашлемлены<sup>1)</sup>. Было проведено только несколько серий таких опытов, когда значение критического напряжения превзошло предел пропорциональности, но они могут служить для сопоставления данных опытов с теоретическими результатами в неупругой области. В таблице 30 приведены результаты этих опытов, а также значения  $\sigma_{кр}$ , рассчитанные из уравнения (640), где значение  $\tau$  определялось согласно теории касательного модуля. В последних двух столбцах даны наблюдаемые и подсчитанные числа полуволи.

Соответствие между измеренными и вычисленными значениями напряжений настолько удовлетворительно, насколько можно было ожидать от опытов, в которых значение критического напряжения лежит выше предела упругости. Вычисленные и наблюдаемые числа полуволи вполне совпадают только в случае свободно опертых по ненагруженным краям пластинок. В двух других сериях опытов, когда были зашлемлены один или два края, подсчитанное число полуволи лежит явно выше наблюдаемого значения. Это может быть обусловлено

тем, что края в действительности не были полностью зашлемлены. Расчет напряжений и чисел полуволи при условии наличия частичной упругой заделки образцов, соответствующей значению коэффициента заделки  $\zeta = 0,12$ , дает значения напряжений, лежащие на несколько десятков ниже, чем вычисленные напряжения при  $\zeta = 0$ . Однако подсчитанное число полуволи значительно уменьшается и в достаточной степени совпадает с наблюдаемыми данными. В таблице 30 результаты, полученные для  $\zeta = 0,12$ , приведены в скобках.

Эти серии тщательно поставленных опытов над пластинками дали возможность сравнить результаты теории пластинок Ильюшина в пластической области с наблюдаемыми значениями критических

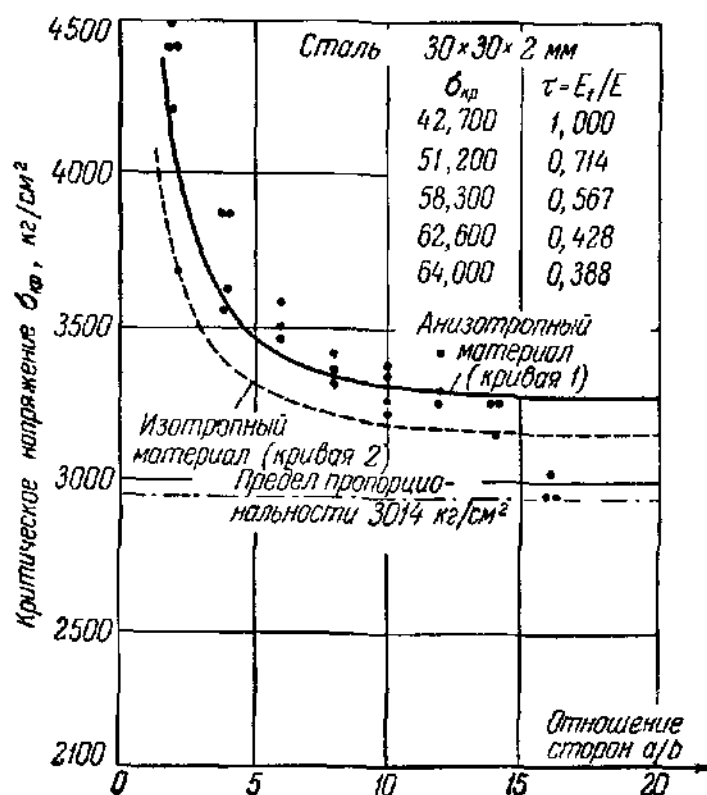
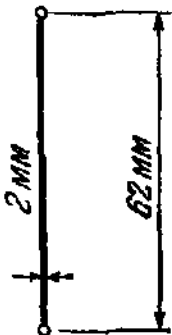




Рис 175.

<sup>1)</sup> Модуль упругости материала составлял  $E = 0,72 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, а предел пропорциональности  $\sigma_p = 1976$  кг/см<sup>2</sup>.

Таблица 30. Сравнение теоретических результатов с данными опытов Кольбруннера

Образец	Отношение длины к ширине	Наблюдаемое среднее критическое напряжение в трех опытах, кг/см <sup>2</sup>	Среднее значение критического напряжения	Критическое напряжение, подсчитанное из уравнения (640), кг/см <sup>2</sup>	Разность, %	Число полуоволн	
						наблюдаемое	подсчитанное из уравнения (639)
	3,23	2132	2125	2139	0,7	3	4
	4,84	2103				5	5
	6,45	2110				7	7
	8,17	2160				9	9
	3,77	2803	2739	2703 (2668)	1,3 (2,6)	6	7 (6)
	5,76	2703				8	10 (9)
	7,55	2703				11	13 (12)
	9,44	2760				14	16 (14)
	4,55	2873	2944	3021 (2993)	2,6 (1,7)	9	10 (9)
	6,83	2951				13	17 (14)
	9,10	3021				18	24 (19)
	11,35	3021				24	29 (24)



напряжений<sup>1)</sup>. Сопоставление данных опытов в таблице 30 для свободно опертой и защемленной пластинок показывает, что результаты, полученные из теории Ильюшина, дают значения критических напряжений, которые лежат явно выше наблюдаемых. Опыты показывают, что пластинки теряли устойчивость при значениях критических напряжений, лежащих значительно ниже значений, предсказанных теорией Ильюшина. Сравнения этих опытов с описанной в § 87 теорией Стоуэлла не проводилось, однако эта теория неизбежно дает меньшие значения критических напряжений, чем теория Ильюшина, и следовательно, можно считать, что она лучше соответствует данным опытов.

**Опыты с выпучиванием, проведенные в Америке.** Джерард<sup>2)</sup> исследовал явление местного выпучивания с целью выяснения вопроса о применении эффективного модуля  $E_s$  при расчете пластинок. Отношение  $\eta = E_s/E$  представляет собой безразмерный коэффициент, на который нужно умножить критическое напряжение  $\sigma_{кр}$ , вычисленное для случая упругого выпучивания, чтобы получить критическое напряжение, когда  $\sigma_{кр}$  лежит выше предела упругости. Джерард предлагал воспользоваться секущим модулем  $E_s$  и считал, что  $\eta = E_s/E$ . Исходя из формулы для пластинок в упругой области, которую можно написать в следующем сокращенном виде:

$$\frac{\sigma_{кр}}{E} = K \left( \frac{t}{b} \right)^2,$$

он рассуждал следующим образом:  $\sigma_{кр}/E$  представляет собой критическую деформацию  $\epsilon_{кр}$ , при которой происходит выпучивание. Предполагая, что уравнение

$$\epsilon_{кр} = K \left( \frac{t}{b} \right)^2$$

применимо в упругой и неупругой областях, он получил следующую формулу для неупругого случая:

$$\frac{\sigma_{кр}}{E_s} = K \left( \frac{t}{b} \right)^2, \quad (676)$$

допустив, что критическое напряжение и критическая деформация связаны, хотя и не явно, диаграммой зависимости между напряжением и деформацией материала. Джерард обнаружил хорошее соответствие между своими опытными результатами и значениями  $\sigma_{кр}$ , вычисленными из уравнения (676). Однако в опытах, проведенных с швеллерными и Z-образными сечениями, исследовалось только

<sup>1)</sup> Kollbrunner C. F., Herrmann G., Stabilität der Platten im plastischen Bereich, Theorie von A. Il'yushin mit Vergleichswerten von durchgeführten Versuchen, Mitteilungen 20, Institut für Baustatik, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich, 1947.

<sup>2)</sup> Gerard G., Secant Modulus Method for Determining Plate Instability above the Proportional Limit. Jour. Aeronaut. Sci., т. 13, стр. 38, 1946,

выпучивание полки, поэтому общая применимость уравнения (676) ставится под сомнение, так как оно противоречит теории касательного модуля выпучивания сжатых стержней. Следовательно, вопрос о применимости уравнения (676) для свободно опертых на обоих ненагруженных краях пластинок остается открытым.

Этот вопрос можно объяснить на основе теории Стоуэлла, рассмотренной в § 87. Из теоретической части его исследования вытекает, что в случае выпучивания пластинки значение эффективного

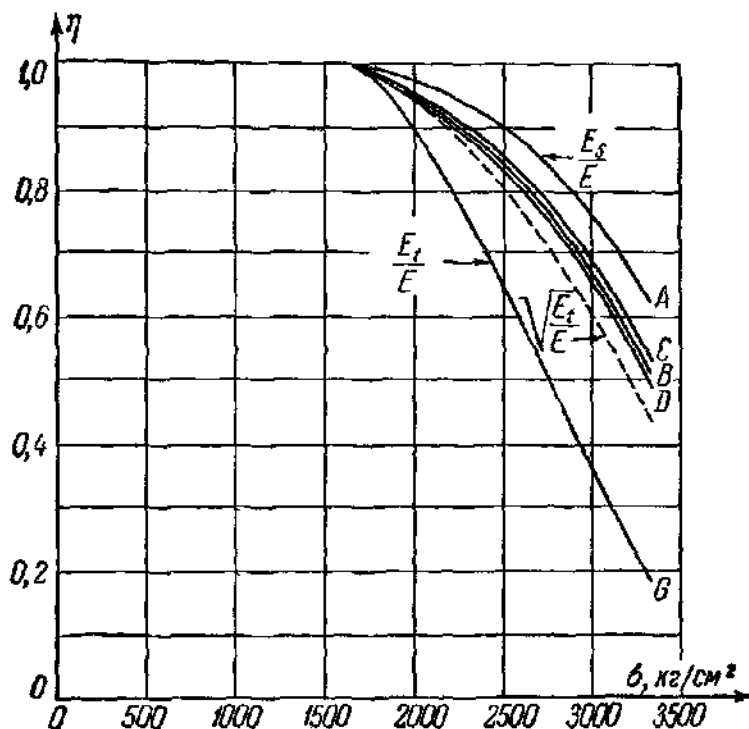


Рис. 176.

модуля лежит в окрестности значения секущего модуля. Величина  $\eta$  принимает значение  $E_s/E$  в случае длинной шарнирно опертой полки, которая выпучивается в результате кручения, однако она явно уменьшается, когда полка закреплена вдоль одной стороны или когда пластинка оперта на обоих ненагруженных краях. В этих случаях значение  $\eta$  является функцией от  $E_s$  и  $E_t$ . В таблице 31 приведены формулы  $\eta$  для длинных пластинок при различных граничных условиях и для сжатых стержней. Числовые значения  $\eta$  вычислены на основе диаграммы зависимости между напряжением и деформацией для прессованных алюминиевых сплавов и выражены кривой, приведенной на рис. 176. Очевидно, что за исключением полок, не заделанных вдоль опертого края (кривая A), кривые значений  $\eta$  лежат очень близко друг к другу (кривые B, C и D). Наконец, кривая G представляет собой значения  $\eta = E_t/E$  для сжатых стержней, соответствующие теории касательного модуля.

В лаборатории имени Лэнгли (Langley Memorial Aeronautical Laboratory, Langley Field, Va) были поставлены многочисленные опыты с целью выяснения вопроса о применимости при расчете устойчивости пластинок эффективного модуля. Результаты этих опытов подтверждают правильность теории пластического выпучивания Стоуэлла, особенно его предположение о том, чтобы при наличии длинных полок, которые закручиваются без заметного изгиба, использовать секущий модуль в качестве эффективного модуля<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Heimerl G. J., Determination of Plate Compressive Strength, NACA Tech. Note, 1480, 1947,

Таблица 31. Безразмерный коэффициент  $\eta$  для пластинок и стержней

Тип пластинки	$\eta$	Кривая на рис. 176
Длинная полка, один свободно опертый ненагруженный край	$\frac{E_s}{E}$	A
Длинная полка, один защемленный ненагруженный край	$\frac{E_s}{E} \left( 0,428 + 0,572 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{E_t}{E}} \right)$	B
Длинные пластинки, оба ненагруженных, свободно опертых края	$\frac{E_s}{E} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{E_t}{E}} \right)$	C
Длинные пластинки, оба ненагруженных защемленных края	$\frac{E_s}{E} \left( 0,352 + 0,648 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{E_t}{E}} \right)$	D
Стержни	$\frac{E_t}{E}$	G

Интересно сравнить значения  $\eta$ , данные кривыми A—D на рис. 176, со значением  $\eta = \sqrt{E_t/E}$  для длинных пластинок, выведенным на базе приближенной теории пластинок, основанной на дифференциальном уравнении (601). Значения  $\sqrt{E_t/E}$  были вычислены при помощи кривой G на рис. 176 и нанесены на ней в виде пунктирной кривой. Можно заключить, что эту кривую, которая не зависит от граничного условия вдоль ненагруженных краев, можно рассматривать как предельную кривую для коэффициента  $\eta$ , дающую заниженные значения критических напряжений.

## 96. Выводы и заключительные замечания

Теорию местной неустойчивости тонкостенных сжатых элементов можно считать вполне разработанной. Она основывается на теории устойчивости прямоугольных пластинок, нагруженных на двух противоположных краях равномерно распределенными сжимающими силами. Эта теория подтверждается различными опытами в упругой и неупругой областях. Решение задачи о пластинке для двух основных случаев, рассмотренных в §§ 89 и 90, и приближенные методы, описанные в § 92 для определения значения коэффициента заделки  $\zeta$ , дали возможность установить эффективные расчетные формулы, представленные в таблице 29. При помощи этих расчетных формул можно определить требуемое отношение толщины тонких стенок

сжатого стержня в зависимости от его гибкости  $l/r$ . Эти формулы могут заменить расчетные приемы многих инструкций, используемых в настоящее время при проектировании конструкций.

В заключение этой главы необходимо рассмотреть один важный факт, относящийся к поведению пластинок в послекритическом состоянии. Идеальный сжатый стержень внезапно теряет устойчивость, если достигнута критическая сила, так как он не может выдержать нагрузку выше критической. Однако в случае, если критическое напряжение, при котором начинается выпучивание пластинки, лежит в достаточной степени ниже предела текучести, нагрузку на пластинку можно значительно увеличить за пределом критического значения, вызывая лишь небольшое увеличение прогиба до тех пор, пока не достигнута предельная нагрузка пластинки. Такое деформированное состояние при напряжениях выше критического напряжения пластинки сопровождается перераспределением сжимающих напряжений по поперечному сечению; эти напряжения больше не являются равномерно распределенными. Что касается расчета сжатых стержней мостов и зданий, было бы неправильным использовать то обстоятельство, что предельная нагрузка пластинок часто лежит явно выше критического напряжения. Формулы для основного выпучивания сжатых стержней основываются на предположении о том, что напряжения равномерно распределены по поперечному сечению до тех пор, пока не достигнута предельная нагрузка сжатого стержня. Любое изменение в распределении напряжений уменьшает несущую способность сжатого стержня вследствие того, что некоторые части поперечного сечения не были полностью эффективными. Следовательно, пластинчатые элементы необходимо рассчитывать таким образом, чтобы искривления поперечного сечения в результате местного выпучивания не происходили бы прежде основного выпучивания сжатого стержня в целом.

При проектировании самолетов применяется несколько другой метод, особенно при расчете подкрепленных плоских панелей, где используются более тонкие пластинки, чем в обычных стальных конструкциях и где низкое значение модуля упругости  $E$  алюминиевых или магниевых сплавов увеличивает значение местного выпучивания.

Если использовать понятие об эффективной ширине тонких пластинок, то только часть поперечного сечения в случае основного выпучивания конструкции будет при расчете эффективной. Следовательно, пластинчатые элементы можно нагружать выше критических напряжений местного выпучивания, несмотря на уже учтенный факт уменьшения прочности первоначальной конструкции.

Совершенно очевидно, что различие между методами, применяемыми при проектировании обычных стальных конструкций и самолетов, не является случайным. Если понятие эффективной ширины, использованное при проектировании самолетов, применять к расчету

тяжелого стального сжатого стержня. то получилось бы, что то сечение экономично, в котором эффективная ширина всех пластинок составляет 100%; это означает, что пластинки не должны выпучиваться раньше, чем достигнута критическая сила всего сжатого стержня. С другой стороны, для слабо нагруженных тонкостенных сжатых стержней понятие эффективной ширины является рациональным. Дальнейшее рассмотрение послекритического поведения пластинок и понятие эффективной ширины приведены в главах X и XII.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Rode H., Beiträge zur Theorie der Knickerscheinungen, Der Eisenbau, т. 7, стр. 217, 1916.

Schwerin E., Über die Knicksicherheit ebener Bleche bei exzentrischer Randbelastung, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. 3, стр. 422, 1923.

Timoshenko S., Stability and Strength of Thin-walled Constructions, Proc. 3d Intern. Cong. Applied Mechanics, т. 3, стр. 1, Stockholm, 1930.

Bleich F., Die Stabilität dünner Wände gedruckter Stäbe, Prelim. Pubs. 1st Cong. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., Paris, 1932, стр. 130.

Schleicher F., Stabilität leicht gekrümmter Rechteckplatten, Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng. Pubs., т. 1, стр. 433, 1932.

Sezawa K., Das Ausknicken von allseitig befestigten und gedruckten Rechteckplatten, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. 12, стр. 227, 1932.

Sattler K., Beitrag zur Knicktheorie dünner Platten, Mitteilungen aus den Forschungsanstalten des Gutehoffnungshütte-Konzerns, т. 3, стр. 257, 1935.

Heck O. S., Ebner H., Methods and Formulas for Calculating the Strength of Plate and Shell Structures as Used in Aircraft Design. Translation in NACA Tech. Mem. 785, 1936.

Kaufmann W., Über unelastisches Knicken rechteckiger Platten, Ingenieur Archiv, т. 7, стр. 156, 1936.

Iguchi S., Allgemeine Lösung der Knickaufgabe für rechteckige Platten Ingenieur — Archiv., т. 7, стр. 207, 1936.

Lundquist E. E., Local Instability of Centrally Loaded Columns of Channel-section and Z-section, NACA Tech. Note 722, 1939.

Hill H. N., Chart for Critical Compressive Stress of Flat Rectangular Plates, NACA Tech. Note 773, 1940.

Moisseiff L. S., Lienhard F., Theory of Elastic Stability Applied to Structural Design, Trans. ASCE, т. 106, стр. 1052, 1941.

Lundquist E. E., Stowell E. Z., Restraint Provided a Flat Rectangular Plate by Sturdy Stiffener along the Edges of the Plate, NACA Tech. Note 735, 1942.

Kroll W. D., Tables of Stiffness and Carry-over Factor for Flat Rectangular Plates under Compression, NACA Wartime Rept. L-398, 1943.

Kroll W. D., Fisher G. P., Heimerl G. J., Charts for Calculation of the Critical Stress for Local Instability of Columns with I-, Z-, Channel- and Rectangular-tube Section, NACA Wartime Rept. L-429, 1943.

Hoff N. J., Note on Inelastic Buckling, Jour. Aeronaut. Sci., т. 11, стр. 163, 1944.

Reissner E., Buckling of Plates with Intermediate Rigid Supports, Jour. Aeronaut. Sci., т. 12, стр. 375, 1945.

Budiansky B., Hu P. C., The Lagrangian Multiplier Method of Finding Upper and Lower Limits to Critical Stresses of Clamped Plates, NACA Tech. Note 1103, 1946.

Hu P. C., Lundquist E. E., Batdorf S. B., Effects of Small Deviations from Flatness on Effective Width and Buckling of Plates in Compression, NACA Tech. Note 1124, 1946.

Pflüger A., Zum Beulproblem der anisotropen Rechteckplatte, Ingenieur — Archiv, т. 16, стр. 111, 1947.

Houbolt J. C., Stowell E. Z., Critical Stress of Plate Columns, NACA Tech. Note 2163, 1950.

---

## ГЛАВА X

### ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПЛАСТИНКИ С ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

#### 97. Введение

Продольно сжатая, опертая на все четыре края пластинка с большим значением отношения  $\alpha = a/b$  выпучивается по нескольким полуволнам при длине, находящейся между значениями  $0,668 \sqrt[4]{\tau} b$  и  $\sqrt[4]{\tau} b$  в соответствии со степенью заделки вдоль ненагруженных сторон  $a$  пластинки<sup>1)</sup>. Очевидно, что подкрепление пластинки при помощи поперечных ребер жесткости будет иметь малое влияние на критическую нагрузку пластинки, если они не расположены близко друг к другу. Критическое сжимающее напряжение пластинки значительно возрастет только при условии, если расстояние между поперечными ребрами жесткости намного меньше ширины пластинки; в этом случае пластинка выпучится по более коротким полуволнам, чем в случае неподкрепленной пластинки.

Обычно более экономичная конструкция получается при помощи введения одного или более продольных ребер жесткости. Эти ребра жесткости не только воспринимают часть сжимающей нагрузки, но и разделяют пластинки на ряд маленьких панелей, значительно увеличивая, таким образом, критическое напряжение выпучивания пластинки.

Тимошенко впервые исследовал важную задачу устойчивости прямоугольных пластинок, опертых на все четыре края и подкрепленных ребрами жесткости, и особенно задачу о минимальной жесткости этих ребер, необходимой для того, чтобы в подкрепленной пластинке выпучивание произошло в той части, которая находится между ребрами. Используя свой энергетический метод, он получил приближенные решения для прямоугольных пластинок с продольными или поперечными ребрами жесткости при разных условиях

---

<sup>1)</sup> См. таблицу 26 на стр. 365.

нагружения<sup>1)</sup>. Тимошенко мы обязаны также появлением первых числовых таблиц для расчета подкрепленных пластинок.

Локшин<sup>2)</sup> опубликовал точное решение задачи для продольно или поперечно подкрепленных пластинок, находящихся под действием равномерно распределенных на двух противоположных краях сжимающих напряжений. Он получил условие устойчивости пластинок с любым числом равнорасположенных ребер жесткости. Позже Барбре<sup>3)</sup> исследовал влияние продольных ребер жесткости для двух частных случаев, а именно: когда имеется одно ребро в середине пластинки и когда два ребра делят ширину пластинки на три равные панели. Он дал таблицы и диаграммы для подбора ребер жесткости. Аналитическое исследование было основано на дифференциальном уравнении (600) в главе IX. Барбре исследовал как свободно опертые пластинки, так и пластинки, защемленные на ненагруженных краях. Позднее тем же самым автором было опубликовано детальное исследование задачи устойчивости пластинок с продольными или поперечными ребрами жесткости<sup>4)</sup>. Локшин, так же как и Барбре, рассматривал устойчивость подкрепленных пластинок только в упругой области.

В 1930 г. Мелан<sup>5)</sup> опубликовал данные исследования прямоугольных пластинок, опертых на обоих длинных краях на упругие ребра. Позже Рендулик<sup>6)</sup> дал общее подробное исследование той же самой задачи. Эта задача рассматривалась Майлсом<sup>7)</sup>, который распространил свое исследование на пластинки с упругим ребром на одном ненагруженном крае, тогда как другой край свободно оперт или полностью защемлен. Во всех вышеупомянутых работах предполагалось, что пластинка свободно вращается вдоль опертых краев, откуда следует, что эти ребра при выпучивании пластинки не сопротивляются кручению.

Хвалла<sup>8)</sup> впервые исследовал влияние крутильной жесткости краевых упругих кромок или ребер и доказал значительное влияние

<sup>1)</sup> Timoshenko S., Über die Stabilität versteifter Platten, Der Eisenbau, 1921, стр. 147.

<sup>2)</sup> Локшин А. С., О расчете пластинок с ребрами жесткости, Прикл. математ. и механ., 1935, т. 2, стр. 225.

<sup>3)</sup> Barbré R., Beulspannungen in Rechteckplatten mit Längssteifen bei gleichmässiger Druckbeanspruchung, Der Bauingenieur, т. 17, стр. 268, 1936.

<sup>4)</sup> Barbré R., Stabilität gleichmässig gedrückter Rechteckplatten mit Längs- oder Quersteifen, Ingenieur-Archiv, т. 8, стр. 117, 1937.

<sup>5)</sup> Melan E., Über die Stabilität von Stäben, welche aus einem mit Randwinkeln verstärkten Blech bestehen, Proc. 3d Intern. Congr. Applied Mechanics, т. 3, стр. 59, 1930.

<sup>6)</sup> Rendulic L., Über die Stabilität von Stäben, welche aus einem mit Randwinkeln verstärkten Bleche bestehen, Ingenieur-Archiv, т. 3, стр. 447, 1932.

<sup>7)</sup> Miles A. J., Stability of Rectangular Plates Elastically Supported at the Edges, Jour. Applied Mechanics, т. 3, стр. A-47, 1936.

<sup>8)</sup> Chwalla E., Das allgemeine Stabilitätsproblem der gedrückten, durch Randwinkel verstärkten Platte, Ingenieur-Archiv, т. 5, стр. 54, 1934.



этой крутильной жесткости на критическое напряжение пластинки. Уинденберг<sup>1)</sup> рассмотрел случай свободно опертой пластинки, свободно вращающейся вдоль одной стороны и опертой на другой на упругое ребро, сопротивляющееся боковому перемещению и кручению.

Все упомянутые до сих пор работы относились к задаче определения значения критической нагрузки и комбинаций ребер жесткости с пластинкой. В предыдущей главе уже упоминалось, что в случае очень тонких пластинок такие комбинации в состоянии выдержать предельные нагрузки, значительно превышающие нагрузку местного выпучивания пластинки. Однако необходимо подчеркнуть, что задача определения предельной нагрузки явно отличается от задачи определения критической нагрузки и, следовательно, нельзя их путать. Вопросу о предельной нагрузке подкрепленных пластинок придавалось большое значение в связи с тем, что он является решающим при проектировании самолетов. Послекритическое поведение отдельных неподкрепленных прямоугольных плоских панелей уже исследовано<sup>2)</sup>, однако эквивалентная задача для подкрепленных панелей является слишком сложной для аналитического рассмотрения. Основываясь на данных опытов, Лундквист<sup>3)</sup> пришел к заключению о том, что можно добиться хорошего приближения, включив в поперечное сечение ребра жесткости некоторую эффективную часть пластинки.

Настоящая глава посвящена в основном изложению теорий, связанных с определением критических нагрузок подкрепленных пластинок; вопрос о предельной прочности рассматривается только в § 103. На основе приведенной теории подкрепленных пластинок введены простые расчетные формулы для необходимой жесткости ребер с той целью, чтобы комбинации ребер и пластинки дали заранее установленные значения критических напряжений. В связи с тем, что на ребра жесткости действуют те же сжимающие напряжения, что и на пластинку, их можно рассматривать как сжатые стержни; рассмотрим также вопрос об устойчивости самих ребер жесткости, которые необходимо рассчитывать, принимая во внимание возможности крутильной или местной формы потери устойчивости.

Решения различных задач о выпучивании, рассмотренных в следующих параграфах, можно получить, усовершенствуя теорию, рассмотренную в предыдущей главе. Теория и ее математические выкладки являются довольно сложными при условии неравного расположения ребер жесткости. В следующем параграфе этот метод описан для случая одного продольного ребра жесткости, расположенного

---

<sup>1)</sup> Windenburg D. F., The Elastic Stability of Tee Stiffeners, U. S. Experimental Model Basin, Rep. t. 457, 1938.

<sup>2)</sup> См. главу XII.

<sup>3)</sup> Lundquist E. E., Comparison of Three Methods for Calculating the Compressive Strength of Flat and Slightly Curved Sheets and Stiffener Combination, NACA Tech. Note 455.

в осевой линии пластинки. Другие случаи вкратце рассматриваются в §§ 99 и 100. В § 101 исследовались случаи с упруго заделанными пластинками, а в § 102 — особая задача местной неустойчивости ребер жесткости. Вопрос о предельной прочности подкрепленной панели изложен в § 103.

### 98. Свободно опертые пластинки, подкрепленные одним ребром жесткости вдоль осевой линии

Рассмотрим прямоугольную пластинку длиной  $a$ , шириной  $b$  и толщиной  $t$ , подкрепленную вдоль осевой линии продольным ребром жесткости (рис. 177, а). Площадь поперечного сечения ребра жесткости обозначим через  $A$ , момент инерции — через  $J$ . Предполагается,

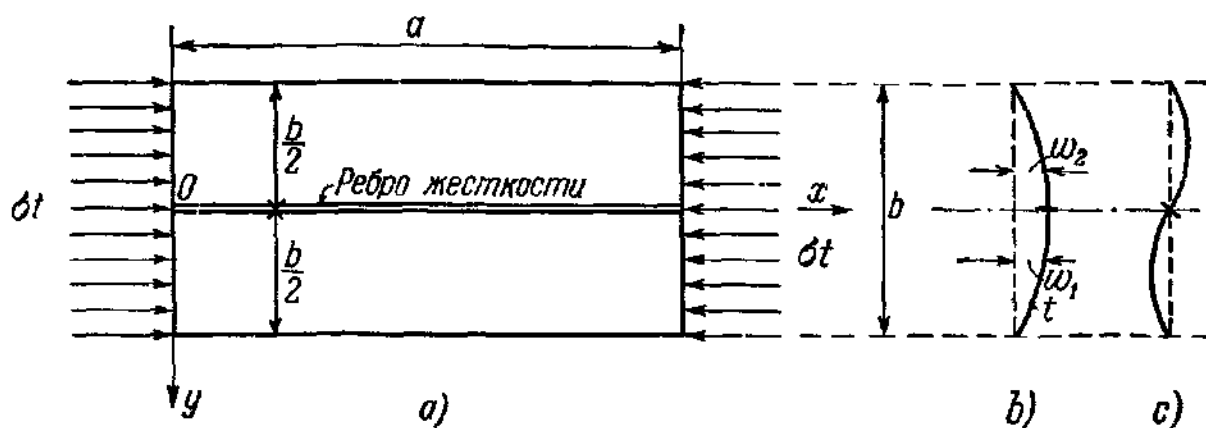


Рис. 177.

что осевая линия ребра жесткости лежит в срединной плоскости пластинки и, следовательно, момент инерции  $J$  вычислен относительно оси ребра жесткости, лежащей в этой плоскости. Крутильная жесткость ребра считается малой и ею можно пренебречь; учитывается только изгибная жесткость ребра в плоскости, перпендикулярной к пластинке. Выберем систему координат  $x, y$  с началом  $O$  в середине левого края пластинки. Пластика нагружена равномерно распределенной нагрузкой  $\sigma t$ , действующей на краях  $x=0$  и  $x=a$ . Предполагается, что ребро жесткости приклепано или приварено к пластинке и находится под действием такого же сжимающего напряжения, как и пластинка.

Вводим следующие обозначения:

$$\gamma = \frac{EJ}{Db} = \frac{12(1-\nu^2)J}{bt^3}; \quad (677)$$

$$\delta = \frac{A}{bt}. \quad (678)$$

Коэффициент  $\gamma$  представляет собой отношение изгибной жесткости ребра и жесткости пластинки шириной  $b$ , а  $\delta$  — отношение площади поперечного сечения ребра жесткости к площади  $bt$  пластинки.

Вследствие симметрии пластинки с ребром жесткости перемещение выпученной системы будет одним из следующих двух: 1) симметричная конфигурация с изогнутым ребром жесткости (рис. 177, *b*); 2) антисимметричная конфигурация, где ребро жесткости остается прямым (рис. 177, *c*). В последнем случае узловая линия выпученной пластинки совпадает с осью ребра, и каждая половина пластинки ведет себя как свободно опертая на четырех краях пластинка длиной  $a$  и шириной  $b/2$ . В связи с тем, что поверхность прогиба имеет линию перегиба по узловой линии, изгибающий момент не передается от одной половины пластинки к другой. В этом случае критическая нагрузка системы пластинки с ребром достигает своего максимального значения.

Антисимметричная форма поверхности перемещения (рис. 177, *c*) имеет место в случае, когда значение отношения жесткостей  $\gamma$  больше некоторого значения  $\gamma_0$ . Важно отметить, что критическое напряжение в случае антисимметричного выпучивания не зависит от значения  $\gamma$ ; оно является критическим напряжением для свободно опертой пластинки шириной  $b/2$ . Симметричная форма поверхности перемещения, где ребро жесткости изгибается вместе с пластинкой, имеет место при значениях  $\gamma$ , находящихся ниже  $\gamma_0$ . При значении  $\gamma_0$  обе формы одинаково возможны. Следовательно, можно ограничить исследование рассмотрением формы симметричного выпучивания для значений  $\gamma < \gamma_0$  и определением предельного значения  $\gamma_0$ , соответствующего минимальному значению изгибной жесткости подкрепляющего ребра, обеспечивающее антисимметричное выпучивание системы. Наибольшее возможное значение критического напряжения  $\sigma_{кр}$  системы для заданного отношения  $b/t$  соответствует антисимметричной форме выпучивания, причем найденное значение  $\gamma_0$  позволяет выбрать экономичную конструкцию, в которой местное выпучивание пластинки и основное выпучивание пластинки с ребром жесткости происходят одновременно<sup>1)</sup>.

Общего метода решения задачи для всех значений напряжений, находящихся ниже и выше предела пропорциональности, не существует, однако теории Тимошенко и Барбре можно распространить в неупругую область. Используя обобщенное дифференциальное уравнение (601) для неупругого выпучивания, выведенное в предыдущей главе, рассмотренную задачу можно решить без особых затруднений. Однако аналитическое решение задачи представляет собой настолько сложную функцию от характеристики материала  $\tau = E_s/E$ , что численная оценка результатов становится очень трудоемкой.

---

<sup>1)</sup> Конструкция, где местное выпучивание пластинки и основное выпучивание всей системы происходят при одном и том же напряжении, не всегда является наиболее экономичной, если расчет основывается на предельной нагрузке, а не на критической нагрузке.

Как было указано выше, неизвестной в рассматриваемой задаче является величина  $\gamma$ , зная которую можно подсчитать момент инерции  $J$  ребра жесткости. Для того чтобы получить подходящий расчетный метод для ребра жесткости, применяемый как в упругой, так и в неупругой областях выпучивания, можно использовать более простое дифференциальное уравнение (604), дающее основу для приближенного исследования. Это уравнение дает значения  $\gamma$ , которые являются теоретически точными для случаев, когда критическое напряжение находится ниже предела пропорциональности<sup>1)</sup>, и приближенными, когда оно лежит выше этого предела.

На этой основе исследуем симметричную форму выпученной пластинки и выведем условие устойчивости, которое будет содержать отношения  $\gamma$  и  $\delta$  как параметры. Прогиб выпученной пластинки выражается уравнением (622) главы IX:

$$w_1 = \sin \frac{n\pi x}{a} (C_1 \operatorname{ch} k_1 y + C_2 \operatorname{sh} k_1 y + C_3 \cos k_2 y + C_4 \sin k_2 y), \quad (679)$$

где  $w_1$  обозначает прогиб нижней половины пластинки;  $y \geq 0$ . Как следствие симметрии нет необходимости написать аналогичное выражение для прогиба  $w_2$  другой половины пластинки. Коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  определяются уравнениями (631a):

$$k_1 \frac{b}{2} = \frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt{\mu + 1} \quad \text{и} \quad k_2 \frac{b}{2} = \frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt{\mu - 1}, \quad (680)$$

где  $\alpha = a/b$ . Значение  $\mu$  получается из уравнения (630):

$$\mu = b \frac{\alpha}{n\pi} \sqrt{\frac{\sigma_{\text{сп}} t}{D\tau}}. \quad (681)$$

Четыре постоянные  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  в уравнении (679) можно определить из следующих граничных условий:

при  $y = +\frac{b}{2}$ :

$$w_1 = 0, \quad (681a)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0; \quad (681b)$$

при  $y = 0$ :

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = 0, \quad (681c)$$

$$Q_1 - Q_2 = q. \quad (681d)$$

Через  $Q_1$  и  $Q_2$  обозначены поперечные силы на единицу длины в пластинках, примыкающих к ребру жесткости (рис. 178). Условие (681d) выражает тот факт, что разность поперечных сил равна нагрузке  $q$ , действующей на ребро жесткости. С учетом осевой

<sup>1)</sup> Уравнения (601) и (604) становятся идентичными при  $\tau = 1$ .

нагрузки  $\sigma_{кр}A$  в ребре жесткости дифференциальное уравнение его прогиба  $w$  будет

$$EJ\tau \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \sigma_{кр}A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q. \quad (682)$$

Выражение для разности  $Q_1 - Q_2$  имеет вид

$$Q_1 - Q_2 = q = -D\tau \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} - (2 - \nu) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right]_{y=0}.$$

Вследствие симметрии имеем следующие соотношения:

$$\left[ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right]_{y=0} \quad \text{и} \quad \left[ \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} = - \frac{\partial^3 w_2}{\partial y^3} \right]_{y=0}$$

и, следовательно,

$$q = -2D\tau \left[ \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} \right]_{y=0}. \quad (683)$$

Прогиб  $w$  ребра жесткости и прогиб  $w_1$  пластинки и их производные при  $y=0$  должны быть равны

$$w = [w_1]_{y=0}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \left[ \frac{\partial w_1}{\partial x} \right]_{y=0} \quad \text{и т. д.,}$$

и в результате на основе уравнений (682) и (683) получим следующее выражение для граничного условия (681d):

$$\left[ 2 \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} + \gamma b \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \delta \frac{\sigma_{кр} b t}{D\tau} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right]_{y=0} = 0. \quad (684)$$

Вводя решение (679) в граничные условия (681a) — (681c) и (684),

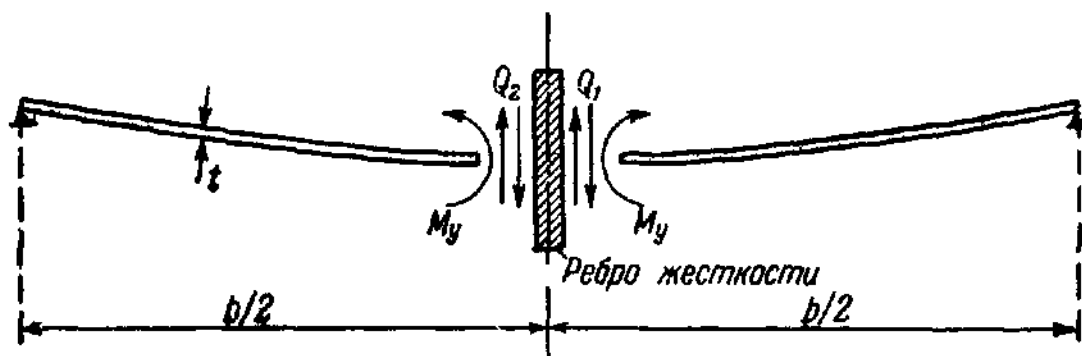


Рис. 178.

получим следующие четыре однородные уравнения для постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$ :

$$\begin{aligned} C_1 \operatorname{ch} \frac{k_1 b}{2} + C_2 \operatorname{sh} \frac{k_1 b}{2} + C_3 \cos \frac{k_2 b}{2} + C_4 \sin \frac{k_2 b}{2} &= 0; \\ k_1^3 \left( C_1 \operatorname{ch} \frac{k_1 b}{2} + C_2 \operatorname{sh} \frac{k_1 b}{2} \right) - k_2^3 \left( C_3 \cos \frac{k_2 b}{2} + C_4 \sin \frac{k_2 b}{2} \right) &= 0; \\ k_1 C_2 + k_2 C_4 &= 0; \\ 2 \left( k_1^3 C_2 - k_2^3 C_4 \right) + \left( \frac{\gamma}{b^3} \frac{n^4 \pi^4}{a^4} - \delta \frac{\sigma_{кр} t}{D b \tau} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right) (C_2 + C_4) &= 0. \end{aligned}$$

Детерминант этой системы уравнений представляет собой условие устойчивости для симметричной формы выпучивания

$$\left( \frac{1}{k_1} \operatorname{th} \frac{k_1 b}{2} - \frac{1}{k_2} \operatorname{tg} \frac{k_2 b}{2} \right) \left( \frac{\gamma}{b^3} \frac{n^4 \pi^4}{\alpha^4} - \delta \frac{\sigma_{\text{кр}} t}{D b \tau} \frac{n^2 \pi^2}{\alpha^2} \right) - 2(k_1^2 + k_2^2) = 0. \quad (685)$$

Из этого уравнения найдем теперь значение предельного отношения  $\gamma_0$ . Как упоминалось выше, величина  $\gamma_0$  определяет изгибную жесткость ребра, при которой одинаково возможны симметричная и антисимметричная форма выпученной пластинки. При антисимметричной конфигурации каждая панель пластинки ведет себя как свободно опертая пластинка шириной  $b/2$ , причем в этом случае справедливо выражение для критического напряжения, определенного в главе IX. В связи с тем, что уравнение (685) получено из дифференциального уравнения (604), основанного на гипотезе изотропности, мы должны использовать значение  $\sigma_{\text{кр}}$  для свободно опертой пластинки, выведенное на той же основе, т. е. при помощи уравнения (634а). Вследствие существующей разницы в использованных обозначениях мы должны заменить  $b$ ,  $\alpha$  и  $n$  в уравнении (634а) соответственно на  $b/2$ ,  $2\alpha$  и  $n_1$ , откуда получим:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E \tau}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{2\alpha}{n_1} + \frac{n_1}{2\alpha} \right)^2 \left( \frac{2t}{b} \right)^3 = \frac{4\pi^2 D \tau}{b^2 t} \left( \frac{2\alpha}{n_1} + \frac{n_1}{2\alpha} \right)^2, \quad (686)$$

где  $n_1$  — число полуволн для антисимметричного выпучивания, которое вероятно отличается от числа  $n$  полуволн для симметричного выпучивания в уравнении (685).

Решая условие устойчивости (685) относительно  $\gamma$  и подставляя выражение (686) для  $\sigma_{\text{кр}}$ , получим предельное значение  $\gamma_0$ :

$$\gamma_0 = \frac{8}{\pi^2} \frac{\left( \frac{2\alpha}{n_1} + \frac{n_1}{2\alpha} \right) \left( \frac{\alpha}{n} \right)^3}{\frac{1}{k_1 b} \operatorname{th} \frac{k_1 b}{2} - \frac{1}{k_2 b} \operatorname{tg} \frac{k_2 b}{2}} + 4 \left( \frac{\alpha}{n} \right)^2 \left( \frac{2\alpha}{n_1} + \frac{n_1}{2\alpha} \right)^2 \delta. \quad (687)$$

Подставляя значение  $\sigma_{\text{кр}}$  из уравнения (686) в уравнение (681), имеем

$$\mu = \frac{2\alpha}{n} \left( \frac{2\alpha}{n_1} + \frac{n_1}{2\alpha} \right) \quad (688)$$

и на основе уравнения (680) получим следующие выражения для коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$ :

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{n\pi}{b\alpha} \sqrt{\frac{2\alpha}{n} \left( \frac{2\alpha}{n_1} + \frac{n_1}{2\alpha} \right) + 1}; \\ k_2 &= \frac{n\pi}{b\alpha} \sqrt{\frac{2\alpha}{n} \left( \frac{2\alpha}{n_1} + \frac{n_1}{2\alpha} \right) - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (689)$$

Величина  $\gamma_0$  является функцией отношения  $\alpha = a/b$  и отношения  $\delta$ . На рис. 179 приведены значения  $\gamma_0$  в зависимости от  $\alpha$  для различных значений  $\delta$ <sup>1)</sup>. Каждая диаграмма составлена из ряда кривых, соответствующих числу полуволн  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Эти кривые не

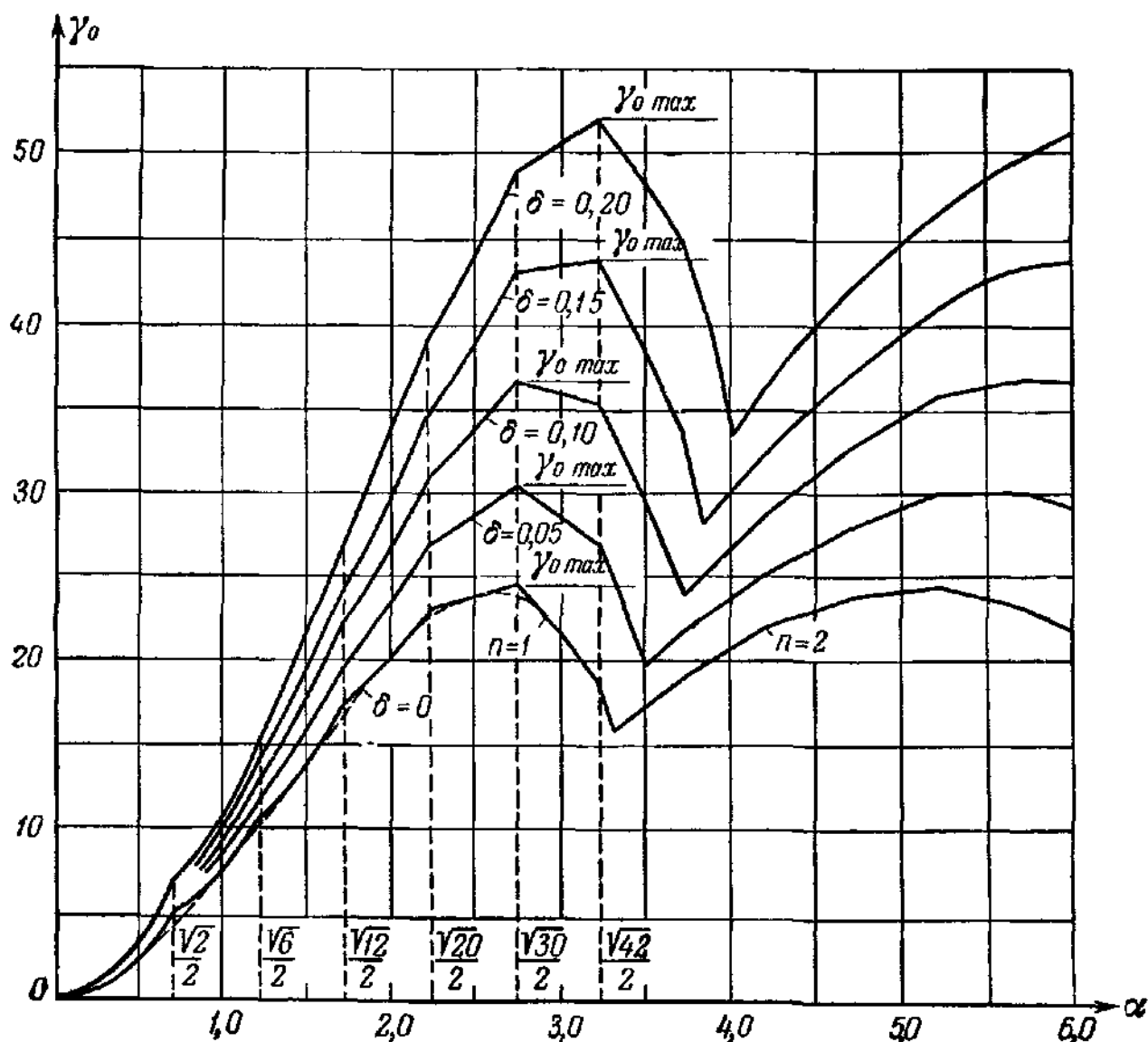


Рис. 179.

являются гладкими линиями, но образованы криволинейными участками, соответствующими числу полуволн  $n_1 = 1, 2, 3, \dots$ . Наивысшие точки отдельных участков любой кривой имеют приблизительно одинаковую ординату  $\gamma_0$ .

Эти ординаты очень быстро стремятся к предельному значению, соответствующему  $\alpha = \infty$ . Это предельное значение несколько меньше, чем значение  $\gamma_{0\max}$  первой ветви.

Уравнение (687) можно значительно упростить и сделать независимым от  $n_1$  нижеследующим образом. При целых значениях  $2\alpha = 1, 2, 3, \dots$  число  $n_1$  полуволн равно  $2\alpha$ , а выражение  $\left(\frac{2\alpha}{n_1} + \frac{n_1}{2\alpha}\right)$

<sup>1)</sup> Эта кривая взята из работы Барбре 1936 г.

принимает значение, равное 2. При  $\alpha > 1$  значение этого выражения близко к 2, даже если не имеется целых значений  $2\alpha$ , отсюда можно ввести значение  $\left(\frac{2\alpha}{n_1} + \frac{n_1}{2\alpha}\right) = 2$  в уравнение (687). Таким образом, при  $\alpha \geq 1$  получим:

$$\gamma_0 = \frac{(16/\pi^2) (\alpha/n)^3}{\frac{1}{k_1 b} \operatorname{th} \frac{k_1 b}{2} + \frac{1}{k_2 b} \operatorname{tg} \frac{k_2 b}{2}} + 16 \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 \delta, \quad (690)$$

где коэффициенты  $k$  определяются уравнением

$$k_{1,2} = \frac{n\pi}{ba} \sqrt{\frac{4\alpha}{n} \pm 1}. \quad (691)$$

Таким образом, значения  $\gamma_0$  представлены гладкой кривой, показанной при  $\delta = 0$  в диаграмме пунктирной линией (рис. 179).

Очевидно, что ошибка, допущенная при вычислении на базе упрощенного уравнения (690), незначительна.

Для того чтобы получить простую расчетную формулу, целесообразно заменить трансцендентное выражение (690) алгебраическими выражениями. Для случая  $\delta = 0,10$  это можно сделать, заменяя кривую значений  $\gamma_0$  кривой А для малых значений  $\alpha$  и горизонтальной линией, проведенной на уровне значения  $\gamma_{0\max}$  для больших значений  $\alpha$ , как это показано на

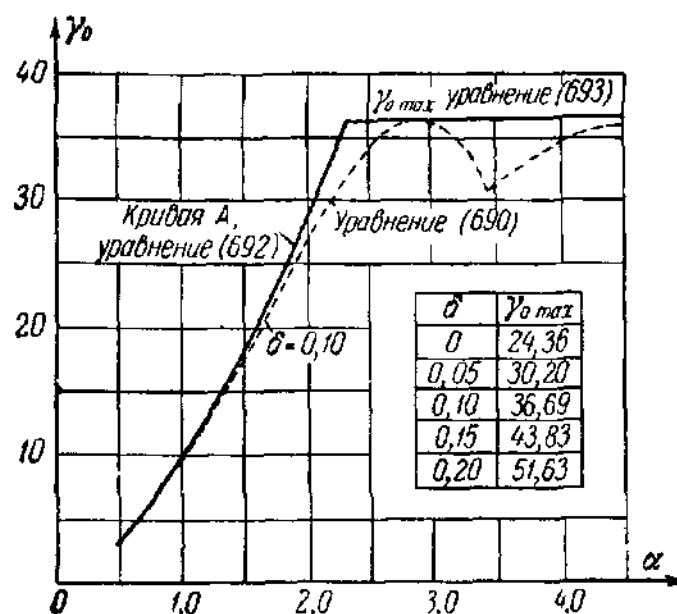


Рис. 180.

рис. 180. Автором книги установлено следующее приближенное правило:

Вычислим  $\gamma_0$  из формулы

$$\gamma_0 = 11,4\alpha + (1,25 + 16\delta)\alpha^2 - 5,4\sqrt{\alpha}. \quad (692)$$

В случае, если значение  $\gamma_0$  больше значения  $\gamma_{0\max}$ , данного уравнения

$$\gamma_{0\max} = 24,4 + 112\delta(1 + \delta), \quad (692a)$$

его необходимо заменить  $\gamma_{0\max}$ . Вышенаписанные уравнения применимы при  $0 \leq \delta \leq 0,20$ .

Требуемое значение момента инерции  $J_0$  ребра жесткости определяется из уравнения (677):

$$J_0 = \frac{bt^3}{12(1 - \nu^2)} \gamma_0 = 0,092bt^3\gamma_0. \quad (693)$$



Уравнения (687) и (690) не зависят от модуля упругости и отношения  $\tau$ . Следовательно, эти уравнения и расчетные формулы (692) и (693) применимы для любых металлов в упругой и неупругой областях.

В случае, если момент инерции  $J$  ребра жесткости больше значения  $J_0$ , данного уравнением (693), каждая панель пластинки выпучится как свободно опертая пластинка при критическом напряжении, независимом от значения  $J$ . Значение этого критического напряжения можно найти из уравнения (635а) и написать в следующем виде:

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sqrt{\tau}} = 14,46E \left( \frac{t}{b} \right)^2. \quad (694)$$

Любое увеличение  $J$  свыше значения  $J_0$  не повышает устойчивость подкрепленной пластинки<sup>1)</sup>, так как значение критического напряжения, данное уравнением (694), остается неизменным.

Для того чтобы определить значение  $\sigma_{кр}$  в неупругой области, вычислим из уравнения (694)  $\sigma_{кр}/\sqrt{\tau}$  и при помощи таблиц 27 и 28 на стр. 380 получим соответствующее значение  $\sigma_{кр}$ .

Уравнение (685) можно также использовать для определения необходимого значения момента инерции  $J$ , с тем, чтобы подкрепленная пластинка выпучивалась при данном критическом напряжении  $\sigma_{кр}$  меньшем, чем напряжение, полученное на основе уравнения (694). Значение  $J$ , необходимое для этой цели, естественно меньше, чем  $J_0$ . В таком случае подкрепленная пластинка выпучится по симметрической форме, и условие устойчивости (685) вполне применимо. Подставляя в это уравнение величины

$$\frac{\sigma_{кр} t}{D\tau} = \frac{n^2 \pi^2}{b^2 a^2} \mu^2 \quad \text{и} \quad 2(k_1^2 + k_2^2) = 4 \frac{n^2 \pi^2}{b^2 a^2} \mu,$$

выведенные из уравнений (680) и (681), получим:

$$\left( \frac{1}{bk_1} \operatorname{th} \frac{bk_1}{2} - \frac{1}{bk_2} \operatorname{tg} \frac{bk_2}{2} \right) (\gamma - \delta \mu^2) - \frac{4a^2}{n^2 \pi^2} \mu = 0.$$

Вводя обозначение

$$\Phi = \frac{(4a^2/n^2 \pi^2) \mu}{\frac{1}{bk_1} \operatorname{th} \frac{bk_1}{2} - \frac{1}{bk_2} \operatorname{tg} \frac{bk_2}{2}}, \quad (695)$$

будем иметь необходимое значение для  $\gamma$ :

$$\gamma = \Phi + \delta \mu^2. \quad (696)$$

Критическое напряжение  $\sigma_{кр}$ , по отношению к которому рассчитывается подкрепленная панель, соответствует определенному

<sup>1)</sup> Однако увеличение значения  $J$  свыше  $J_0$  повысит предельную прочность подкрепленной пластинки (см. § 103).

коэффициенту устойчивости  $k$ , значение которого можно определить из следующего уравнения<sup>1)</sup>:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \tau}{12 (1 - \nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^3 k. \quad (697)$$

Это значение коэффициента устойчивости  $k$  и коэффициента  $\mu$  тесно связаны;  $k = (n/\alpha)^2 \mu^2$ , поэтому в результате уравнение (696) будет

$$\gamma = \Phi + \left( \frac{\alpha}{n} \right)^2 k \delta. \quad (698)$$

Согласно уравнениям (680) величины  $k_1$  и  $k_2$  являются функциями от  $\mu$ , отсюда уравнение (695) определяет некоторую взаимосвязь между переменными  $\alpha$ ,  $\Phi$  и  $k$ . На рис. 181 показаны

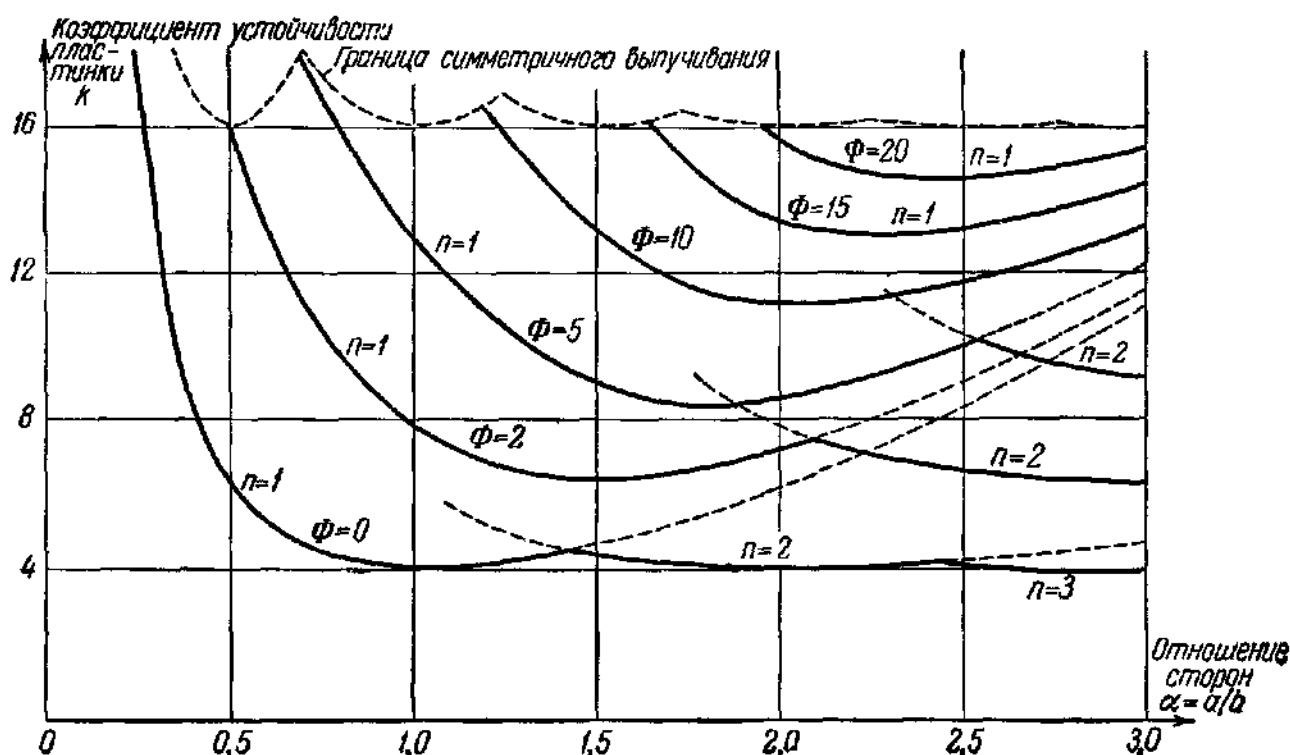


Рис. 181.

кривые, дающие значения  $k$  в функции от  $\alpha$  для различных величин  $\Phi$ . Кривые имеют разветвления при  $n = 1, 2, \dots$ ; применяемые их части показаны сплошными линиями. При помощи этих кривых можно определить значение  $\Phi$ , если значения  $\alpha$  и  $k$  заданы.

В вышеприведенных выводах использовалась гипотеза изотропности, поэтому применение уравнения (697) является безопасным, как это подчеркивалось в конце § 89. В целях согласования с теориями пластинок, использованными в других частях этой книги,

<sup>1)</sup> В связи с тем, что используется гипотеза изотропности, основанная на уравнении (604), в этом уравнении фигурирует коэффициент  $\tau$ , а не  $\sqrt{\tau}$ .

предлагается вместо уравнения (697) использовать соотношение

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^3 k, \quad (699)$$

предположив также, что значения  $\Phi$ , получаемые на основе кривых рис. 181, остаются неизменными. Этот способ дает несколько завышенные результаты по сравнению с точными.

Таким образом, метод нахождения необходимого значения  $J$  является следующим: при помощи значения  $\sigma_{кр}$  определим значение  $k$  из уравнения (699)<sup>1)</sup> и  $\Phi$  — по рис. 181; вычислим также значение  $\gamma$  из уравнения (698) и в результате получим значение  $J$  из соотношения

$$J = \frac{bt^3}{12(1-\nu^2)} \gamma = 0,092bt^3\gamma. \quad (700)$$

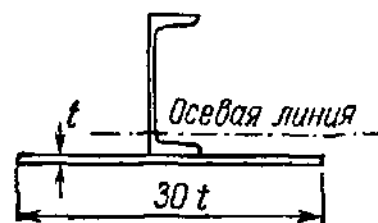


Рис. 182.

В начале этого параграфа предполагалось, что осевая линия ребра жесткости лежит в срединной плоскости пластинки. Однако в действительных конструкциях ребра жесткости обычно приварены или приклепаны только с одной стороны пластинки. Это приводит к значительному увеличению изгибной жесткости ребра, так как примыкающие части пластинки участвуют в изгибе изогнутого ребра жесткости. При расчете момента инерции  $J$  рекомендуется включить в эффективное сечение ребра полосу пластинки шириной в  $30t$  и рассчитывать момент инерции  $J$  относительно оси, проходящей через центр тяжести получающегося таким образом сечения (рис. 182).

Хвалла<sup>2)</sup> аналитически исследовал эффективную ширину пластинки для случая плоского ребра жесткости, приваренного к пластинке, находящейся под действием касательных напряжений. Он обнаружил, что значительная часть пластинки укрепляет ребро жесткости. По сравнению с результатами, полученными Хвалла для этого частного случая, вышеприведенное правило является вполне надежным.

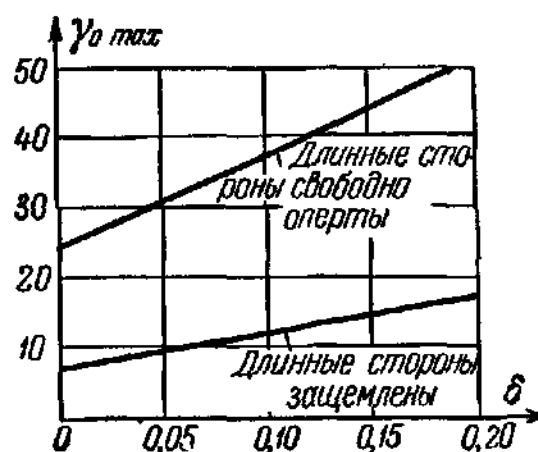


Рис. 183.

Барбре также исследовал случай прямоугольных пластинок, защемленных на обоих ненагруженных краях и имеющих одно ребро жесткости, расположенное по середине пластинки. Он нашел, что,

<sup>1)</sup> Для определения значения  $\tau$  можно использовать таблицу 3 на стр. 70.

<sup>2)</sup> Chwalla E., Theorie der einseitig angeordneten Stegblechsteife. Der Bauingenieur, т. 10, 1937.

несмотря на увеличение значения критического напряжения, защемление краев значительно уменьшает величину  $\gamma_0$ , необходимую для образования узловой линии вдоль ребра жесткости выпученной пластинки. Для сравнения на рис. 183 даны значения  $\gamma_{0\max}$  для свободно опертых пластинок и для пластинок, защемленных на двух краях.

### 99. Свободно опертые пластинки с двумя равноотстоящими ребрами жесткости

Случай двух ребер жесткости, делящих пластинку на три равные части (рис. 184), можно рассмотреть аналогичным способом, так же, как в предыдущем параграфе. Барбре определил предельные значения  $\gamma_0$  отношения жесткостей  $\gamma$ , при которых происходит выпучивание по трем полуволнам. Полученные результаты приведены на рис. 185, где значения  $\gamma_0$  нанесены в зависимости от отношения  $\alpha$  при  $\delta = 0; 0,05; 0,10; 0,15; 0,20$ .

Для того чтобы получить простые расчетные формулы для  $\gamma_0$ , трансцендентные кривые можно аппроксимировать алгебраическими функциями. Для пластинок с двумя ребрами жесткости предлагается следующая формула:

$$\gamma_0 = 14,5 \sqrt{\alpha^3} + 36\alpha^2\delta, \quad (701)$$

где значение  $\gamma_0$  не превосходит предельного значения

$$\gamma_{0\max} = 96 + 610\delta + 975\delta^2, \quad (701a)$$

что применимо при  $0 < \delta < 0,20$ . Минимальное значение момента инерции  $J$  получается из уравнения (693), а критическое напряжение подкрепленной пластинки будет

$$\sigma_{кр} = 32,5E \sqrt{\tau} \left( \frac{t}{b} \right)^2. \quad (702)$$

### 100. Свободно опертые пластинки с одним эксцентрично расположенным ребром жесткости

Математические расчеты при исследовании влияния эксцентрично расположенного продольного ребра жесткости аналогичны вычислениям, приведенным в § 98, однако они являются более сложными<sup>1)</sup>. Вследствие влияния ребра жесткости пластинка выпучивается так, как это показано на рис. 186, *b*. Прогиб  $w_s$  оси ребра уменьшается с увеличением его жесткости и становится равным нулю, когда значение момента инерции ребра стремится к бесконечности; в этом случае ось ребра жесткости образует узловую

<sup>1)</sup> Теория разработана Барбре. Barbré R., Stabilité gleichmäßig gedrückter Rechteckplatten mit Längs-oder Quersteifen, Ingenieur-Archiv, т. 8, стр. 117 1937.

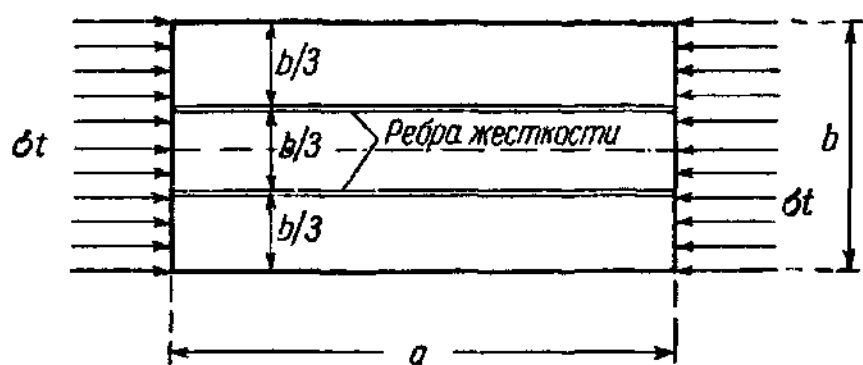


Рис. 184.

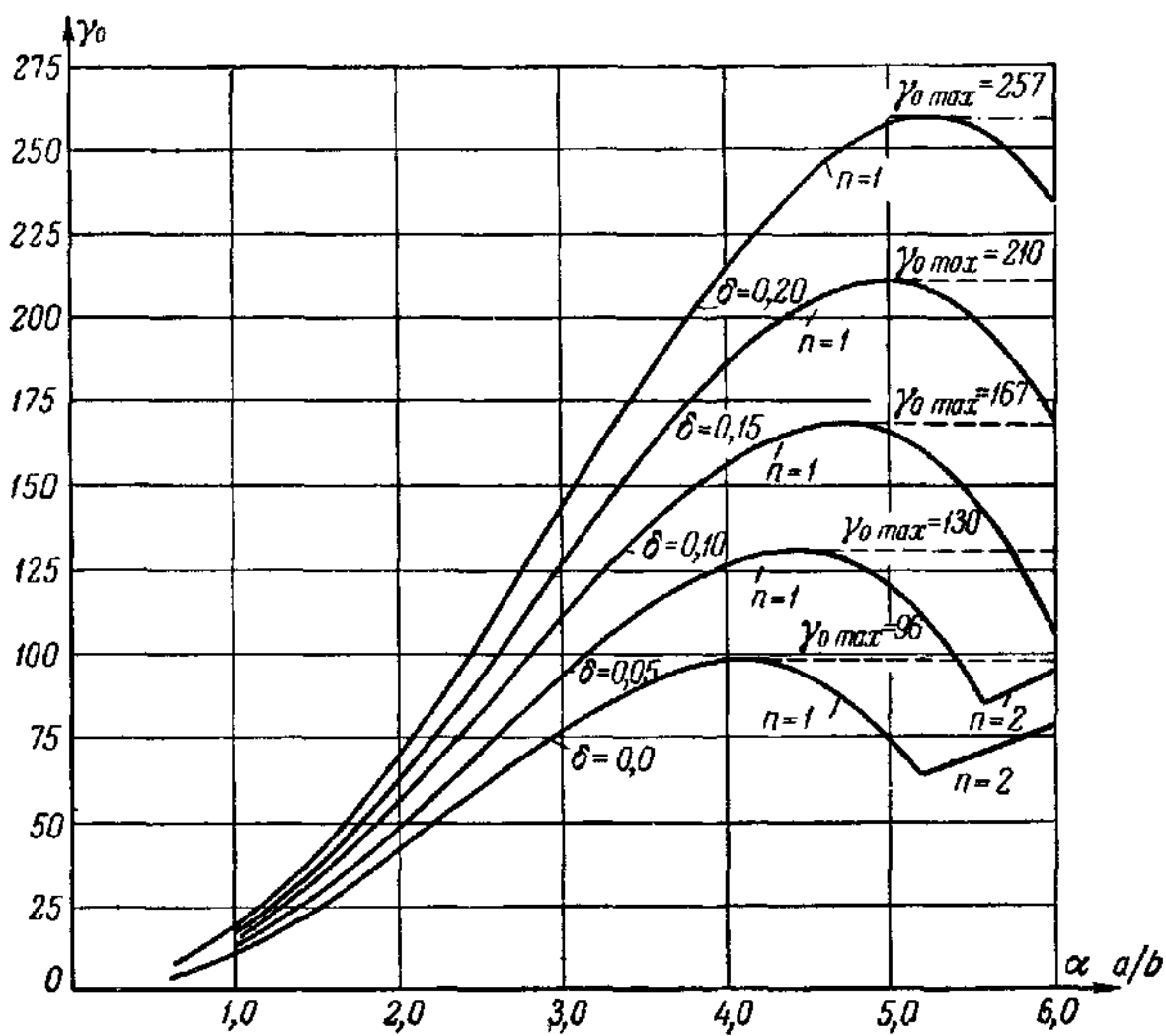


Рис. 185.

линию на поверхности прогибов пластинки. В этом отношении поведение эксцентрично подкрепленной пластинки отличается от рассмотренных выше случаев, где прямые узловые линии образуются тогда, когда достигается определенное конечное предельное значение момента инерции  $J$  ребра. С практической точки зрения такое предельное значение  $J$  существует также в случае эксцентрично расположенного ребра, однако это значение  $J$  явно не определено. Значение критического напряжения  $\sigma_{кр}$  сначала быстро возрастает

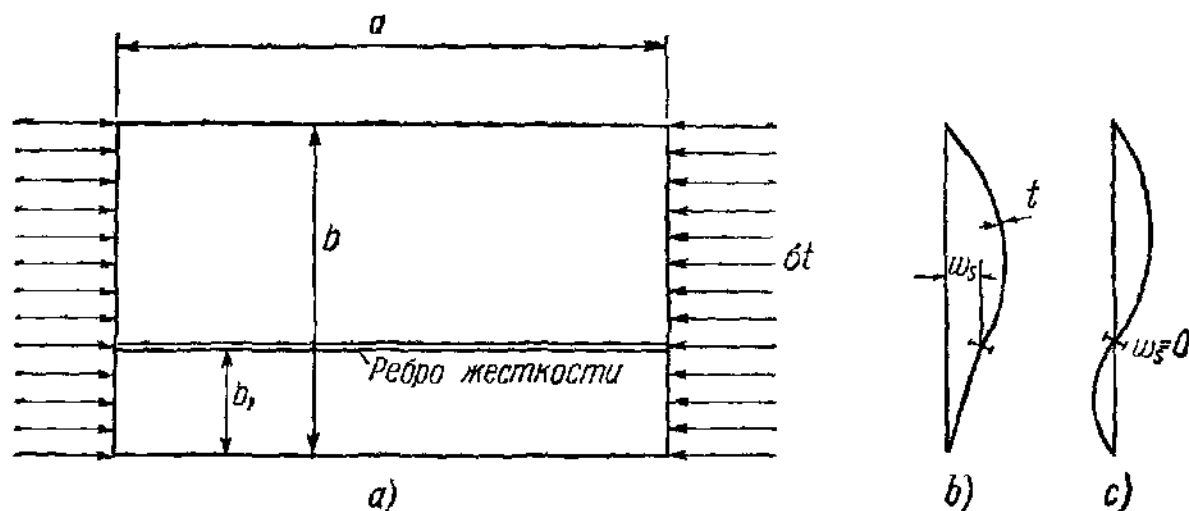


Рис. 186.

с увеличением  $J$ , пока не достигнута такая точка, когда возрастание  $J$  не увеличивает существенно значения критического напряжения  $\sigma_{кр}$ .

В случае, если отношение  $b_1/b$  является правильной дробью от  $1/r$ , где  $r$  — целое число, условие устойчивости принимает вид

$$\left(\frac{\alpha}{n\pi}\right)^4 \left(\frac{b}{b_1}\right)^3 (\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2) - \Phi \left[ \frac{\text{sh } \bar{k}_1 \text{sh } (r-1) \bar{k}_1}{\bar{k}_1 \text{sh } r \bar{k}_1} - \frac{\sin \bar{k}_2 \sin (r-1) \bar{k}_2}{\bar{k}_2 \sin r \bar{k}_2} \right] = 0, \quad (703)$$

где  $\bar{k}_1$ ,  $\bar{k}_2$  и  $\Phi$  являются безразмерными величинами, данными следующими уравнениями в функции от неизвестного  $\mu$ :

$$\bar{k}_{1,2} = \frac{n\pi b_1}{a} \sqrt{\mu \pm 1}; \quad (704)$$

$$\Phi = \gamma - \mu^2 \delta. \quad (705)$$

Здесь  $\alpha$  представляет собой отношение  $a/b$ , а значения  $\gamma$  и  $\delta$  определяются уравнениями (677) и (678). При заданных значениях  $\gamma$  и  $\delta$  уравнение (703) можно решить относительно  $\mu$ , и значение критического напряжения  $\sigma_{кр}$  подкрепленной пластинки будет

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k, \quad (706)$$

где  $k = (n/a)^2 \mu^2$ . Для того чтобы найти  $\sigma_{кр}$  в неупругой области, вычислим из уравнения (706)  $\sigma_{кр}/\sqrt{\tau}$  и получим соответствующее значение  $\sigma_{кр}$  из таблиц 27 и 28 на стр. 380.

Барбре вывел уравнение (703) в предположении об упругом поведении материала пластинки и ребра жесткости. Однако, рассуждая так же, как и в § 98, становится очевидным, что это уравнение может быть пригодным в упругой и неупругой областях. В связи с тем, что это уравнение не зависит от  $E$ , оно применимо для любого металла при условии, если ребро жесткости и пластинка сделаны из одного и того же материала.

На рис. 187 даны кривые значений  $k$  для случая  $b_1/b = 1/3$  в зависимости от отношения  $\alpha$  для значений  $\Phi = 5, 10, 20$  и  $\infty$ . Эта

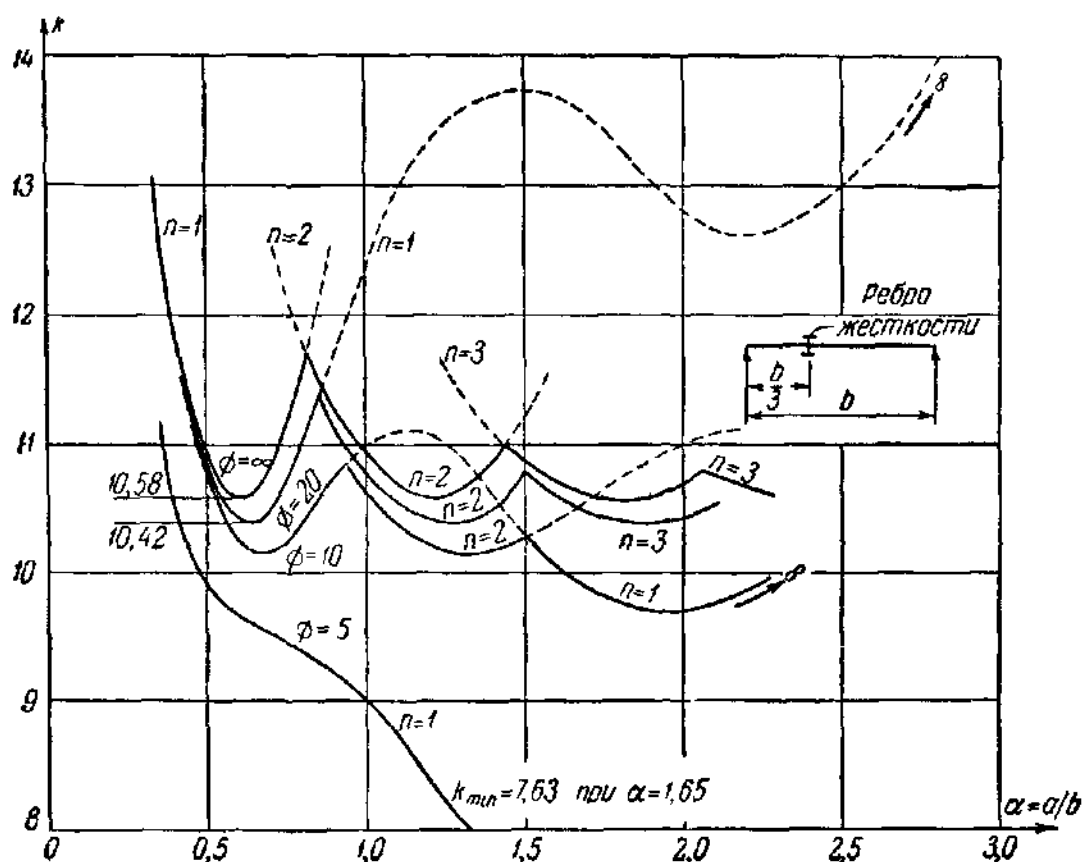


Рис. 187.

диаграмма соответствует рис. 181 для пластинки с одним ребром жесткости в середине. Величина  $\Phi$ , определенная уравнением (705), выражает жесткость ребра. Кривая, начерченная сплошной линией, для  $\Phi = \infty$  состоит из ветвей, соответствующих числу полуволн  $n = 1, 2, \dots$ , по которым пластинка выпучивается и дает значения  $k$ , если она оперта на жесткое ребро. Из кривых, построенных для  $\Phi = 10$  и  $20$ , каждая имеет два минимума, как это показано на рис. 187, для ветвей  $n = 1$ . В случае  $\Phi = 10$  оба минимума определяют используемые части диаграммы, однако, как это видно из кривой для  $\Phi = 20$ , с увеличением  $\Phi$  только левый минимум

остается для использования. Сосредоточивая внимание на минимальных значениях в окрестности значения  $\alpha = 0,6$ , можно видеть, что при значениях  $\Phi = 10$  и более величины  $k$  с увеличением  $\Phi$  стремятся к самой нижней точке кривой  $\Phi = \infty$ . В пределах значений  $\Phi = 20$  и  $\Phi = \infty$  значение  $k$  возрастает только от 10,42 до 10,58. Следовательно, значение  $\Phi = 20$  можно рассматривать как верхний предел параметра жесткости  $\Phi$ , предположив, что это значение определяет размеры ребра жесткости, обеспечивающие существование прямой узловой линии вдоль оси ребра жесткости. Рассуждая таким образом, получим критерий для определения значения параметра  $\Phi$ , что необходимо для обеспечения полной устойчивости пластинки.

Подставляя значение  $\mu^2 = k(\alpha/n)^2$  в уравнение (705), на основе уравнений (677) и (678) получим:

$$12(1 - \nu^2) \frac{J}{bt^3} - k \left( \frac{\alpha}{n} \right)^2 \frac{A}{bt} = \Phi.$$

Вводя значения  $\Phi = 20$ ,  $k = 10,42$ ,  $\alpha = 0,64$  и  $n = 1$ , получим условие для определения момента инерции  $J$  ребра жесткости:

$$10,92 \frac{J}{bt^3} - 4,27 \frac{A}{bt} = 20,$$

откуда имеем:

$$J = 1,85bt^3 + 0,4At^2. \quad (707)$$

Это уравнение применимо при значениях  $\alpha \leq 1$ . Величины  $b$  и  $t$  представляют собой заданные размеры пластинки. Предполагая, что значение  $A/bt$  известно, можно сразу вычислить величину момента инерции  $J$  и, если это необходимо, уточнить ее во втором приближении.

Значение  $k$ , соответствующее заданному значению  $\Phi = 20$ , равно  $k = 10,42$ . Следовательно, критическое напряжение подкрепленной пластинки будет

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sqrt{\tau}} = \frac{10,42\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 = 9,4E \left( \frac{t}{b} \right)^2. \quad (708)$$

Для того чтобы определить  $\sigma_{кр}$  в неупругой области, вычислим из уравнения (708)  $\sigma_{кр}/\sqrt{\tau}$  и найдем соответствующее значение  $\sigma_{кр}$  из таблиц 27 и 28 на стр. 380.

### 101. Прямоугольные пластинки, упруго опертые на ненагруженных краях

Для того чтобы определить поведение пластинок, опертых на одном или обоих краях на упругие ребра, рассмотрим задачу о прямоугольной пластинке, показанной на рис. 188. Пластика шириной  $b$  и толщиной  $t$ , изображенная на этом рисунке, находится под действием равномерно распределенной на двух противополож-



ных краях нагрузки. Один ненагруженный край свободно оперт; другой край оперт на упругое ребро с моментом инерции  $J$  и площадью поперечного сечения  $A$ . Предполагается, что ребро не сопротивляется кручению и находится под действием того же сжимающего напряжения, что и пластинка.

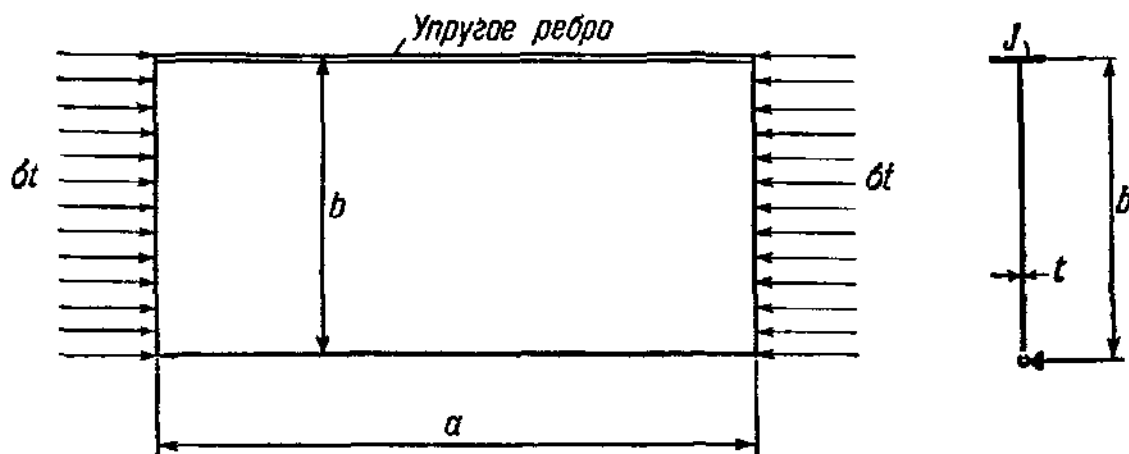


Рис. 188.

Исходя из уравнения (679), Майлс<sup>1)</sup> вывел следующее условие устойчивости:

$$\sqrt{\mu - 1} (\mu + 1 - \nu)^2 \operatorname{ctg} k_2 - \sqrt{\mu + 1} (\mu - 1 + \nu)^2 \operatorname{cth} k_1 + 2 \frac{n\pi}{a} \mu \Phi = 0, \quad (709)$$

где

$$k_1 = \frac{n\pi}{a} \sqrt{\mu + 1}; \quad k_2 = \frac{n\pi}{a} \sqrt{\mu - 1}; \quad (710)$$

$$\Phi = \frac{EJ}{bD} - \frac{A}{bt} \mu^2. \quad (711)$$

Значение коэффициента устойчивости равно  $k = (n/a)^2 \mu^2$ . Определяя при заданных значениях  $\alpha$  и  $\Phi$  наименьший корень уравнения (709), для критического напряжения  $\sigma_{кр}$  пластинки получим следующее выражение:

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sqrt{\tau}} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 k. \quad (712)$$

Для того чтобы определить значение  $\sigma_{кр}$  в неупругой области, вычислим из уравнения (712)  $\sigma_{кр}/\sqrt{\tau}$  и найдем соответствующее значение  $\sigma_{кр}$  из таблиц 27 и 28 на стр. 380.

На рис. 189 приведены кривые значений  $k$  для нескольких величин  $\Phi$ , однако, ради ясности, целиком начерчена только кривая для  $\Phi = 20$ , состоящая из кривых для  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Первые ветви  $n = 1$  всех кривых при конечных значениях  $\Phi$  имеют минимум в окрестности значения  $\alpha = 1$  с последующим максимумом,

<sup>1)</sup> Майлс, цит. выше, стр. 396.

после которого ординаты непрерывно убывают. Для очень больших значений  $\alpha$  коэффициент  $k$  стремится к значению  $k=0,425$ , представляющему собой коэффициент  $k$  свободно опертой на трех сторонах и свободной на четвертой стороне пластинки. Полная кривая, проведенная для  $\Phi=20$ , показывает, что при малых значениях  $\alpha$  пластинка выпучивается по одной, двум или более полуволнам до

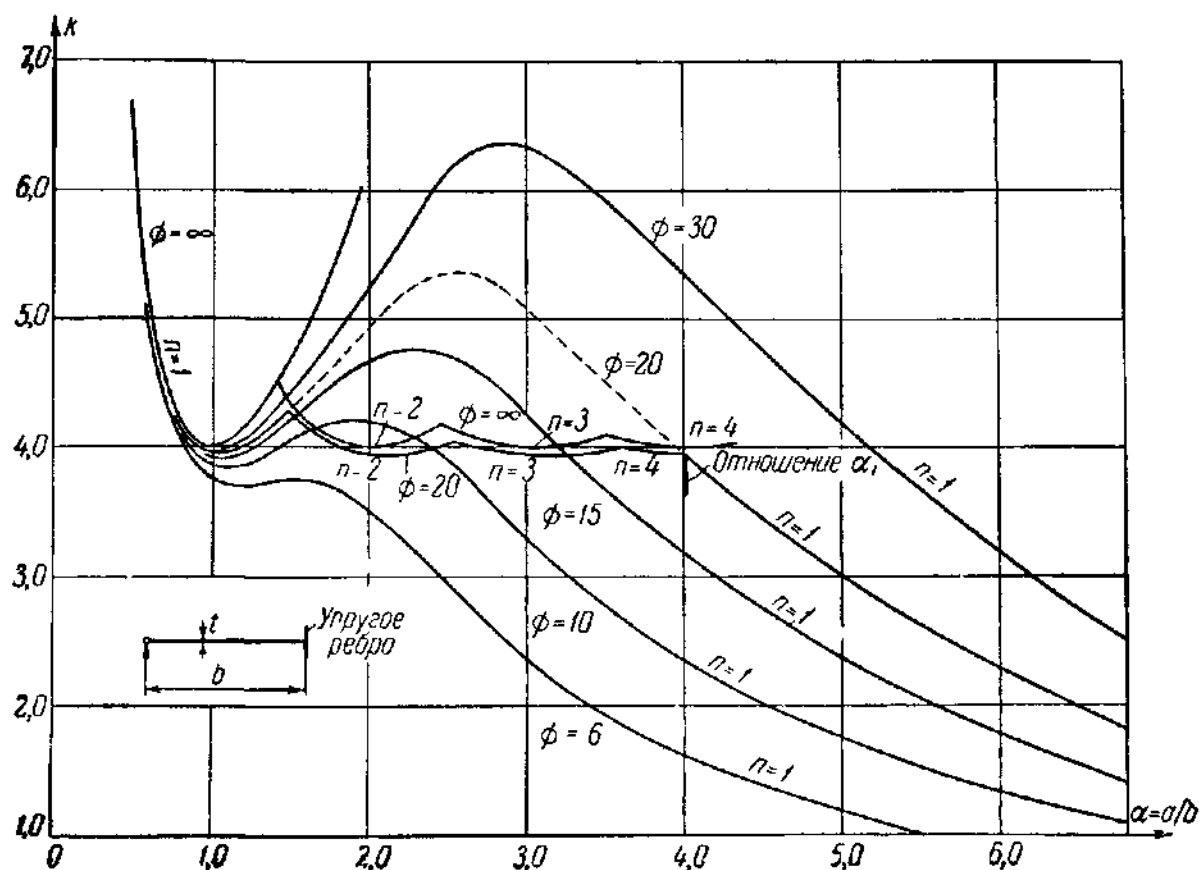


Рис. 189.

тех пор, пока ее длина не достигает значения  $a = b\alpha_i$ . При такой длине форма поверхности прогибов внезапно меняется; ребро и пластинка выпучиваются по одной полуволне. При значениях  $\Phi$ , не очень малых (допустим, при  $\Phi=20$ ), точку внезапного изменения деформации пластинки без существенной ошибки можно заменить точкой пересечения кривой значений  $k$  с горизонтальной линией  $k=4$ . Таким образом, каждому значению  $\Phi$ , определяющему жесткость упругого ребра, соответствует предельная длина  $a = b\alpha_i$ . При значении длины ниже предельной пластинка имеет наибольшую устойчивость; выше этой длины значение  $k$ , а следовательно и  $\sigma_{кр}$ , быстро убывает с увеличением длины. Абсциссу  $\alpha_i$  точки пересечения можно приближенно вычислить из следующего соотношения:

$$1,29(\alpha_i - 0,41)^2 + 5,15 = \Phi, \quad (713)$$

где  $\Phi$  является функцией от  $J$  и  $A$ .

При расчете пластинки и ребра необходимо соблюдать два условия:

1) Для обеспечения максимальной прочности пластинки, когда требуется, чтобы пластинка была свободно оперта на ненагруженные края, необходимо, чтобы  $\Phi \geq 20$ <sup>1)</sup>. Следовательно, величины  $J$  и  $A$  удовлетворяют условию

$$\frac{12(1-\nu^2)}{bt^3} J - \frac{A}{bt} \mu^2 \geq 20,$$

полученному из уравнения (711).

Вводя  $\mu^2 = k(\alpha/n)^2$  и предполагая, что  $\alpha/n = 1$  и  $k = 4$ , получим:

$$\frac{J}{bt^3} \geq 1,85 + 2,73 \frac{A}{bt}. \quad (714)$$

2) Второе условие требует такого подбора значения  $\Phi$ , чтобы данная длина пластинки равнялась или была меньше величины  $\alpha_i b$ , где  $\alpha_i$  определяется из уравнения (713). При  $\alpha = \alpha_i$  значение коэффициента  $k$  равно 4, а так как  $n = 1$ ,  $\mu^2 = k(\alpha/n)^2 = 4\alpha^2$ , имеем:

$$\Phi = \frac{10,92J}{bt^3} - \frac{4A}{bt} \alpha^2.$$

Заменяя  $\Phi$  в уравнении (713) этим выражением и подставляя  $\alpha_i = \alpha$ , получим:

$$\frac{J}{bt^3} = 1,18(\alpha - 0,41)^2 + 0,47 + 0,43 \frac{A}{bt} \alpha^2. \quad (715)$$

Это уравнение дает второе значение для момента инерции ребра. Необходимо использовать наибольшее из двух значений  $J$ , найденных из уравнений (714) и (715).

Условие устойчивости становится более сложным, чем уравнение (709), в случае, когда принимается во внимание крутильная жесткость ребра. Этот случай был исследован Уинденбергом<sup>2)</sup>. Аналитическое исследование показывает, что крутильная жесткость не влияет на основные особенности поведения пластинки. Существует определенное значение отношения  $\alpha_i$ , которое теперь зависит от изгибной и крутильной жесткостей упругого ребра и ниже которого пластинка выпучивается по полуволнам, имеющим длину меньшую, чем значение ширины  $b$ , но выше которого пластинка и ребро жесткости изгибаются по одной полуволне.

На рис. 190 показана кривая значений  $k$  для  $\Phi = 20$  и  $C/Db = 2$ , где  $C$  — крутильная жесткость ребра<sup>3)</sup>. Сравнение с соответствующей кривой значений  $k$  для  $\Phi = 20$ , приведенной на рис. 189, показывает, что эти кривые подобны. Жесткое соединение между

<sup>1)</sup> Значение  $\Phi = 20$  подобрано несколько произвольно. Соответствующее значение  $k$  отличается только на 1% от значения  $k = 4$  при  $\Phi = \infty$  и без существенной ошибки может быть заменено значением  $k = 4$ .

<sup>2)</sup> Уинденберг, цит. выше, стр. 397.

<sup>3)</sup> Эта кривая взята из работы Уинденберга.

пластинкой и ребром вызывает укорочение полуволн, по которым выпучивается пластинка, увеличивает критическое напряжение  $\sigma_{кр}$ , но уменьшает значение отношения  $\alpha_i$ , выше которого конструкция выпучивается по одной полуволне. Эта задача является очень важной при рассмотрении устойчивости тавровых ребер жесткости, которая исследуется в следующем разделе.

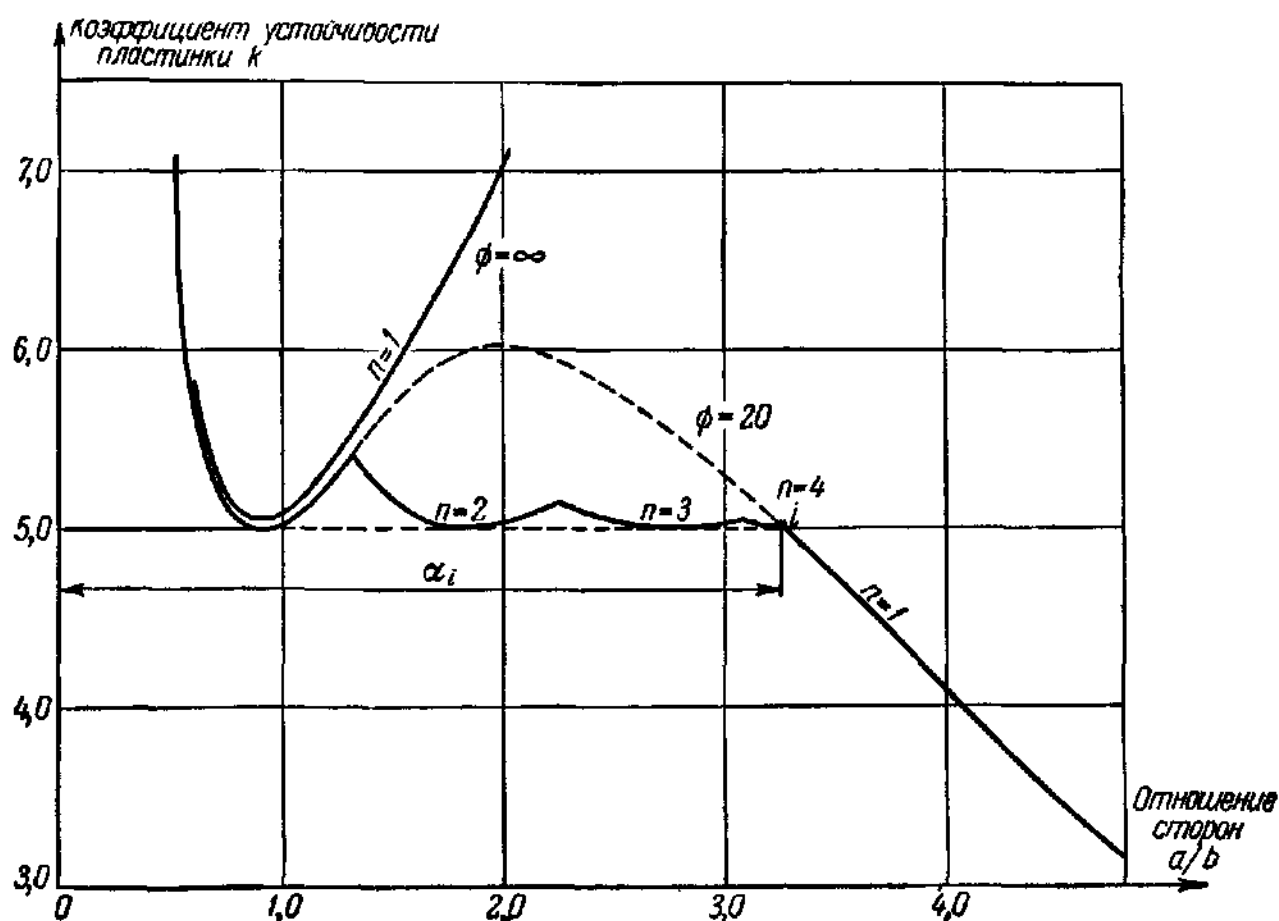


Рис. 190.

В заключение необходимо отметить, что описанные выше два случая упруго опертых пластинок являются типичными для группы задач, где основное и местное выпучивания определяются одновременно на основе одного условия устойчивости. Отношение  $\alpha_i$  устанавливает некоторую длину  $a = b\alpha_i$ , выше которой имеет место неустойчивое положение равновесия без искривления поперечного сечения, т. е. наблюдается основное выпучивание системы пластинка — ребро жесткости. Это означает, что при значении длины меньшей, чем  $a = b\alpha_i$ , пластинку можно рассматривать как жестко опертую и, возможно, упруго подкрепленную ребром, в то время как вся система пластинка — ребро ведет себя как сжатый стержень (основное выпучивание), если значение длины  $a = b\alpha_i$  превышено.

В случае, когда пластинка упруго укреплена ребром, систему можно рассматривать как тавр, шарнирно закрепленный по нижнему краю стенки. Устойчивость такого сжатого стержня исследовалась в § 43 главы III. Вследствие разницы в основных предполо-

жениях результаты, полученные на основе теории пластинок и теории, описанной в главе III, не вполне идентичны. Для практических целей целесообразно исследовать основную устойчивость тавровых сечений по теории, приведенной в главе III, благодаря простоте вычисления по сравнению со сложным численным способом решения задач о пластинках. Теория, изложенная в главе III, дает более надежные результаты, чем сравнительно точная теория пластинок.

## 102. Местное выпучивание плоских и тавровых ребер жесткости

В предыдущих параграфах мы исследовали влияние ребер жесткости на устойчивость пластинок с целью определить момент инерции ребра, необходимый для обеспечения желаемой устойчивости пластинки. Однако определения соответствующего значения момента инерции недостаточно для обеспечения устойчивости самого ребра жесткости. Существует возможность разрушения ребра вследствие крутильного выпучивания, которую необходимо предотвратить. Эта задача рассматривалась в главе III. Необходимо дополнительно исследовать возможность местного разрушения в результате неустойчивости пластинчатых элементов ребра жесткости, что будет сделано в этом параграфе.

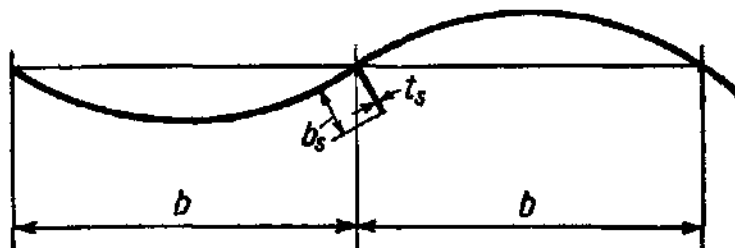


Рис. 191.

**Плоские ребра жесткости.** Плоское ребро жесткости представляет собой пластинку с большим значением отношения  $\alpha_s$ , опертую на три края и свободную на четвертом краю. Если рассмотреть подкрепленную пластинку в ее деформированном состоянии выпучивания (рис. 191) и предположить наличие наиболее неблагоприятного условия, а именно того, что ребро жесткости становится неустойчивым при том же значении сжимающего напряжения, что и пластинка, то становится очевидным, что пластинка совершенно не оказывает сдерживающего влияния на ребро жесткости. Пластинка выпучивается по гребням волн, направленным попеременно вверх и вниз с длиной волн, приблизительно равной  $b\sqrt[4]{\tau}$ . Следовательно, ребро жесткости ведет себя как свободно опертая вдоль одного края пластинка со значением отношения  $\alpha_s = b\sqrt[4]{\tau}/b_s$ , где  $b_s$  обозначает ширину ребра. В соответствии с таблицей 26 (случай 4) критическое напряжение ребра жесткости будет

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sqrt{\tau}} = 0,425 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t_s}{b_s} \right)^2. \quad (716)$$

Для того чтобы определить значение  $\sigma_{\text{кр}}$  в неупругой области, из уравнения (716) вычислим  $\sigma_{\text{кр}}/\sqrt{\tau}$  и найдем соответствующее значение  $\sigma_{\text{кр}}$  из таблиц 27 и 28 на стр. 380.

**Тавровые ребра жесткости.** Расчет тавровых ребер жесткости представляет собой более сложную задачу. На основе соображений, подобных сделанным выше, целесообразно предполагать, что нижний конец стенки ребра жесткости соединен с пластинкой таким образом, что между пластинкой и стенкой не возникают изгибающие моменты. Сделав это предположение, становится возможным решить задачи местной неустойчивости тавровых ребер жесткости под действием равномерно распределенных сжимающих сил.

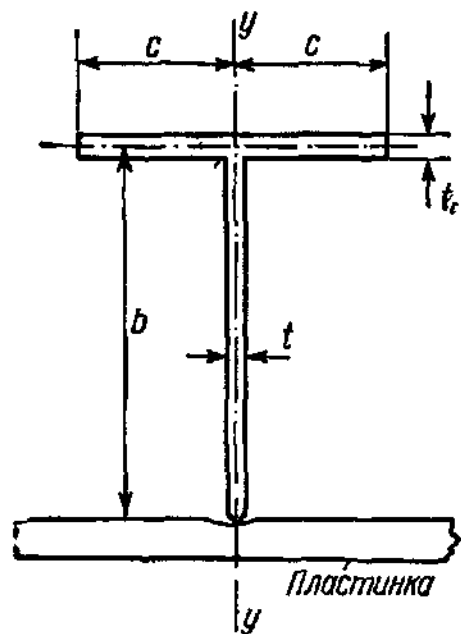


Рис. 192.

Стенка таврового ребра жесткости представляет собой упруго опертую поясом на одном ненагруженном краю и шарнирно закрепленную вдоль другого края пластинку (рис. 192). Предполагается, что стенка и пояс жестко соединены. Устойчивость такой комбинации пластинок исследовалась в предыдущем параграфе, причем было установлено, что в случае, если ребро жесткости рассчиты-вается по отношению к крутильному

выпучиванию (основное выпучивание), стенку можно рассматривать как пластинку, шарнирно закрепленную вдоль одного ненагруженного края и упруго укрепленную поясом на противоположном краю.

Значение коэффициента устойчивости  $k$  определим на основе метода расчета, изложенного в главе IX. В связи с тем, что нижний и верхний концы стенки укреплены в разной степени, применим предложенный для таких случаев на стр. 361 приближенный метод. Согласно этому методу коэффициент устойчивости  $k$  является средним  $\left(k = \frac{k_1 + k_2}{2}\right)$  из коэффициентов пластины  $k_1$  и  $k_2$  в случае, если пластинка была соответственно свободно оперта или упруго закреплена на обоих краях. Известно, что  $k_1 = 4$ . Для того чтобы вычислить значение  $k_2$ , необходимо знать величину коэффициента заделки, который в соответствии с уравнением (663) равен

$$\zeta = \frac{t^3}{t_c^3} \frac{\rho_2(c/b)}{1 - 9,4 \frac{t^2 c^2}{t_c^2 b^2}}. \quad (717)$$

Значение  $\rho_2 \frac{c}{b}$  можно определить из кривой на рис. 171. Вычисляя значение  $\zeta$  из уравнения (717), при помощи кривых, приведенных

на рис. 161, получим значения  $p$  и  $q$  и тем самым значение  $k_2 = p + 2\sqrt{q}$ . Так как  $k_1 = 4$ , в результате имеем:

$$k = 2 + \frac{k_2}{2}. \quad (718)$$

Критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  стенки будет

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k. \quad (719)$$

Вышеописанный способ применялся для определения значений коэффициента пластинки  $k$ , данных в таблице 32, в функции от отношений  $c/b$  и  $t_c/t$  (рис. 192).

Т а б л и ц а 32. Значения коэффициента устойчивости  $k$  для стенок тавровых ребер жесткости [уравнение (719)]

$t_c/t$	Отношение $c/b$							
	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1,00	4,52	4,49	4,42	4,22				
1,05	4,58	4,55	4,50	4,34				
1,10	4,63	4,62	4,58	4,45	4,10			
1,15	4,68	4,68	4,66	4,54	4,29			
1,20	4,74	4,74	4,73	4,63	4,44			
1,25	4,79	4,80	4,79	4,72	4,55	4,12		
1,30	4,82	4,84	4,84	4,79	4,66	4,36		
1,35	4,86	4,88	4,88	4,85	4,75	4,51		
1,40	4,90	4,92	4,93	4,90	4,82	4,65	4,14	
1,45	4,94	4,96	4,97	4,95	4,88	4,75	4,41	
1,50	4,97	4,99	5,01	4,99	4,94	4,85	4,59	
1,60	5,03	5,05	5,06	5,05	5,03	4,97	4,84	4,46
1,70	5,06	5,10	5,11	5,11	5,09	5,05	4,99	4,81
1,80	5,11	5,14	5,15	5,15	5,14	5,11	5,06	4,99
1,90	5,15	5,17	5,19	5,19	5,18	5,17	5,14	5,06
2,00	5,17	5,19	5,21	5,21	5,21	5,21	5,18	5,14

Влияние заделки стенки в пояс обычно мало и им можно пренебречь. Пояс можно рассматривать как свободно опертый на стенку вдоль одного края и свободный на другом краю. Значение критического напряжения, полученное при помощи таблицы 26, равно

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sqrt{\tau}} = 0,425 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t_c}{c}\right)^2. \quad (720)$$

Для того чтобы определить  $\sigma_{кр}$  в неупругой области, из уравнения (719) или (720) вычислим  $\sigma_{кр}/\sqrt{\tau}$  и найдем соответствующее значение  $\sigma_{кр}$  из таблиц 27 и 28 на стр. 380.

### 103. Предельная прочность плоских подкрепленных панелей

Исследования, приведенные в §§ 98—101, имели целью определить величину момента инерции ребер жесткости, необходимую для получения заданной критической нагрузки, равной расчетной нагрузке. При этом рассматривалось как основное выпучивание системы пластинка — ребро жесткости, так и местное выпучивание пластинки между ребрами жесткости. Во всех случаях критическая нагрузка основного выпучивания была меньше или, в лучшем случае, равна критической нагрузке местного выпучивания, и следовательно, критическая нагрузка была равна предельной нагрузке, выдерживаемой подкрепленными пластинками.

В авиационных конструкциях подкрепленные пластинки обычно применяются таким образом, чтобы местное выпучивание пластинки происходило при нагрузках, значительно меньших критической нагрузки основного выпучивания всей системы. Как указывалось в конце главы IX, в результате такого местного выпучивания происходит не внезапное разрушение конструкции, но лишь перераспределение напряжений. Конструкция способна выдержать большую предельную нагрузку, а именно критическую нагрузку основного выпучивания подкрепленной пластинки. Очевидно, тот факт, что местное выпучивание пластинки происходит при меньшей нагрузке, влияет каким-то образом на критическую нагрузку основного выпучивания.

Для того чтобы понять поведение подкрепленной тонкой пластинки, начнем с рассмотрения отдельной прямоугольной панели, свободно

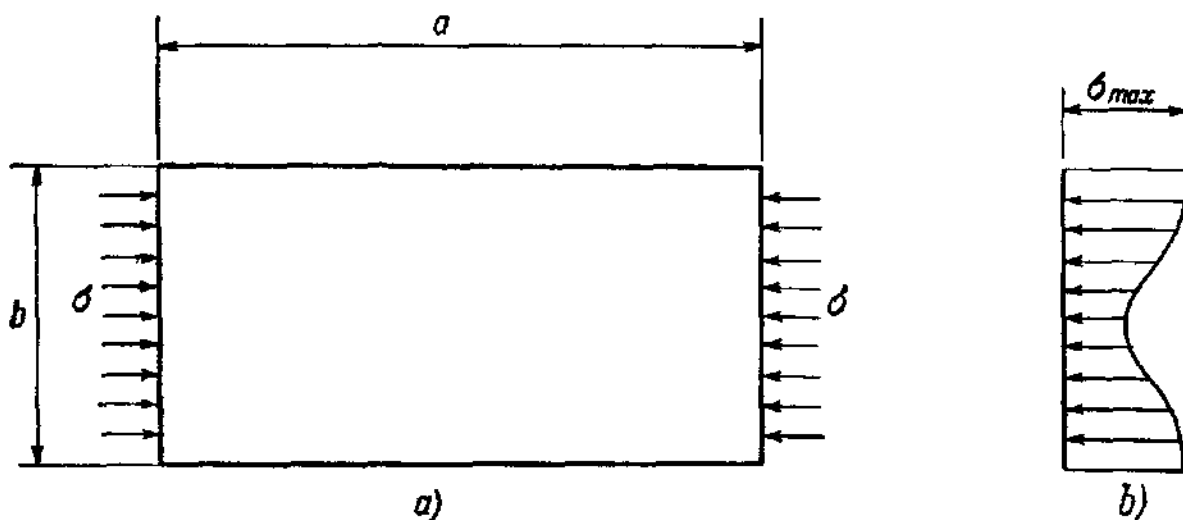


Рис. 193.

опертой на всех четырех краях (рис. 193, а). При малых нагрузках напряжения равномерно распределены до тех пор, пока не будет достигнута критическая нагрузка панели. В случае, если нагрузка увеличивается выше критической, панель будет выпучиваться. Если



нагрузка приложена таким образом, что нагруженный край остается прямым в плоскости пластинки, то вследствие больших прогибов в центре пластинки в центральных частях пластинки деформации сжатия будут меньше, чем в частях, расположенных вблизи краев. Следовательно, распределение напряжений будет таким, как это показано на рис. 193, *б*. Продолжая нагружение, пластинка исчерпает свою несущую способность тогда, когда значение  $\sigma_{\max}$  вблизи краев достигнет предела текучести. Для отдельной взятой панели предельную нагрузку  $P_u$  можно выразить через эффективную ширину  $b_e$ , т. е.  $P_u = tb_e\sigma_T$ . В главе XII приведены теоретические и экспериментальные исследования для определения  $b_e$ .

Поведение подкрепленной панели несколько аналогично рассмотренному случаю, однако усложнено проблемой устойчивости ребер жесткости. В случае, если ребра достаточно жестки, часть пластинки между ребрами жесткости выпучится, и распределение напряжений

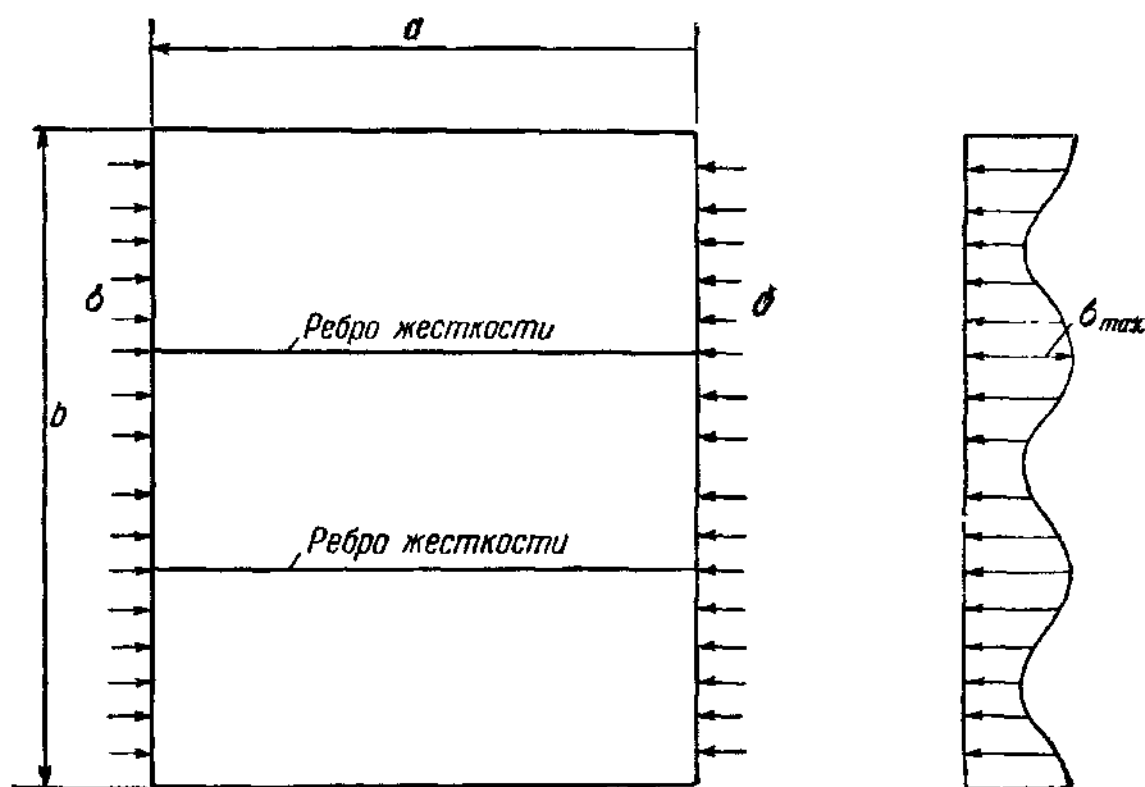


Рис. 194.

будет таким, как показано на рис. 194. Напряжения в ребрах жесткости и в смежных частях пластинки будут больше, чем в части, расположенной между ребрами жесткости. Однако максимальное напряжение при разрушении не достигает предела текучести; подкрепленная панель разрушается в случае, если напряжение в ребрах жесткости достигает критического значения  $\sigma_{кр}$  основного выпучивания ребер жесткости.

Голл<sup>1)</sup> на основе опытов Шумана и Бака<sup>2)</sup> установил, что прочность подкрепленной пластинки можно приближенно вычислить как сумму прочностей ребер жесткости и отдельно взятых плоских панелей. В дальнейшем Лундквист<sup>3)</sup> доказал, что можно получить

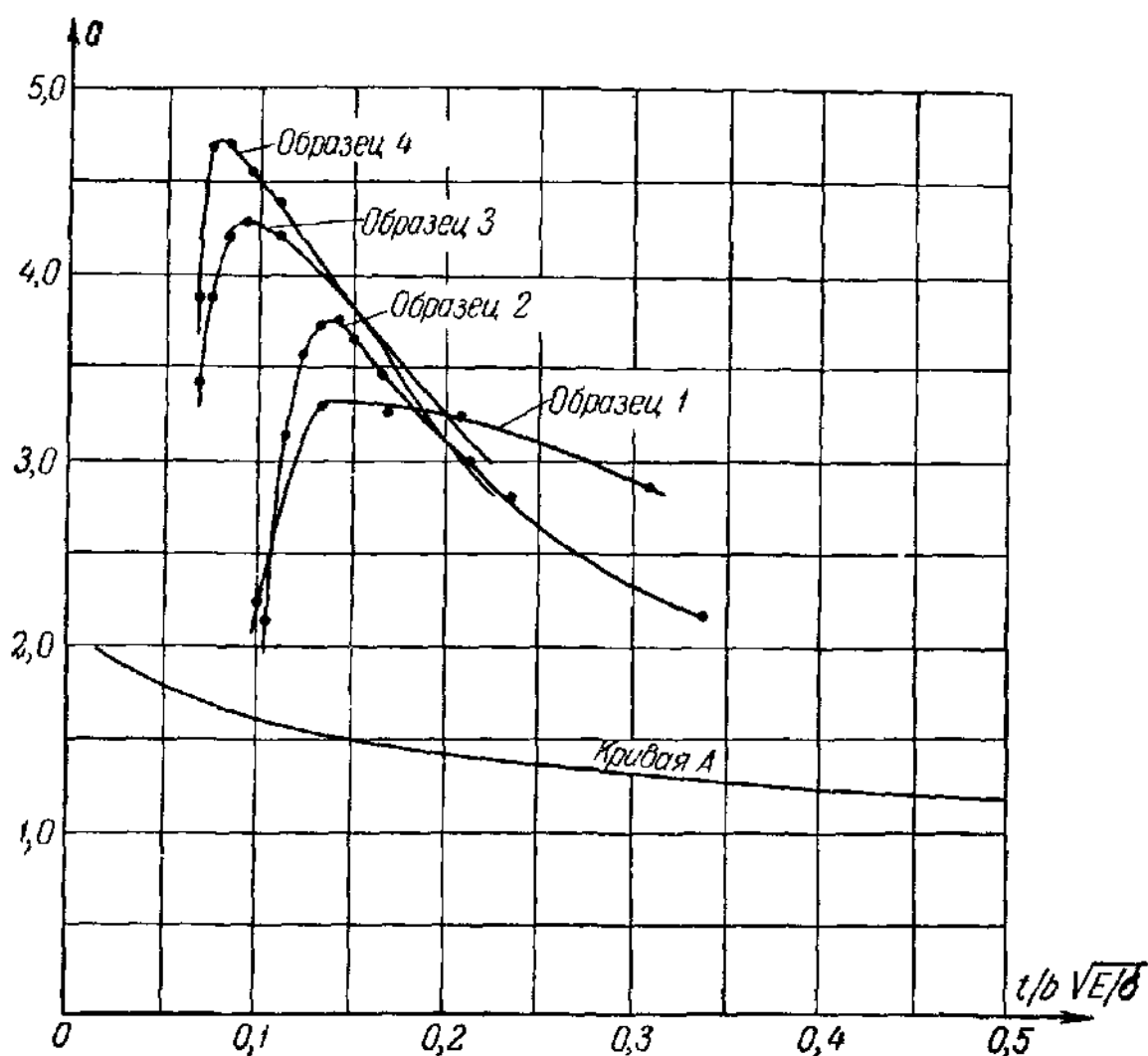


Рис. 195.

более точные значения, если включить эффективную площадь пластинки в поперечное сечение ребра жесткости и определить критическую нагрузку полученного в результате сечения сжатого стержня. Этот метод хорошо отражает поведение подкрепленной пластинки, описанное в предыдущем параграфе.

Теоретическое определение значений эффективной ширины, изложенное в главе XII, неприменимо в случае, когда напряжения лежат выше предела упругости или в несколько раз больше, чем  $\sigma_{кр}$ .

<sup>1)</sup> Gall H. W., Compressive Strength of Stiffened Sheet Panels, Thesis, 1930, reported by J. S. Newell, The Strength of Aluminum Alloy Sheets, Airway Age, 1930.

<sup>2)</sup> Шуман, Бак, цит. далее, стр. 520.

<sup>3)</sup> Лундквист, цит. выше, стр. 397.

Основываясь на экспериментах, эффективную ширину  $b_e$  можно выразить в следующем виде:

$$b_e = Ct \sqrt{\frac{E}{\sigma}}, \quad (721)$$

где  $\sigma$  обозначает напряжение в ребре жесткости, а  $C$  — коэффициент, зависящий от отношения  $(t/b)\sqrt{E/\sigma}$ . Значения коэффициента  $C$  определялись на базе опытов, и различные кривые построены для  $C$  в зависимости от того, лежит ли значение  $\sigma$  близко или явно ниже предела текучести<sup>1)</sup>. Эти опыты показывают, что значения  $C$  в уравнении (721) значительно больше, чем в другом аналогичном уравнении (921) для предельной прочности свободно опертых пластинок, при условии, если напряжение  $\sigma$  не превосходит предела пропорциональности. На рис. 195 даны значения  $C$  в уравнении (721), определенные из опытов, поставленных на четырех образцах, а также кривая, отмеченная буквой  $A$ , для значений  $C$  в уравнении (921), определенных из опытов по предельной прочности свободно опертых пластинок. Значения  $C$  лежат значительно выше кривой  $A$ , за исключением малых значений  $t/b\sqrt{E/\sigma}$ , когда напряжение  $\sigma$  в образцах превосходит предел пропорциональности.

---

<sup>1)</sup> Sechler E. E., Stress Distribution in Stiffened Panels under Compression, Jour. Aeronaut. Sci., 1937, стр. 320.

## ГЛАВА XI

### УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕНОК СПЛОШНЫХ БАЛОК

#### 104. Введение

В связи с тем, что одно из главных напряжений, действующих в вертикальных стенках сплошных балок при изгибе, является сжимающим, необходимо рассмотреть возможность появления неустойчивого положения равновесия стенок. Следовательно, обычный расчет стенки по отношению к допускаемому касательному напряжению следует дополнить исследованием устойчивости стенок.

Основную задачу можно пояснить примером, показанным на рис. 196. Прямоугольная пластинка длиной  $a$ , шириной  $b$  и толщиной  $t$ , опертая на всех четырех краях, подвержена

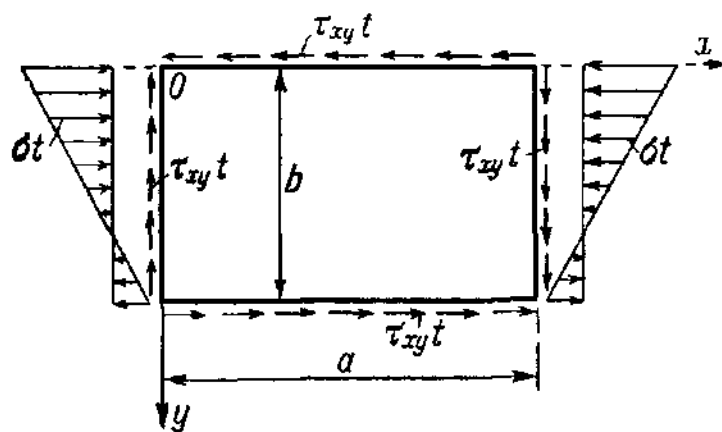


Рис. 196.

действию равномерно распределенных вдоль всех краев касательных сил  $\tau_{xy}t$  и, кроме того, нагружена продольными силами  $\sigma_x t$ , линейно распределенными вдоль краев  $x=0$  и  $x=a$ . Распределение напряжений, показанное на рис. 196, представляет собой наиболее общий случай, имею-

щий место в панели стенки сплошной балки, находящейся между двумя жесткими ребрами, в случае, когда наряду с продольным изгибающим моментом действует также осевая сжимающая сила, как это наблюдается в стенках арки. Аналогичное условие нагружения имеет место тогда, когда стенка, кроме вертикальных ребер жесткости, подкреплена продольными ребрами, как это показано на рис. 197, отсюда необходимо исследовать устойчивость стенки, находящейся между верхним поясом и продольными ребрами жесткости.

Конечно, вышеописанное условие нагружения представляет собой идеальный случай, так как касательные напряжения в действитель-

ности распределены по параболическому закону вдоль краев  $x=0$  и  $x=a$  и изменяются, кроме того, вдоль краев  $y=0$  и  $y=b$ . Предположение о том, что напряжения  $\sigma_x$  постоянны между  $x=0$  и  $x=a$ , является дальнейшим упрощением, так как в действительности эти напряжения меняются вдоль балки вместе с изгибающим моментом. Однако, для того чтобы решить задачу о выпучивании без излишних осложнений, первым шагом является необходимость упрощения условия нагружения при исследовании устойчивости стенок сплошных балок. Ошибка, допущенная на основании упрощения условия нагружения, будет незначительной в случае, если используются средние значения напряжений  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$ .

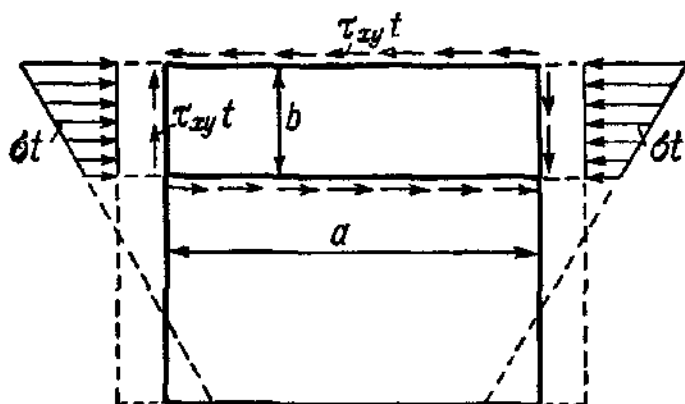


Рис. 197.

Обычно стенки высоких сплошных балок являются слишком тонкими для того, чтобы воспринимать достаточно большую критическую нагрузку; поэтому экономическое проектирование их невозможно без применения ребер жесткости. Следовательно, продольные или поперечные ребра жесткости или комбинация их играют важную роль при проектировании стенок. Необходимость использования подкрепленных пластинок была причиной возникновения довольно сложных теоретических и экспериментальных исследований задачи подкрепленных пластинок при одновременном действии касательных и изгибающих напряжений.

Первая группа задач устойчивости, рассмотренных в этой главе, имеет целью определение критического напряжения неподкрепленных стенок при различных условиях нагружения и опирания краев. Во второй части главы рассматривается влияние продольных и поперечных ребер жесткости на устойчивость пластинок под действием касательных и изгибающих напряжений.

Первыми исследователями в области решения задач о неподкрепленных стенках были Бубнов и Тимошенко. Бубнов<sup>1)</sup> исследовал свободно опертую прямоугольную пластинку под одновременным действием изгибающих и сжимающих напряжений в плоскости пластинки, распределенных на двух противоположных краях. Тимошенко<sup>2)</sup> впервые дал практическое решение задачи устойчивости прямоугольных пластинок при сдвиге, используя энергетический метод; этот

<sup>1)</sup> Бубнов И. Р., Строительная механика корабля, Изд. Морск. мин-ства, 1914, часть II, стр. 515.

<sup>2)</sup> Тимошенко С. П., Устойчивость прямоугольных подкрепленных пластинок, Тр. Ин-та инж. путей сообщ., Петроград, 1915, т. 89, стр. 23. Über die Stabilität versteifter Platten, Der Eisenbau, т. 12, стр. 147, 1921.

метод оказался мощным средством решения задач, которые иначе невозможно было бы решить непосредственно, как задачу о собственных значениях. Он применил энергетический метод также к определению критического напряжения свободно опертых прямоугольных пластинок под действием изгибающих и сжимающих напряжений, а также для случая одновременного действия касательных напряжений и напряжений чистого изгиба<sup>1)</sup>.

Сделаем сначала обзор дальнейшего развития теории пластинок при сдвиге. Саутуэлл и Скан<sup>2)</sup>, которые рассматривали случаи свободно опертых и защемленных пластинок, опубликовали точное решение для бесконечно длинной пластинки под действием касательных напряжений вдоль ее длинных сторон. Тщательное исследование точности полученных Тимошенко результатов для свободно опертых пластинок было проведено Бергманом и Рейснером<sup>3)</sup> и Зейдлом<sup>4)</sup>, причем последний дал более точные значения для коэффициента устойчивости  $k$ . Стейн и Нефф<sup>5)</sup> на основе рассмотрения симметричной и антисимметричной форм выпучивания точнее, чем предшествующие исследователи, определили значение критических касательных напряжений. Моheit<sup>6)</sup>, а также Будянский и Коннор<sup>7)</sup> получили значение критических напряжений для защемленных прямоугольных пластинок при сдвиге. Оба последних исследователя получили более точные значения критических напряжений. Недавно Будянский, Коннор и Стейн<sup>8)</sup> исследовали случай бесконечно длинных защемленных пластинок, разделенных на квадратные панели при помощи жестких промежуточных опор. Стоуэлл<sup>9)</sup> рассмотрел бесконечно длинные пластинки при сдвиге с равными упругими заделками против вращения вдоль параллельных краев.

---

<sup>1)</sup> Timoshenko S., Stability of the Webs of Plate Girders, Engineering, т. 238, стр. 207, 1935.

<sup>2)</sup> Skan S. W., Southwell R. V., On the Stability under Shearing Forces of a Flat Elastic Strip, Proc. Roy. Soc. (London), Series A., т. 105, стр. 582, 1924.

<sup>3)</sup> Bergmann S., Reissner H., Über die Knickung von rechteckigen Platten bei Schubbeanspruchung, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, т. 23, стр. 6, 1932.

<sup>4)</sup> Seydel E., Über das Ausbeulen von rechteckigen isotropen oder orthogonalanisotropen Platten bei Schubbeanspruchung, Ingenieur-Archiv, т. 4, стр. 169, 1933.

<sup>5)</sup> Stein M., Neff J., Buckling Stress of Simply Supported Rectangular Flat Plates in Shear, NACA Techn. Note 1222, 1947.

<sup>6)</sup> Moheit W., Schubbeulung rechteckiger Platten mit eingespannten Rändern, Thesis, Technische Hochschule Darmstadt, Leipzig, 1939.

<sup>7)</sup> Budiansky B., Connor R. W., Buckling Stresses of Clamped Rectangular Flat Plates in Shear, NACA Tech. Note 1559, 1948.

<sup>8)</sup> Budiansky B., Connor R. W., Stein M., Buckling in Shear of Continuous Flat Plates, NACA Tech. Note 1565, 1948.

<sup>9)</sup> Stowell E. Z., Critical Shear Stresses for an Infinitely Long Plate with Equal Elastic Restraints against Rotation along the Parallel Edges, NACA Wartime Rept. L-476.

Нельке<sup>1)</sup> исследовал выпучивание защемленной пластинки под действием неравномерно распределенных на двух противоположных сторонах сжимающих напряжений.

Штейн<sup>2)</sup> изучал пластинки под одновременным действием изгибающих и касательных напряжений; он рассчитал таблицы взаимосвязи между критическими продольными напряжениями  $\sigma_{кр}$  и критическими касательными напряжениями  $\tau_{кр}$ . Работы Штейна и Тимошенко по этому вопросу публиковались примерно в одно и то же время. Работы Батдорфа и Штейна<sup>3)</sup>, а также Стоулла и Шварца<sup>4)</sup> посвящены задаче о пластинках под одновременным действием касательных и постоянных продольных напряжений.

В работах 1915 и 1921 гг. Тимошенко<sup>5)</sup> исследовал задачу о подкрепленных стенках. Шмиден<sup>6)</sup>, Зейдл<sup>7)</sup>, Хвалла<sup>8)</sup> и Денк<sup>9)</sup> рассматривали различные задачи, относящиеся к поведению подкрепленных стенок. Не так давно Штейн и Фралих<sup>10)</sup> нашли точные решения для бесконечно длинных свободно опертых пластинок с поперечными ребрами жесткости.

Кроме этих теоретических исследований устойчивости стенок сплошных балок, которые ведутся уже более двух десятилетий, в последнее время проводится большая экспериментальная работа. Лабораторные исследования имеют целью проверить теоретические результаты и исследовать действительное поведение стенок в реальных конструкциях, где условия нагружения и условия опирания вдоль краев могут существенно отличаться от идеальных условий, на которых основывается аналитический расчет. Некоторые из этих

---

1) Nölke K., Biegungsbeulung der Rechteckplatte mit eingepannten Längsrändern, Der Bauingenieur, т. 17, стр. 111, 1936 и Ingenieur-Archiv, т. 8, стр. 403, 1937.

2) Stein O., Die Stabilität der Blechträgerstehbleche im zweiachsigen Spannungszustand, Der Stahlbau, т. 7, стр. 57, 1934.

3) Batdorf S. B., Stein M., Critical Combinations of Shear and Direct Stress for Simply Supported Rectangular Flat Plates. NACA Tech. Note 1223, 1947.

4) Stowell E. Z., Schwartz E. B., Critical Stresses for an Infinitely Long Plate with Elastically Restrained Edges under Combined Shear and Direct Stress, NACA Wartime Rept. L-340.

5) Тимошенко, цит. выше, стр. 425.

6) Schmieden C., Das Ausknicken versteifter Bleche unter Schubbeanspruchung, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, т. 21, стр. 61, 1930.

7) Seydel E., Beitrag zur Frage des Ausbeulens versteifter Platten unter Schubbeanspruchung, Jahrbuch Deutscher Verein für Luftfahrt-Forschung, 1930, стр. 235.

8) Chwalla E., Beitrag zur Stabilitätstheorie des Stegbleches vollwandiger Träger, Der Stahlbau, т. 9, стр. 161, 1936; Die Bemessung der waagrecht ausgesteiften Stegbleche vollwandiger Träger, Prelim. Rept. 2d Cong. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., Berlin, 1936, p. 957.

9) Denke P. H., Analysis and Design of Stiffened Shear Webs, Journ. Aeronaut. Sci., т. 17, стр. 217, 1950.

10) Stein M., Fralich R. W., Critical Shear Stress of Infinitely Long, Simply Supported Plate with Transverse Stiffeners, NACA Tech. Note 1851, 1949.

опытов были поставлены с особой целью исследования послекритического поведения пластинок и определения предельной прочности стенок при условиях, преобладающих в реальных конструкциях.

Габор<sup>1)</sup>, Бергман и Вестлунд<sup>2)</sup> экспериментально исследовали поведение стенок сплошных балок под действием изгибающих моментов, а Мохейт<sup>3)</sup>, Годфри и Лайс<sup>4)</sup>, Мур<sup>5)</sup>, Бергман и Вестлунд — пластинки, находящиеся под действием касательных сил и при одновременном действии изгибающих и касательных сил.

Все вышеупомянутые теоретические работы рассматривают задачу устойчивости только в упругой области. Для практических расчетов, особенно при проектировании стальных конструкций и кораблей, очень важным является вопрос о применении этой теории в неупругой области. В последующих параграфах автор книги пытается излагать результаты, полученные на основе теорий для упругого выпучивания, таким образом, чтобы они могли быть применены в случае выпучивания в неупругой области.

### 105. Выпучивание прямоугольных пластинок при сдвиге

**Свободно опертые пластинки.** Прямоугольная пластинка длиной  $a$ , шириной  $b$  и толщиной  $t$ , свободно опертая вдоль всех

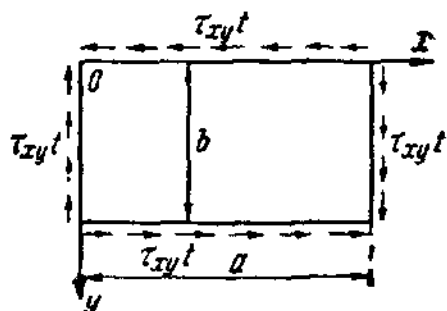


Рис. 198.

четырех краев, находится под действием равномерно распределенных по краям касательных сил  $\tau_{xy}t$  (рис. 198). В связи с тем, что не имеется точного решения основного дифференциального уравнения (599) задачи о выпучивании пластинки конечной длиной  $a$ , получено приближенное решение, основанное на теореме о стационарном значении потенциальной энергии. В данный момент рассмотрим только явление упругого выпучивания.

На основе теоремы о стационарном значении потенциальной энергии имеем<sup>6)</sup>:

$$V + U_w = \text{стационарному значению}, \quad (722)$$

где  $V$  — энергия деформаций изгиба пластинки, а  $U_w$  — изменение потенциальной энергии внешних сил при переходе пластинки от плоской к изогнутой форме равновесия.

<sup>1)</sup> Gabor E., Beulversuche an Modellträgern aus Stahl, Die Bautechnik, т. 22, стр. 6, 1944.

<sup>2)</sup> Wästlund G., Bergman S. G., A Buckling of Webs in Deep Steel I-Girders, Pubs. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., т. 8, стр. 291, 1947.

<sup>3)</sup> Мохейт, цит. выше, стр. 426.

<sup>4)</sup> Godfrey H. J., Lyse I., Investigation of Web Buckling in Steel Beams, Trans. ASCE, т. 100, стр. 675, 1935.

<sup>5)</sup> Moore R. L., Observations on the Behavior of Aluminum Alloy Test Girders, Trans. ASCE, т. 112, стр. 901, 1947.

<sup>6)</sup> Уравнение (82) главы II.



Используем следующие обозначения:  $x$  и  $y$  — координаты относительно начала  $O$ , находящегося в срединной плоскости пластинки рис. 198;  $w$  — прогиб пластинки в выпученном состоянии;

$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  — изгибная жесткость пластинки.

Так как рассматривается упругое выпучивание, то  $E$  — модуль Юнга.

Энергия деформаций выражается следующим двойным интегралом<sup>1)</sup>:

$$V = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (723)$$

В случае, когда края пластинки свободно оперты или защемлены, выражение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2$$

в уравнении (723) не включается в вариации  $\delta V$  энергии деформаций  $V$  и, следовательно, не влияет на условие экстремума<sup>2)</sup> (722). При расчете значения  $V$  этот член можно опускать и выражение (723) примет следующий вид:

$$V = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy. \quad (724)$$

Изменение  $U_w$  потенциальной энергии равно отрицательному значению работы, проделанной равномерно распределенными касательными напряжениями  $\tau_{xy}t$ , и равно

$$U_w = -\tau_{xy}t \int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy. \quad (725)$$

Применяя метод Ритца, выразим прогиб  $w$  через подходящим образом подобранные координатные функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям:

$$w = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}, \quad (726)$$

и подставим этот ряд в уравнения (724) и (725).

<sup>1)</sup> Timoshenko S., Theory of Elastic Stability, стр. 307, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1936; русский перевод: Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, 1955, стр. 317.

<sup>2)</sup> См. вывод уравнения (168) в главе II.

Вычислим вторые производные от прогиба:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\pi^2}{a^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} i^2 \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{b^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} j^2 \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}.$$

Подставляя эти два выражения в уравнение (724), обнаружим, что вследствие соотношений ортогональности, существующих между координатными функциями ряда (726), интегралы от смешанных производных равны нулю. Получим:

$$V = \frac{\pi^4}{8} Dab \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}^2 \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2. \quad (727)$$

Для того чтобы определить значение  $U_w$ , вычислим:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\pi}{a} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} i \cos \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\pi}{b} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} j \cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b}$$

и

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\pi^2}{ab} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} f_{i'j'} \cos \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{i'\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} \cos \frac{j'\pi y}{b},$$

где индексы  $i$ ,  $i'$ ,  $j$  и  $j'$  принимают все значения  $1, 2, \dots, n$ . Принимая во внимание, что в случае, если  $m + k$  — четное число,

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi z}{l} \cos \frac{k\pi z}{l} dz = 0, \text{ а в случае, если } m + k \text{ — нечетное число,}$$

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi z}{l} \cos \frac{k\pi z}{l} dz = \frac{2l}{\pi} \frac{m}{m^2 - k^2}, \text{ получим следующее выражение}$$

для  $U_w$ :

$$U_w = -4\tau_{xy} t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} f_{i'j'} \frac{ijl'j'}{(i^2 - i'^2)(j'^2 - j^2)}. \quad (728)$$

В этом уравнении индексы  $i$ ,  $i'$ ,  $j$  и  $j'$  принимают не все значения от 1 до  $n$ , а только те, для которых  $i + i'$  и  $j + j'$  являются нечетными числами.

Ограничим число членов ряда (726) четырьмя, предполагая  $n = 2$ . Следовательно, индексы  $i, j, i'$  и  $j'$  могут иметь только значения 1 или 2. В связи с тем, что только следующие комбинации значений  $i, j, i'$  и  $j'$  удовлетворяют условию нечетности сумм  $i + i'$  и  $j + j'$ :

$$\begin{array}{cccc} i & j & i' & j' \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

уравнение (728) будет иметь четыре члена.

Вводя обозначения  $\alpha = a/b$ , выразим полную потенциальную энергию  $V + U_w$  в следующем виде:

$$V + U_w = \frac{\pi^4}{8} \frac{D}{\alpha^3 b^3} [f_{11}^2 (1 + \alpha^2)^3 + f_{12}^2 (1 + 4\alpha^2)^3 + f_{21}^2 (4 + \alpha^2)^2 + + f_{22}^2 (4 + 4\alpha^2)^2] + 8\tau_{xy} t \left( \frac{4}{9} f_{11} f_{22} - \frac{4}{9} f_{12} f_{21} \right). \quad (729)$$

Используя условие (722), определим стационарные значения уравнения (729) путем дифференцирования по переменным  $f_{11}, f_{12}, f_{21}$  и  $f_{22}$  и получим следующую систему четырех линейных уравнений:

$$\left. \begin{array}{llll} B(1 + \alpha^2)^2 f_{11} + & & + \frac{4}{9} \tau_{xy} f_{22} = 0; \\ B(1 + 4\alpha^2)^2 f_{12} & - \frac{4}{9} \tau_{xy} f_{21} & = 0; \\ - \frac{4}{9} \tau_{xy} f_{12} & + B(4 + \alpha^2)^2 f_{21} & = 0; \\ \frac{4}{9} \tau_{xy} f_{11} + & & + B(4 + 4\alpha^2)^2 f_{22} = 0, \end{array} \right\} \quad (730)$$

где

$$B = \frac{\pi^4}{32} \frac{D}{\alpha^3 b^2 t}. \quad (731)$$

Эти четыре линейных и однородных уравнения (730) имеют нулевые решения  $f_{11} = f_{12} = \dots = 0$  в случае, если детерминант  $\Delta$ , составленный из коэффициентов этих уравнений, не равен нулю. Следовательно, уравнение  $\Delta = 0$  представляет собой условие устойчивости. Раскрывая этот детерминант  $\Delta$ , получим уравнение четвертого порядка относительно неизвестного  $\tau_{xy}$ , имеющее четыре корня:

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{1,2} = \pm \frac{9}{4} B (1 + \alpha^2) (4 + 4\alpha^2); \\ \tau_{3,4} = \pm \frac{9}{4} B (1 + 4\alpha^2) (4 + \alpha^2). \end{array} \right\} \quad (732)$$

Появление неустойчивого состояния пластинки не зависит от направления касательного напряжения, отсюда наименьшее абсолютное значение  $\tau_{xy}$ , равное  $\tau_{1,2}$ , является критическим напряжением  $\tau_{кр}$ .

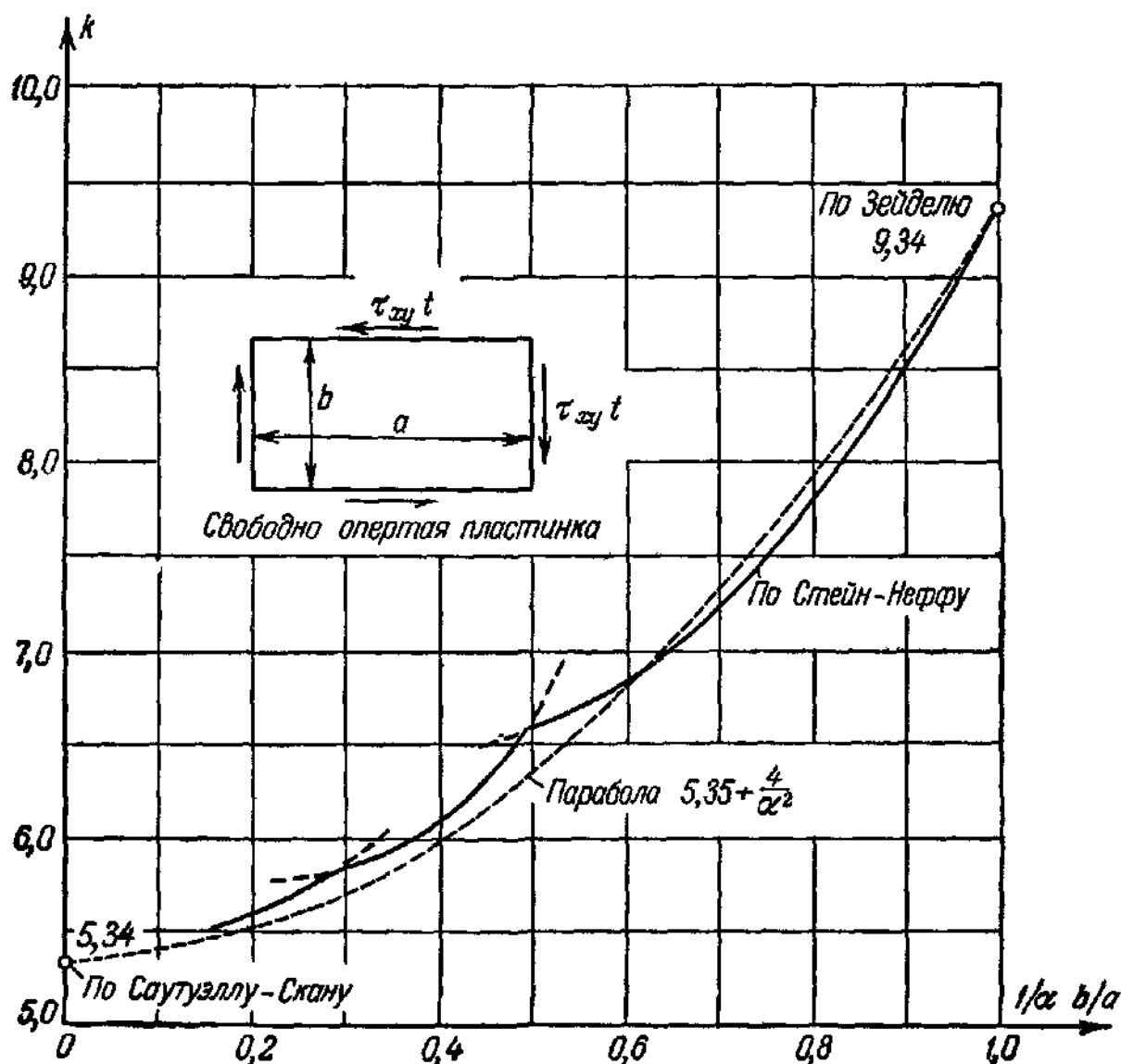


Рис. 199.

На основе уравнения (731) критическое значение  $\tau_{кр}$  касательного напряжения  $\tau_{xy}$  будет

$$\tau_{кр} = \frac{9}{32} \frac{\pi^4 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^3 \frac{(1+\alpha^2)^3}{\alpha^8}.$$

Это уравнение имеет типичный вид выражения для критических напряжений прямоугольных пластинок, т. е.

$$\tau_{кр} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^3 k, \quad (733)$$

где  $k$  — коэффициент устойчивости пластинки:

$$k = \frac{9\pi^2}{32} \frac{(1+\alpha^2)^3}{\alpha^8}, \quad (734)$$

зависящий от отношения  $\alpha$ .

Значение  $k$ , данное уравнением (734), при  $\alpha = 1$  отличается от точного значения примерно на 15%; это различие становится еще больше при  $\alpha > 1$ . Для того чтобы получить удовлетворительные приближения, необходимо использовать значительно большее число членов разложения (726), чем было использовано выше. Взяв большее значение для  $n$ , Тимошенко получил для различных величин отношения  $\alpha$  значения  $k$ , которые в крайнем случае, при  $\alpha < 2,5$ , очень близки к точным значениям.

Саутуэлл и Скан<sup>1)</sup> определили точное значение  $k = 5,34$  при  $\alpha = \infty$ . Бергман и Рейснер<sup>2)</sup>, а позже Зейдл<sup>3)</sup> с целью получения наиболее точных значений для  $k$  провели тщательные вычисления, используя большее число координатных функций. Зейдл определил очень точно значение  $k = 9,34$  при  $\alpha = 1$ . В недавно опубликованной работе Стейна и Неффа<sup>4)</sup> содержатся наиболее точные значения  $k$  для других величин отношения  $\alpha$ . Они определены из детерминанта десятого порядка, причем рассматривались симметричная и антисимметричная формы выпучивания. Результаты, полученные Стейном и Неффом, даны на рис. 199, где нанесены значения  $k$  в зависимости от величины  $1/\alpha$ . Эта кривая может быть заменена параболой, связывающей точки  $k = 5,34$  для  $1/\alpha = 0$  (Саутуэлл и Скан) и  $k = 9,34$  для  $1/\alpha = 1$  (Зейдл). Парабола показана на рис. 199 и легко видеть, что она хорошо аппроксимирует теоретические кривые. Таким образом, для расчетных целей получим следующую простую формулу:

$$k = 5,34 + \frac{4}{\alpha^2} \quad (\text{пригодную для } \alpha > 1). \quad (735)$$

В связи с тем, что при расчете панели пластинки величину  $a$  всегда можно считать ее наибольшим размером, как это показано на рис. 200,

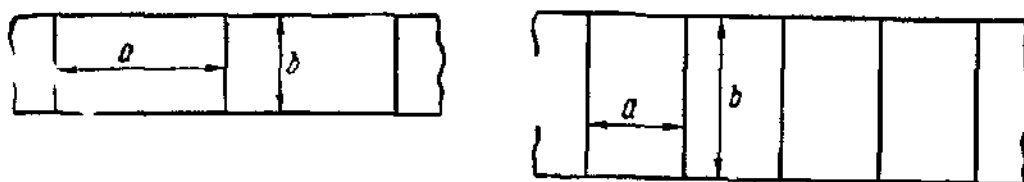


Рис. 200

необходимость выводить формулу для коэффициента  $k$  при  $\alpha < 1$  отпадает.

**Пластины, защемленные вдоль четырех краев.** Саутуэлл и Скан<sup>5)</sup> рассмотрели также эту задачу и дали точное решение для случая бесконечно длинной пластинки  $k = 8,98$ . При помощи метода

<sup>1)</sup> Саутуэлл, Скан, цит. выше, стр. 426.

<sup>2)</sup> Бергман, Рейснер, цит. выше, стр. 426.

<sup>3)</sup> Зейдл, цит. выше, стр. 426.

<sup>4)</sup> Стейн, Нефф, цит. выше, стр. 426.

<sup>5)</sup> Саутуэлл, Скан, цит. выше, стр. 426.

Ритца Кокс<sup>1)</sup> исследовал пластинки с несколькими значениями отношения  $\alpha$ . Игучи<sup>2)</sup> использовал метод рядов и получил приближенные решения для прямоугольных пластинок. Результаты, полученные этими двумя исследователями, для некоторых значений отношения  $\alpha$  существенно отличаются от более точных значений, определенных

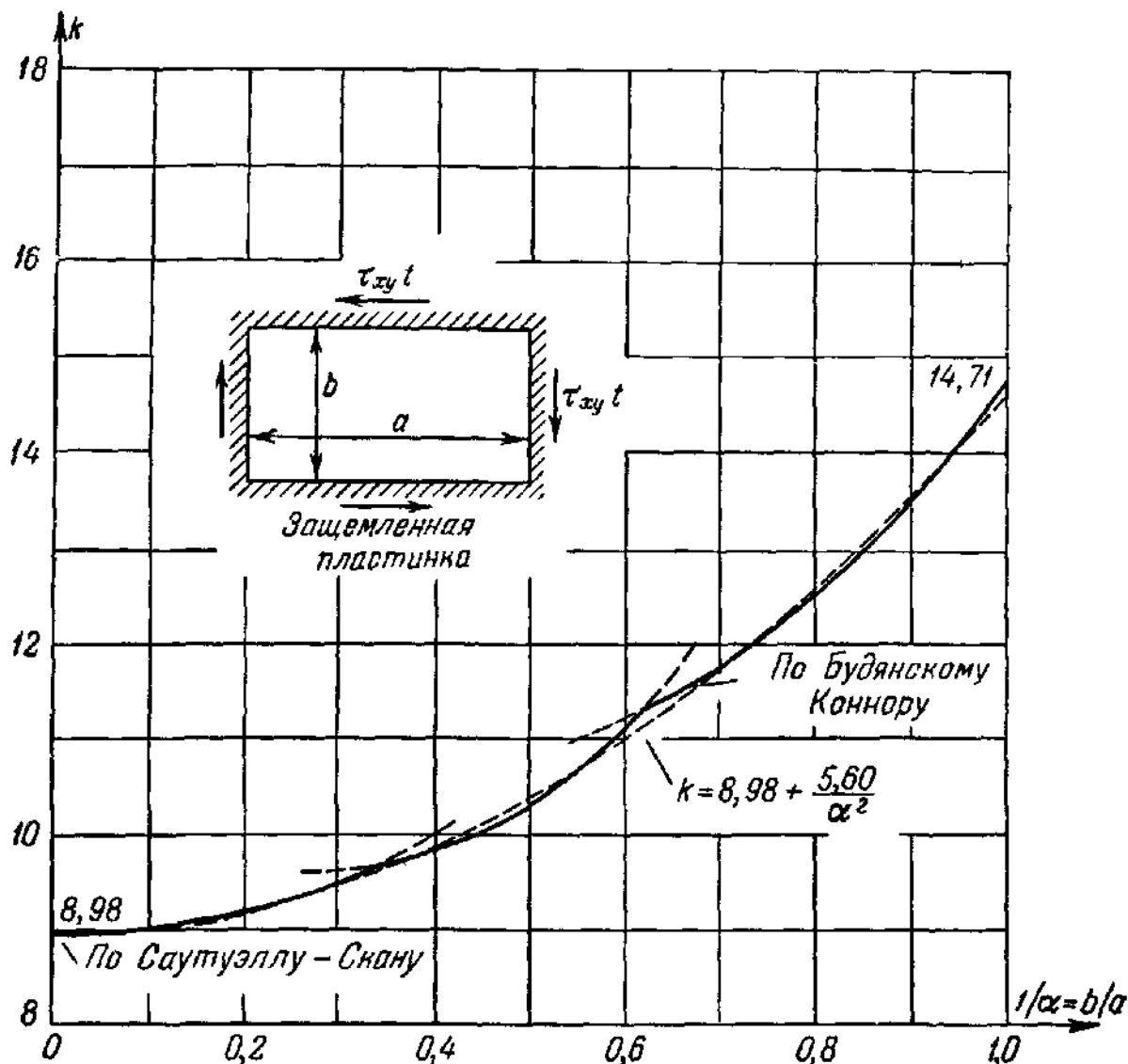


Рис. 201.

Будянским и Коннором<sup>3)</sup>. Эти исследователи применили метод множителя Лагранжа<sup>4)</sup> для вычисления верхней и нижней границ критического напряжения и таким образом определили значения коэффициента устойчивости  $k$  с удовлетворительной точностью. Максимум ошибки составляет 1,25%. На рис. 201 приведены значения  $k$ , рас-

<sup>1)</sup> Cox H. L., Summary of the Present State of Knowledge Regarding Sheet Metal Construction, R.&M. No. 1553, 1933.

<sup>2)</sup> Iguchi S., Die Knickung der rechteckigen Platte durch Schubkräfte, Ingenieur — Archiv, т. 9, стр. 1, 1938.

<sup>3)</sup> Будянский, Коннор, цит. выше, стр. 426. Budiansky B., Hu P. C., Connor R. W. Notes on the Lagrangian Multiplier Method in Elastic Stability Analysis, NACA Tech. Note 1558, 1947.

<sup>4)</sup> См. главу II, § 26.

считанные Будянским и Коннором, в зависимости от отношения  $1/\alpha$ . Аналогично случаю со свободно опертыми краями кривую значений коэффициента устойчивости  $k$  можно аппроксимировать параболой

$$k = 8,98 + \frac{5,60}{\alpha^2}, \quad (736)$$

довольно хорошо совпадающей с теоретической кривой.

**Пластинки, защемленные только вдоль длинных краев.** Леггетт<sup>1)</sup> и Игухи<sup>2)</sup> исследовали пластинки, защемленные вдоль двух длинных краев и свободно вращающиеся на двух других краях. Леггетт дал решение для квадратной пластинки; Игухи рассмотрел пластинки для всех значений  $1 \leq \alpha \leq \infty$ . В таблице 33 даны значения  $k$ , выведенные Игухи. Степень приближения значений  $k$ , приведенных в этой таблице, неизвестна, за исключением случая, когда  $\alpha = \infty$ , где данное значение близко к точному, найденному Саутуэллом и Сканом,  $k = 8,98$ .

Таблица 33. Значения коэффициента устойчивости  $k$  для пластинок, защемленных вдоль двух длинных сторон при сдвиге

$\alpha$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	$\infty$
$k$	12,28	11,12	10,21	9,81	9,61	8,99

**Критические касательные напряжения в неупругой области.** Вышеприведенные решения задачи о выпучивании стенок при сдвиге были получены в предположении об идеально упругом поведении пластинок. Теперь необходимо видоизменить полученные формулы с учетом влияния пластичности на критическое напряжение  $\tau_{кр}$  для случая, когда значение этого напряжения лежит выше предела пропорциональности при сдвиге.

Основное дифференциальное уравнение (601) для случая неупругого выпучивания пластинок под действием продольных сжимающих сил было получено в главе IX на основе гипотезы об анизотропном поведении пластинки в случае, когда выпучивание происходит выше предела пропорциональности. Предполагалось, что в направлении действующих сжимающих напряжений  $\sigma_x$  эффективен приведенный модуль упругости, тогда как в перпендикулярном направлении применим модуль Юнга. Однако в случае пластинки, находящейся под действием чистого сдвига, условия становятся совершенно иными. Главные напряжения, соответствующие состоянию чистого сдвига  $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{xy}$ , равны; отсюда вытекает, что

<sup>1)</sup> Leggett D. M. A., The Buckling of a Square Panel under Shear When One Pair of Opposite Edges Is Clamped, R. & M. № 1991, 1941.

<sup>2)</sup> Игухи, цит. выше, стр. 434.

предположение изотропного поведения пластинки в упругой области выпучивания является логически оправданным. Это означает, что формулы, выведенные выше, применимы в упругой и неупругой областях при условии, если в неупругой области модуль Юнга заменяется соответствующим приведенным модулем  $E_r$ . Вводя обозначение  $\eta = E_r/E$ , формулу для пластинки (733) напомним в следующем обобщенном виде:

$$\tau_{кр} = \frac{\pi^2 E \eta}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k, \quad (737)$$

где  $\eta = 1$  для случая, когда значение критического напряжения лежит ниже предела пропорциональности, и  $\eta < 1$ , когда  $\tau_{кр}$  находится

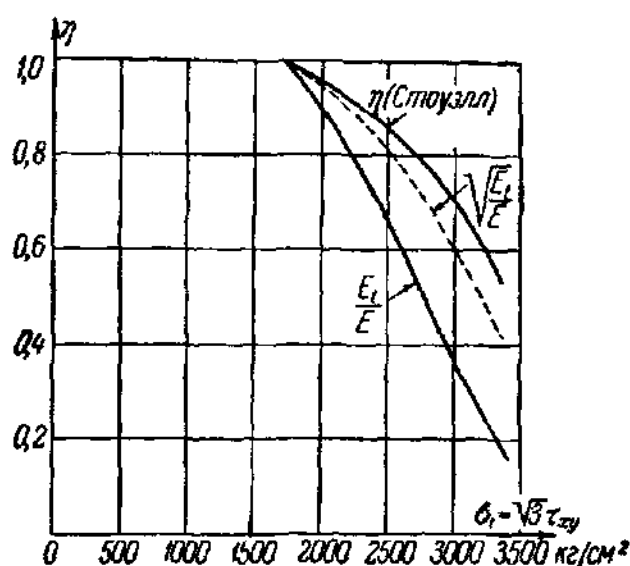


Рис. 202.

выше этого предела. Величина  $k$  обозначает выведенный выше коэффициент устойчивости для упругого выпучивания и определяется уравнениями (735) и (736) или с помощью таблицы 33 в зависимости от условий опирания.

В недавно опубликованной статье Стоуэлл<sup>1)</sup> применил свою объединенную теорию пластического выпучивания для определения коэффициента пластичности  $\eta$  пластинок при сдвиге в зависимости от касательного модуля  $E_t$  и секущего модуля  $E_s$ . Кривые на рис. 202 взяты из

работы Стоуэлл и изображают значения  $\eta$  в зависимости от интенсивности напряжений  $\sigma_s = \sqrt{3} \tau_{xy}$ <sup>2)</sup>. Кривая построена для бесконечно длинной пластинки из алюминиевого сплава 24ST под действием чистого сдвига. Установлено, что величина  $\eta$  почти не зависит от степени заделки длинных краев пластинки, и значения  $\eta$

<sup>1)</sup> Stowell E. Z., Critical Shear Stresses of an Infinitely Long Plate in the Plastic Region, NASA Tech. Note 1681, 1948. См. также изложение теории Стоуэлл в § 87 главы IX.

<sup>2)</sup> В соответствии с условием пластичности Губера, Мизеса и Генки интенсивность напряжений для плоского напряженного состояния равна

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}.$$

В случае, когда  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ , это выражение принимает следующий вид:  $\sigma_s = \tau_{xy} \sqrt{3}$ . Для читателей, незнакомых с теориями пластичности, можно добавить, что  $\sigma_s$  аналогично приведенному напряжению в элементарной теории строительной механики. Следовательно, если для некоторой комбинации напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  интенсивность напряжений  $\sigma_s$  равна пределу текучести при одноосном растяжении, то считается, что эта же комбинация вызывает текучесть в материале.



применимы в случае свободно опертых и заземленных краев. На рис. 202 приведены также кривые значений  $E_t/E$  и  $\sqrt{E_t/E}$ . Сопоставляя кривую значений  $\eta$  с кривой для  $\sqrt{E_t/E}$ , обнаруживаем, что равенство  $\sqrt{\tau} = \sqrt{E_t/E}$  можно рассматривать как хорошую аппроксимацию для  $\eta$ , дающую надежные значения критического напряжения  $\tau_{кр}$ . Преимущество использования условия  $\eta = \sqrt{\tau}$  заключается в том, что один и тот же коэффициент пластичности  $\sqrt{\tau}$  применяется как для пластинок под действием сдвига, так и для пластинок под действием постоянных продольных напряжений<sup>1)</sup>.

В результате подстановки соотношений  $\sigma_i = \tau_{кр} \sqrt{3}$  и  $\eta = \sqrt{\tau}$  уравнение (737) примет следующий вид<sup>2)</sup>:

$$\frac{\sigma_i}{\sqrt{\tau}} = \frac{\pi^2 E \sqrt{3}}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k. \quad (738)$$

Для того чтобы определить критическое касательное напряжение  $\tau_{кр}$ , из уравнения (738) вычислим  $\sigma_i/\sqrt{\tau}$ , после чего соответствующее значение  $\sigma_i$  можно найти из таблицы, дающей значения напряжения  $\sigma$  в зависимости от  $\sigma/\sqrt{\tau}$ . Такие таблицы уже использовались в § 93 в связи с исследованием выпучивания сжатых пластинок (см. таблицы 27 и 28). При помощи этого критического значения в результате получим критическое касательное напряжение

$$\tau_{кр} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}. \quad (739)$$

Уравнение (738) применимо в упругой и неупругой областях. При  $\sigma_i/\sqrt{\tau} \leq \sigma_{\pi}$  (предел пропорциональности)  $\sqrt{\tau} = 1$  и уравнения (738) и (739) дают тот же результат, что и уравнение (733).

#### 106. Выпучивание стенок при неравномерно распределенных напряжениях

**Свободно опертые пластинки.** На рис. 203 показано условие нагружения, исследуемое в этом параграфе. Считая значение  $\sigma$  положительным при сжатии, величину напряжения  $\sigma$  на расстоянии  $y$  от верхнего края пластинки можно выразить линейным соотношением

$$\sigma = \sigma_1 \left(1 - \frac{\xi y}{b}\right) \quad \text{и} \quad \xi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1}, \quad (740)$$

где значение  $\xi = 0$  соответствует равномерно распределенному сжимающему напряжению,  $\xi = 2$  — чистому изгибу и  $0 < \xi < 2$  — одновременному изгибу и сжатию.

<sup>1)</sup> См. главу IX.

<sup>2)</sup> Необходимо отметить, что величины  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{кр}$  означают касательные напряжения, в то время как  $\tau$  представляет собой безразмерное отношение  $\tau = E_t/E$ .

Пластика под действием продольного сжатия выпучивается в продольном направлении по равным полуволнам с прямыми узловыми линиями, перпендикулярными к оси  $x$ . Таким образом, каждая выпучина представляет собой свободно опертую на четырех краях

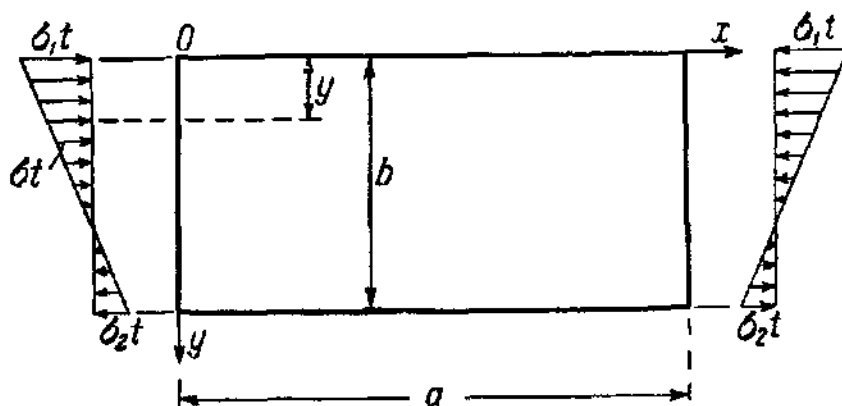


Рис. 203.

пластинку, которую можно исследовать независимо. Следовательно, прогиб  $w$  выразим при помощи следующего ряда:

$$w = \sin \frac{\pi x}{a} \sum_{i=1}^n f_i \sin \frac{i\pi y}{b}. \quad (741)$$

Энергию деформации  $V$  определим из уравнения (724):

$$V = \frac{\pi^4}{8} D a b \sum_{i=1}^n f_i^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{i^2}{b^2} \right)^2. \quad (742)$$

Изменение потенциальной энергии внешних сил будет

$$U_w = \frac{\sigma_1 t}{2} \int_0^a \int_0^b \left( 1 - \xi \frac{y}{b} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy. \quad (743)$$

Для вычисления этого интеграла определим

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\pi^2}{a^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \sum_{i=1, j=1}^n f_i f_j \sin \frac{i\pi y}{b} \sin \frac{j\pi y}{b},$$

где индексы  $i$  и  $j$  принимают все значения от 1 до  $n$ . Подставляя это выражение в уравнение (743) и интегрируя, получим:

$$U_w = \frac{\pi^2 \sigma_1 t}{8} \frac{b}{a} \sum_{i=1}^n f_i^2 - \frac{\sigma_1 t}{4} \xi \frac{\pi^2}{ab} \left[ \frac{b^2}{4} \sum_{i=1}^n f_i^2 - \frac{8b^2}{\pi^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{ij f_i f_j}{(i^2 - j^2)^2} \right], \quad (744)$$

где  $i$  принимает все значения от 1 до  $n$ , а  $j$  — только те значения, где  $i + j$  является нечетным числом. При интегрировании, произ-

веденном для получения уравнения (744), использовалась следующая формула:

$$\int_0^b y \sin \frac{l\pi y}{b} \sin \frac{j\pi y}{b} dy = \begin{cases} \frac{b^2}{4}, & \text{если } l=j, \\ 0, & \text{если } l+j \text{ — четное число,} \\ -\frac{4b^2}{\pi^2} \frac{lj}{(l^2-j^2)^2}, & \text{если } l+j \text{ — нечетное число,} \end{cases}$$

Из условия экстремума  $\frac{\partial (V+U_w)}{\partial f_i} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) получим систему  $n$  уравнений:

$$\left[ (1 + l^2 \alpha^2)^2 - \alpha^2 k \left( 1 - \frac{\xi}{2} \right) \right] f_i - \frac{8}{\pi^2} \xi \alpha^2 k \sum_j \frac{l j f_j}{(l^2 - j^2)^2} = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, n), \quad (745)$$

где  $\alpha = a/b$  и  $k = \sigma_1 b^2 t / \pi^2 D$ . Суммирование  $\sum_j$  распространяется только на те значения  $j$ , которые удовлетворяют условию, когда  $l+j$  является нечетным числом. Ненулевые решения для неизвестных  $f_i$  возможны, когда детерминант  $\Delta$ , составленный из коэффициентов уравнений (745), равен нулю. Это условие  $\Delta = 0$  можно использовать для определения значения коэффициента устойчивости  $k$ .

Тимошенко, который впервые вывел уравнение (745), использовал три уравнения, вычисляя значения  $k$  для случая чистого изгиба ( $\xi = 2$ ) и два уравнения для значений  $\xi < 2$ , получив достаточно точные значения  $k$ . В результате для критического значения  $\sigma_{1кр}$  сжимающего фибрового напряжения  $\sigma_1$ , имеем следующую формулу:







$$\sigma_{1кр} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 k. \quad (746)$$

В таблице 34 даны значения коэффициента устойчивости  $k$  для нескольких величин коэффициента  $\xi$  и отношения  $\alpha$ . Из таблицы видно, что в каждой строке имеется минимальное значение  $k$  при  $\alpha = 2/3$  и  $\xi = 2$  и при  $\alpha = 1$  и  $\xi = 0$ . Следовательно, в случае чистого изгиба очень длинная пластинка выпучивается по полуволнам длиной  $\lambda = \frac{2}{3}b$ . Длина волн возрастает с уменьшением  $\xi$  и стремится к предельному значению  $\lambda = b$  в случае постоянной сжимающей нагрузки. Минимальное значение  $\alpha$  применимо к длинным пластинкам и в практических расчетах может быть использовано для всех пластинок со значением отношения  $\alpha$  выше  $\lambda/b$ .

**Пластинки, защемленные вдоль продольных краев.** Эта задача рассмотрена Нельке<sup>1)</sup>, который получил решение при помощи метода

<sup>1)</sup> Нельке, цит. выше, стр. 427.

Таблица 34. Значения коэффициента устойчивости  $k$  в уравнении (746) для свободно опертых пластинок, подверженных неравномерно распределенным сжимающим силам

Эпюра распределений напряжений	$\alpha$							
	0,4	0,5	0,6	0,667	0,75	0,8	1,0	1,5
 $\sigma_2 = -\sigma_1$	29,1	25,6	24,1	23,9	24,1	24,4	25,6	24,1
 $\sigma_2 = -2\sigma_1/3$	23,6	...	17,7	...	15,7	16,4	16,9	15,7
 $\sigma_2 = -\sigma_1/3$	18,7	...	12,9	...	11,5	11,2	11,0	11,5
 $\sigma_2 = 0$	15,1	...	9,7	...	8,4	8,1	7,8	8,4
 $\sigma_2 = \sigma_1/3$	10,8	...	7,1	...	6,1	6,0	5,8	6,1
 $\sigma_2 = \sigma_1$	8,4	...	5,2	...	4,3	4,2	4,0	4,3

Ритца, используя следующий ряд <sup>1)</sup>:

$$w = \sin \frac{\pi x}{a} \sum_{i=1}^n f_i \left[ \left( \cos \frac{p_i y}{b} - \operatorname{ch} \frac{p_i y}{b} \right) (\sin p_i - \operatorname{sh} p_i) - \right. \\ \left. - \left( \sin \frac{p_i y}{b} - \operatorname{sh} \frac{p_i y}{b} \right) (\cos p_i - \operatorname{ch} p_i) \right], \quad (747)$$

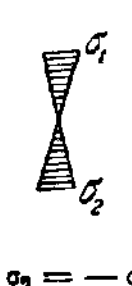

<sup>1)</sup> В работе используется двойной ряд, который сводится к выражению (747), если так же, как и в случае свободно опертых пластинок, рассматривается выпучивание по одной полуволне.

где коэффициенты  $p_i$  являются корнями трансцендентного уравнения

$$\cos p_i \operatorname{ch} p_i = 1. \quad (747a)$$

Выражения, заключенные в скобках в уравнении (747), образуют полную совокупность ортогональных функций, если коэффициенты  $p_i$  определены из уравнения (727). Эти выражения представляют собой нормальные формы колебаний стержня длиной  $b$ , защемленного на обоих концах, и удовлетворяют граничному условию  $\frac{d\psi}{dy} = 0$  при  $y = 0$  и  $y = b$ .

Таблица 35. Значение коэффициента устойчивости  $k$  в уравнении (746) для пластинок, защемленных вдоль продольных краев и подверженных неравномерно распределенным продольным сжимающим силам

Эпюра распределения напряжений	$\alpha$						
	0,4	0,47	0,5	0,6	0,65	0,7	0,8
 $\sigma_2 = -\sigma_1$	42,7	39,6	39,7	41,8		45,8	
 $\sigma_2 = 0$	17,7		14,8	13,7	13,6	13,7	14,3

В таблице 35 даны значения коэффициента устойчивости, вычисленные Нельке для двух условий нагружения. Нельке тщательно проверил сходимость значений  $k$ , которые можно считать хорошими приближениями. Первая строка таблицы 35 рассчитывалась из детерминанта пятого порядка; вторая строка — из детерминанта третьего порядка. Минимальные значения  $k$ , которые имеют место при  $\alpha = 0,47$  и  $0,65$ , дают значения длины полуволн бесконечно длинной пластинки соответственно  $\lambda = 0,47 b$  и  $\lambda = 0,65 b$ .

**Критические напряжения в неупругой области.** В главе IX было получено значение  $\eta = \sqrt{\tau}$  для коэффициента пластичности в случае пластинок под действием постоянной сжимающей силы.

Очевидно, что с увеличением неравномерности распределения напряжений влияние пластичности материала на критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  будет уменьшаться, и коэффициент пластичности  $\eta$  при неравномерном распределении  $\sigma$  будет больше, чем  $\sqrt{\tau}$ . До настоящего времени не существует метода для определения соотношения между  $\eta$  и распределением напряжений  $\sigma$ . В связи с отсутствием лучшего результата рекомендуется использовать соотношение  $\eta = \sqrt{\tau}$ , дающее заниженные значения критического напряжения. Значение  $\sigma_{кр}$  можно определить из следующего выражения:

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sqrt{\tau}} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^3 k, \quad (748)$$

и в результате получить соответствующее значение  $\sigma_{кр}$  из таблицы, как это объяснено в § 93.

### 107. Свободно опертые пластинки под одновременным действием касательных и равномерно распределенных продольных напряжений

Напряжения в стенках сплошных балок представляют собой комбинацию касательных напряжений  $\tau_{xy}$  и продольных напряжений  $\sigma$ . Очень важно исследовать влияние такой комбинации напряжений на устойчивость стенки. Приближенные решения задачи имеются для двух предельных случаев: 1) продольные напряжения  $\sigma$  равномерно распределены по поперечному сечению стенки; этот случай рассматривается в этом параграфе; 2) напряжения  $\sigma$  являются напряжениями чистого изгиба; этот случай рассмотрен в следующем параграфе. Аналитическое исследование по методу Ритца не отличается по существу от исследований, описанных в двух предыдущих параграфах. Выражение для потенциальной энергии внешних сил является суммой выражений (725) и (743). Решение можно получить, представляя прогиб  $w$  в виде двойного ряда Фурье [уравнение (726)]. Поскольку аналитическое исследование не является принципиально новым, в дальнейшем мы ограничимся изложением результатов.

Рассмотрим пластинку под действием касательных напряжений  $\tau_{xy}$  и равномерных сжимающих напряжений  $\sigma$ , как это показано на рис. 204.

Очевидно, что критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  пластинки при заданном отношении  $\alpha$  зависит от величины действующих в пластинке касательных напряжений  $\tau_{xy}$  и возрастает с уменьшением  $\tau_{xy}$ . С другой стороны, значение критического касательного напряжения  $\tau_{кр}$  будет больше в случае, когда сжимающее напряжение уменьшается.

Батдорф и Стейн<sup>1)</sup> получили критическую комбинацию напряжений для случая сдвига с одновременными продольными или по-

<sup>1)</sup> Батдорф, Стейн, цит. выше, стр. 427.

перечными сжимающими напряжениями из детерминанта десятого порядка. Они построили кривые взаимосвязи, на основе которых можно получить критическое значение одного напряжения, если известно значение другого напряжения<sup>1)</sup>. Взаимосвязь между  $\sigma_{кр}$

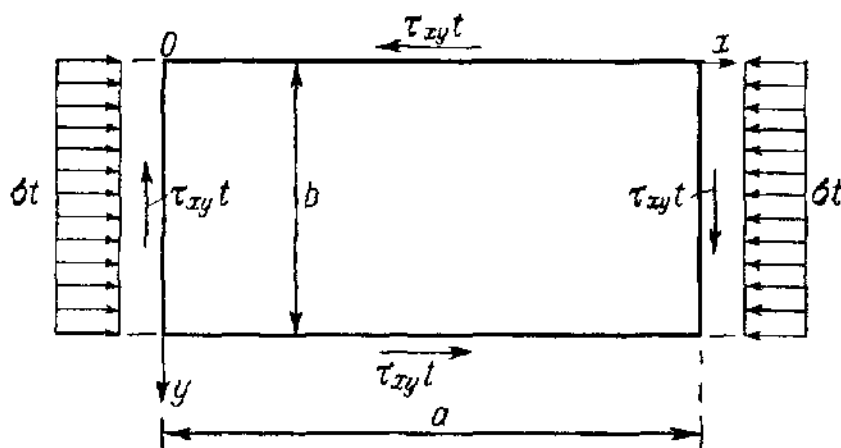


Рис. 204.

и  $\tau_{кр}$  можно выразить, соответствующим образом вводя отношения  $\sigma_{кр}/\sigma_{кр}^0$  и  $\tau_{кр}/\tau_{кр}^0$ , где  $\tau_{кр}^0$  обозначает критическое напряжение при чистом сдвиге, а  $\sigma_{кр}^0$  — критическое напряжение при чистом сжатии.

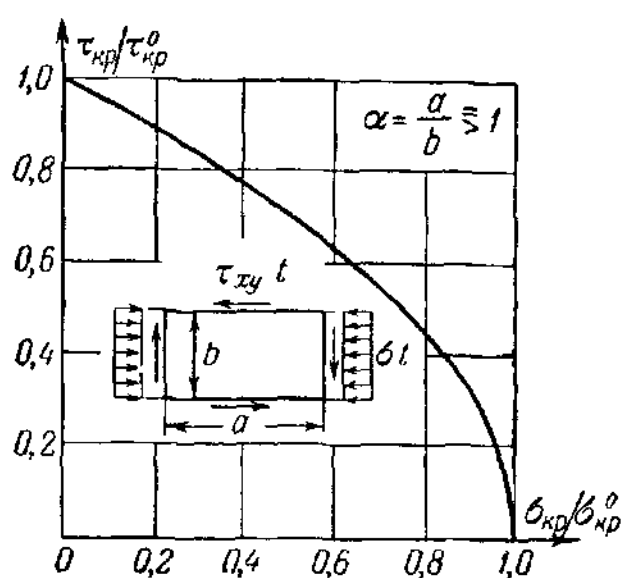


Рис. 205.

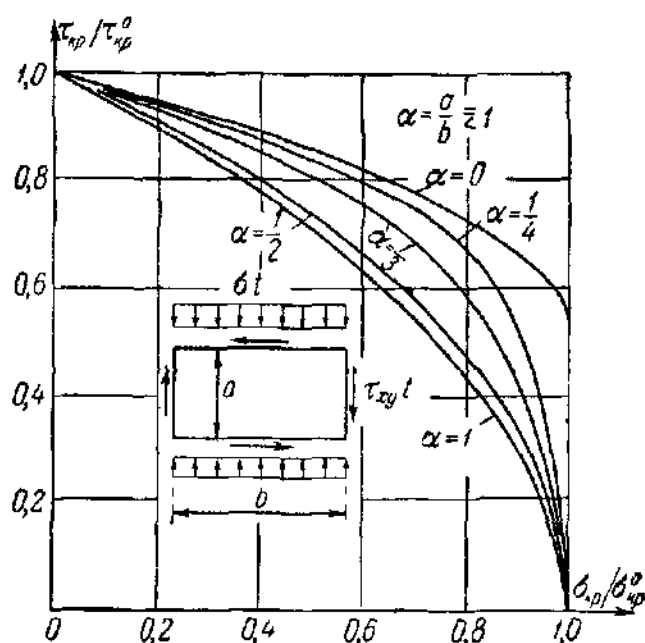


Рис. 206.

Нанеся значения отношения  $\tau_{кр}/\tau_{кр}^0$  в зависимости от  $\sigma_{кр}/\sigma_{кр}^0$  так, как это показано на рис. 205, получим кривую взаимосвязи. Батдорф

<sup>1)</sup> Такие кривые взаимодействия впервые построил Хвалла, Beitrag zur Stabilitätstheorie des Stegbleches vollwandiger Träger, Der Stahlbau, т. 5, стр. 161, 1936.

и Стейн установили, что при значениях отношения  $\alpha \geq 1$  кривую между точками  $\sigma_{кр}/\sigma_{кр}^0 = 0$  и 1 можно аппроксимировать параболой

$$\frac{\tau_{кр}}{\tau_{кр}^0} + \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{кр}^0} = 1. \quad (749)$$

На рис. 206 показаны кривые взаимодействия, построенные Батдорфом и Стейном для значений  $\alpha < 1$ . Эти кривые, за исключением кривой для  $\alpha = 1/2$ , существенно отклоняются от параболы при  $\alpha = 1$ . Кривая  $\alpha = 0$  для бесконечно длинной пластинки под действием поперечных сжимающих сил определена Стоуэллом и Шварцем<sup>1)</sup>.

**Расчетные формулы для длинных пластинок ( $\alpha \geq 1$ ).** На основе простого соотношения (749) можно установить расчетную формулу для устойчивости пластинки под одновременным действием сдвига и равномерного сжатия при  $\alpha \geq 1$ . Если напряжения  $\sigma$  и  $\tau_{xy}$  в рассматриваемой панели пластинки заданы и их отношение равно

$$\beta = \frac{\sigma}{\tau_{xy}} = \frac{\sigma_{кр}}{\tau_{кр}}, \quad (750)$$

то, подставляя  $\sigma_{кр} = \beta \tau_{кр}$  из уравнения (749), имеем:

$$\left( \frac{\tau_{кр}}{\tau_{кр}^0} \right)^2 + \beta \frac{\tau_{кр}}{\tau_{кр}^0} \frac{\tau_{кр}^0}{\sigma_{кр}^0} = 1. \quad (751)$$

Решая эти уравнения относительно  $\tau_{кр}$ , получим два корня, наименьший из которых равен

$$\tau_{кр} = \frac{\beta}{2} \sigma_{кр}^0 k^2 \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\beta^2 k^2}} \right), \quad (752)$$

где  $k = \tau_{кр}^0 / \sigma_{кр}^0$ . Значения  $\sigma_{кр}^0$  и  $\tau_{кр}^0$  таковы:

$$\sigma_{кр}^0 = \frac{4\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2;$$

$$\tau_{кр}^0 = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 \left( 5,3 + \frac{4}{\alpha^2} \right),$$

откуда

$$k = \frac{5,34 + \frac{4}{\alpha^2}}{4} = \frac{4}{3} + \frac{1}{\alpha^2}. \quad (753)$$

Коэффициент  $k$  зависит только от отношения сторон пластинки  $\alpha = a/b > 1$ . Подставляя значение  $\sigma_{кр}^0$  в уравнение (751), получим:

$$\tau_{кр} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 2\beta k^2 \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\beta^2 k^2}} \right); \quad (754a)$$

$$\sigma_{кр} = \beta \tau_{кр}. \quad (754b)$$

<sup>1)</sup> Стоуэлл, Шварц, цит. выше, стр. 427.



Эти уравнения применимы только в упругой области выпучивания.

**Критические напряжения  $\tau_{кр}$  и  $\sigma_{кр}$  в неупругой области.** В случае совместного действия сдвига и продольных напряжений предполагается, что коэффициент пластичности  $\eta = \sqrt{\tau}$  зависит от интенсивности напряжений<sup>1)</sup>

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{кр}^2 + 3\tau_{кр}^2}.$$

Используя значение отношения напряжений  $\beta = \sigma_{кр}/\tau_{кр}$ , получим следующие соотношения:

$$\sigma_i = \tau_{кр} \sqrt{\beta^2 + 3} \quad \text{и} \quad \sigma_i = \sigma_{кр} \sqrt{1 + \frac{3}{\beta^2}}. \quad (755)$$

Для того чтобы распространить применение уравнения (754а) в неупругой области, заменим значение  $E$  через  $E\sqrt{\tau}$  и, выражая  $\tau_{кр}$  через  $\sigma_i$ , получим:

$$\frac{\sigma_i}{\sqrt{\tau}} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 2k^2 \beta \sqrt{\beta^2 + 3} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\beta^2 k^2}}\right), \quad (756)$$

где  $k$  дано уравнением (753). После вычисления значения  $\sigma_i/\sqrt{\tau}$  значение  $\sigma_i$  можно получить из таблиц в § 93; критические напряжения будут

$$\tau_{кр} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{\beta^2 + 3}} \quad \text{и} \quad \sigma_{кр} = \frac{\beta \sigma_i}{\sqrt{\beta^2 + 3}}. \quad (757)$$

Уравнения (756) и (757) применимы в упругой и неупругой областях. При  $\sigma_i/\sqrt{\tau} \leq \sigma_{\pi}$  ( $\sigma_{\pi}$  — предел пропорциональности)  $\sqrt{\tau} = 1$ , и эти уравнения совпадают с уравнениями (754).

**Расчетные формулы для коротких пластинок  $\left(\frac{1}{2} < \alpha < 1\right)$ .** Уравнение (752) вполне применимо, если предположить, что уравнение (749) является хорошим приближением кривой взаимодействия для пластинок с отношением  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ . Для широких пластинок ( $\alpha < 1$ ) имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{кр}^0 &= \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2; \\ \tau_{кр}^0 &= \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left(4 + \frac{5,34}{\alpha^2}\right)^*. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$k = \frac{\tau_{кр}^0}{\sigma_{кр}^0} = \frac{4\alpha^2 + 5,34}{(\alpha^2 + 1)^2}. \quad (758)$$

<sup>1)</sup> См. сноску на стр. 436.

<sup>\*</sup>) Это уравнение вытекает из уравнений (733) и (735) в результате перемены величин  $a$  и  $b$ .

Выражая  $\sigma_{кр}^0$  в уравнении (752) через вышенаписанное соотношение, получим:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{кр} &= \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^3 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 k^2 \frac{\beta}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\beta^2 k^2}}\right); \\ \sigma_{кр} &= \beta \tau_{кр}. \end{aligned} \right\} \quad (759)$$

Эти уравнения применимы только в упругой области выпучивания.

**Критические напряжения в неупругой области.** Рассуждая так же, как и при выводе уравнения (756), получим:

$$\frac{\sigma_i}{\sqrt{\tau}} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^3 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 k^2 \frac{\beta}{2} \sqrt{\beta^2 + 3} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\beta^2 k^2}}\right), \quad (760)$$

где величина  $k$  определяется уравнением (758). После определения значения  $\sigma_i$  критические напряжения получим из следующих формул:

$$\tau_{кр} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{\beta^2 + 3}} \quad \text{и} \quad \sigma_{кр} = \frac{\beta \sigma_i}{\sqrt{\beta^2 + 3}}. \quad (761)$$

Уравнения (760) и (761) применимы в упругой и неупругой областях выпучивания.

### 108. Свободно опертые пластинки под совместным действием сдвига и напряжений чистого изгиба

Связь между отношениями  $\tau_{кр}/\tau_{кр}^0$  и  $\sigma_{кр}/\sigma_{кр}^0$  показана на рис. 207 в виде двух кривых взаимосвязи для  $\alpha = 1/2$  и  $\alpha = 1$ , полученных из решения Тимошенко для этой задачи<sup>1)</sup>. Эти кривые лежат близко друг к другу и без существенной ошибки их можно заменить пунктирной кривой на рис. 207, представляющей собой часть окружности, выраженной уравнением

$$\left(\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{кр}^0}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{кр}}{\tau_{кр}^0}\right)^2 = 1. \quad (762)$$

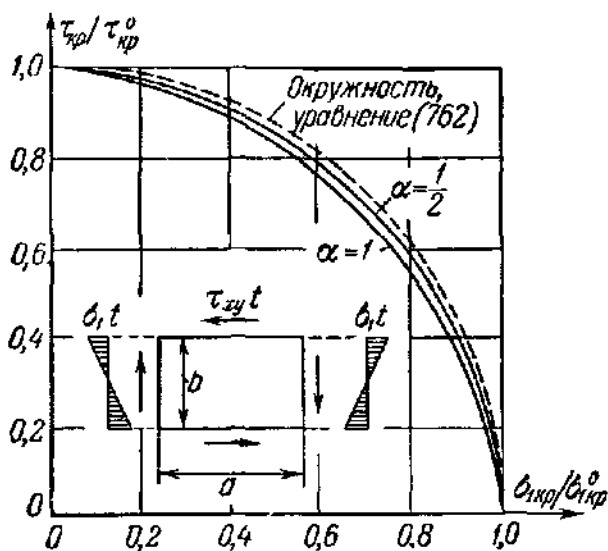


Рис. 207.

Это простое соотношение можно использовать для установления расчетной формулы так, как это сделано в предыдущих параграфах.

При использовании отношения  $\beta = \sigma_1/\tau_{xy} = \sigma_{1кр}/\tau_{кр}$  уравнение (762) принимает следующий вид:

$$\left(\frac{\tau_{кр}}{\tau_{кр}^0}\right)^2 \left[1 + \beta^2 \left(\frac{\tau_{кр}^0}{\sigma_{1кр}^0}\right)^2\right] - 1 = 0.$$

<sup>1)</sup> Timoshenko S., Stability of the Webs of Plate Girders, Engineering, т. 238, стр. 207, 1935.

Если обозначить  $\tau_{кр}^0/\sigma_{1кр}^0$  через  $k$ , то положительный корень этого уравнения будет

$$\tau_{кр} = k\sigma_{кр}^0 \sqrt{\frac{1}{1 + \beta^2 k^2}}. \quad (763)$$

Из таблицы 34 видно, что наименьшее значение  $k$  в случае чистого изгиба ( $\sigma = -\sigma_2$ ) составляет 23,9, поэтому предполагается, что  $\sigma_{1кр}^0$  для всех значений отношения  $\alpha \geq 1/2$  можно выразить с достаточной степенью точности формулой

$$\sigma_{1кр}^0 = \frac{24\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2. \quad (764)$$

Кроме того, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \alpha \leq 1 \quad \tau_{кр}^0 &= \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left(4 + \frac{5,34}{\alpha^2}\right); \\ \text{при } \alpha \geq 1 \quad \tau_{кр}^0 &= \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left(5,34 + \frac{4}{\alpha^2}\right), \end{aligned} \right\} \quad (765)$$

на основе которых получим следующие значения для  $k$ :

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \quad k &= \frac{4 + 5,34/\alpha^2}{24} = \frac{1}{6} + \frac{2}{9\alpha^2}; \\ \text{при } \alpha \geq 1 \quad k &= \frac{5,34 + \frac{4}{\alpha^2}}{24} = \frac{2}{9} + \frac{1}{6\alpha^2}. \end{aligned} \right\} \quad (766)$$

В результате, подставляя значение  $\sigma_{1кр}^0$  из уравнения (764) в уравнение (763), имеем:

$$\tau_{кр} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 24k \sqrt{\frac{1}{1 + \beta^2 k^2}}; \quad \sigma_{кр} = \beta \tau_{кр}. \quad (767)$$

**Критическое напряжение в неупругой области.** Рассуждая так же, как и в предыдущих случаях, получим следующее уравнение для напряжения  $\sigma_i$ :

$$\frac{\sigma_i}{\sqrt{\tau}} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 24k \sqrt{\beta^2 + 3} \sqrt{\frac{1}{1 + \beta^2 k^2}}. \quad (768)$$

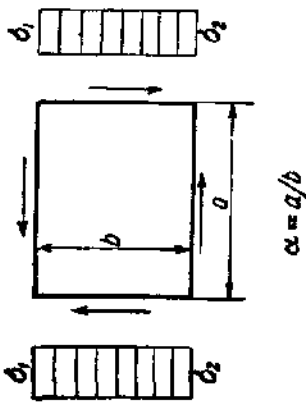
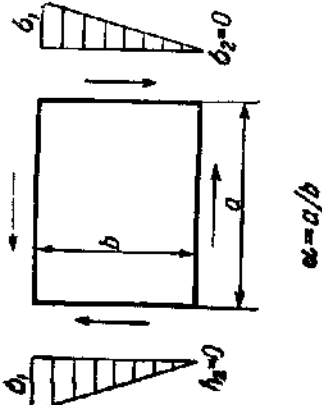
Определив  $\sigma_i$ , выведем значения критических напряжений  $\tau_{кр}$  и  $\sigma_{1кр}$  из следующих формул:

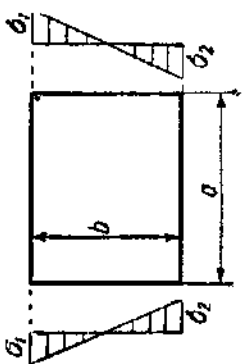
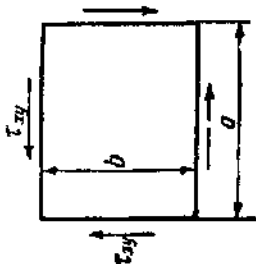
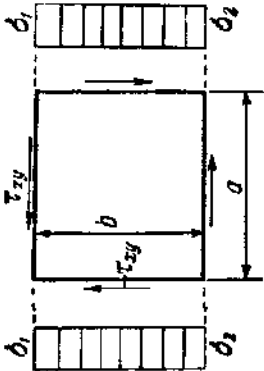
$$\tau_{кр} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{\beta^2 + 3}} \quad \text{и} \quad \sigma_{1кр} = \frac{\beta \sigma_i}{\sqrt{\beta^2 + 3}}. \quad (769)$$

## 109. Сводка расчетных формул для стенок сплошных балок

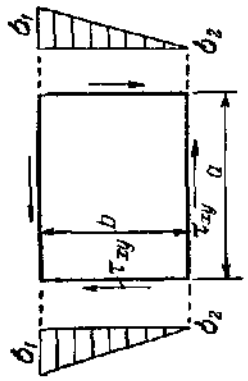
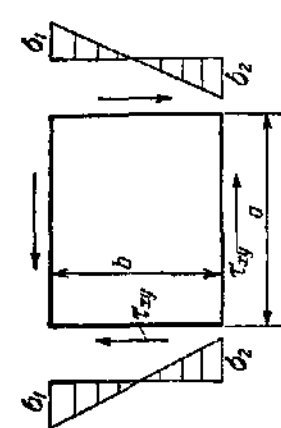
Результаты, полученные в §§ 105—108, подытожены в таблице 36 в удобном для практических расчетов виде. В целях упрощения предположим, что панели стенки свободно оперты на пояса и ребра жесткости, пренебрегая благоприятным влиянием заделки этих элементов.

Т а б л и ц а 36. Пластины под действием сдвига и (или) равномерно или линейно распределенного продольного сжатия

Условие нагружения	Коэффициент устойчивости в уравнениях (770) и (770а)	Критические напряжения $\sigma_{кр}$ и $\sigma_{1кр}$
<p>Равномерное сжатие <math>\sigma_2/\sigma_1 = 1</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>\alpha = a/b</math></p>	$a \geq 1: k = 4$ $a \leq 1: k = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2$	$\sigma_{1кр} = \sigma_1$
<p>Продольное сжатие <math>\sigma_2/\sigma_1 = 0</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>\alpha = a/b</math></p>	$a \geq 1: k = 7,7$ $a \leq 1: k = 7,7 + 33(1 - \alpha)^3$	$\sigma_{1кр} = \sigma_1$

<p>Продольное сжатие <math>\sigma_2/\sigma_1 = -1</math></p>  <p><math>x = a/b</math></p>	<p><math>\sigma_{1\text{кр}} = \sigma_i</math></p>	<p><math>a \geq 2/3: k = 24</math></p> <p><math>a &lt; 2/3: k = 24 + 74(2/3 - a)^2</math></p>	
<p>Чистый сдвиг</p>  <p><math>\alpha = a/b</math></p>	<p><math>\tau_{\text{кр}} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}</math></p>	<p><math>a \geq 1: k = \sqrt{3} \left( 5,34 + \frac{4}{a^2} \right)</math></p> <p><math>a \leq 1: k = \sqrt{3} \left( 4 + \frac{5,34}{a^2} \right)</math></p>	
<p>Сдвиг и продольное сжатие <math>\sigma_2/\sigma_1 = 1</math></p>  <p><math>\alpha = a/b, \quad \beta = \sigma_1/\tau_{xy}</math></p>	<p><math>\tau_{\text{кр}} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{\beta^2 + 3}}</math></p> <p><math>\sigma_{1\text{кр}} = \frac{\beta \sigma_i}{\sqrt{\beta^2 + 3}}</math></p>	<p><math>\alpha \geq 1</math></p> <p><math>k = 2k^2\beta\sqrt{\beta^2 + 3} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\beta^2 k^2}} \right],</math></p> <p>где <math>k = \frac{4}{3} + \frac{1}{a^2}</math></p> <p><math>1/2 \leq \alpha \leq 1:</math></p> <p><math>k = \frac{1}{2} k^2 \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 \beta \sqrt{\beta^2 + 3} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\beta^2 k^2}} \right],</math></p> <p>где <math>k = \frac{4\alpha^2 + 5,34}{(\alpha^2 + 1)^2}</math></p>	

Продолжение

Условие нагружения	Коэффициент устойчивости в уравнениях (770) и (770а)	Критические напряжения $\tau_{кр}$ и $\sigma_{кр}$
<p>Сдвиг и продольное сжатие <math>\sigma_2/\sigma_1 = 0</math></p>  <p><math>\alpha = a/b</math> , <math>\beta = \sigma_1/\tau_{xy}</math></p>	<p><math>\alpha \geq 1</math></p> $k = 3,85k^2\beta\sqrt{\beta^2 + 3} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\beta^2 k^2}} \right],$ <p>где <math>k = \frac{5,34 + 4/a^2}{7,7}</math></p> <p><math>1/2 \leq \alpha \leq 1</math>:</p> $k = 3,85k^2\beta\sqrt{\beta^2 + 3} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\beta^2 k^2}} \right],$ <p>где <math>k = \frac{4 + 5,34/a^2}{7,7 + 3\beta(1 - \alpha)^3}</math></p>	$\tau_{кр} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\beta^2 + 3}}$ $\sigma_{1кр} = \frac{\beta\sigma_1}{\sqrt{\beta^2 + 3}}$
<p>Сдвиг и продольное сжатие <math>\sigma_2/\sigma_1 = -1</math></p>  <p><math>\alpha = a/b</math> , <math>\beta = \sigma_1/\tau_{xy}</math></p>	<p><math>\alpha \geq 1</math>:</p> $k = 24k\sqrt{\beta^2 + 3} \sqrt{\frac{1}{1 + \beta^2 k^2}},$ <p>где <math>k = \frac{2}{9} + \frac{1}{6a^2}</math></p> <p><math>1/2 \leq \alpha \leq 1</math>:</p> $k = 24k\sqrt{\beta^2 + 3} \sqrt{\frac{1}{1 + \beta^2 k^2}},$ <p>где <math>k = \frac{1}{6} + \frac{2}{9a^2}</math></p>	$\tau_{кр} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\beta^2 + 3}}$ $\sigma_{1кр} = \frac{\beta\sigma_1}{\sqrt{\beta^2 + 3}}$

Эта таблица содержит формулы для расчета критических напряжений  $\sigma_{1кр}$  и  $\tau_{кр}$ . Для того чтобы применить эти формулы в практических расчетах, необходимо подобрать необходимый коэффициент безопасности, в связи с чем отсылаем читателя к § 113, где рассматривается этот вопрос.

Применяя таблицу 36, можно определить из нее значение коэффициента устойчивости пластинки  $k$  и вычислить отношение

$$\frac{\sigma_i}{\sqrt{\tau}} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k. \quad (770)$$

Для стали это уравнение можно написать в следующем виде:

$$\frac{\sigma_i}{\sqrt{\tau}} = 1,84 \cdot 10^6 \left(\frac{t}{b}\right)^2 k. \quad (770a)$$

В случае, если значение  $\sigma_i/\sqrt{\tau}$  лежит ниже предела пропорциональности, имеем  $\tau = 1$  и  $\sigma_{кр} = \sigma_i/\sqrt{\tau}$ , но если оно находится выше, то значение интенсивности напряжений для стали можно определить из таблиц 27 и 28 на стр. 380, где значения напряжения  $\sigma$  даны в зависимости от  $\sigma/\sqrt{\tau}$ . Определив значение интенсивности напряжений  $\sigma_i$ , получим критические напряжения  $\sigma_{1кр}$  и  $\tau_{кр}$  на основе простых формул, приведенных в последнем столбце таблицы 36.

Для определения значений критического напряжения при продольно распределенных напряжениях, когда отношения  $\sigma_1/\sigma_2$  не приведены в таблице, значения коэффициента  $k$  устойчивости можно рассчитать линейным интерполированием.

## 110. Поперечно подкрепленные стенки при сдвиге

Уравнение (733) § 105 показывает, что критическое напряжение пластинки, подверженной сдвигу, зависит от отношения  $b/t$ , т. е. от отношения наименьшего размера пластинки к ее толщине  $t$ . При делении свободно опертой пластинки длиной  $a$  при помощи достаточно жестких поперечных ребер, расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга, как это показано на рис. 208, образуются меньшие панели, которые можно рассматривать как свободно опертые. Таким образом, критическое значение отношения ширина:толщина можно значительно уменьшить и тем самым существенно увеличить критическое напряжение, так как оно обратно пропорционально квадрату этого отношения.

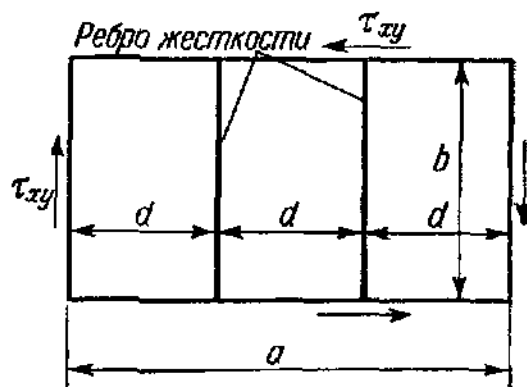


Рис. 208.

Тимошенко разработал приближенный метод расчета подкрепленных пластинок, подверженных сдвигу в упругой области. Этот метод имеет особенности, аналогичные тем, которые характеризуют теорию пластинок с продольными ребрами жесткости под действием сжатия, описанную в главе X. Таким образом, снова получаем предельное значение  $J_0$  момента инерции ребер жесткости, при котором образуются прямые узловые линии вдоль ребер жесткости. В случае, если  $J$  меньше  $J_0$ , ребра жесткости выпучиваются и изгибаются вместе с пластинкой. С увеличением изгибной жесткости устойчивость подкрепленной пластинки увеличивается до тех пор, пока не достигнут верхний предел, при котором  $J = J_0$ . Дальнейшее возрастание момента инерции  $J$  не увеличивает устойчивость подкрепленной пластинки. Каждую панель пластинки, подкрепленной ребрами жесткости с моментом инерции  $J_0$ , можно рассматривать как свободно опертую пластинку, подверженную сдвигу, и критическое напряжение  $\tau_{кр}$  достигает максимально возможного значения. При помощи отношения  $b/d$  значение этого напряжения в упругой области

для случая чистого сдвига можно определить из таблицы 36 при  $\alpha = d/b \leq 1$ :

$$\tau_{кр} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k, \quad (771)$$

где

$$k = 4 + \frac{5,34}{(d/b)^2}, \quad \text{если } \frac{d}{b} \leq 1. \quad (772)$$

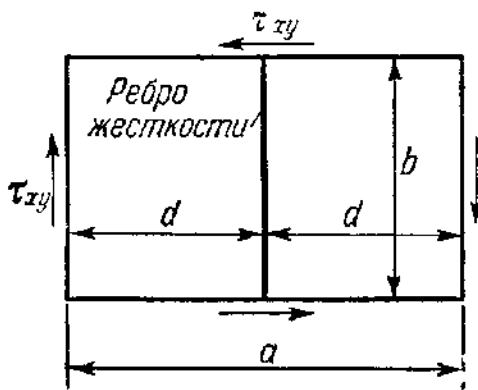


Рис. 209.

Пластины, имеющие одно или два ребра жесткости. Тимошенко<sup>1)</sup> приближенно решил задачу о поперечно подкрепленных пластинках, подверженных сдвигу, при помощи энергетического ме-

тода для случая пластинок с одним или двумя ребрами жесткости (рис. 209). Условие устойчивости получается так же, как и в § 105 для пластинок без ребер жесткости. Если предположить, что ребра не имеют крутильной жесткости, то выражение потенциальной энергии системы пластинка — ребро жесткости будет содержать добавочный член, обозначающий энергию изгиба  $V_s$  каждого ребра жесткости, а именно:

$$V_s = \frac{EJ}{2} \int_0^b \left(\frac{d^2 w}{dy^2}\right)^2 dy. \quad (773)$$

Вводя двойной ряд (726) в выражение  $V + V_s + V_w$  для потенциальной энергии, на основе теоремы о стационарном значении потенциальной энергии можно определить значение критического касательного напряжения  $\tau_{кр}$ .

<sup>1)</sup> Тимошенко С. П., цит. выше, стр. 425.



Введя безразмерный параметр

$$\gamma = \frac{EJ}{Dd} = \frac{12(1-\nu^2)J}{t^3d}, \quad (774)$$

Тимошенко определил значения  $\gamma_0$  параметра  $\gamma$ , соответствующие значениям критического касательного напряжения  $\tau_{кр}$ , данных уравнением (771). Эти значения рассчитаны из детерминантов четвертого порядка, и результаты приведены в таблицах 37 и 38.

Таблица 37. Данные для определения необходимой величины момента инерции  $J_0$  для пластинок с одним ребром жесткости, подверженных сдвигу (рис. 209)

$\frac{d}{b}$	0,5	0,625	0,75	1,00
$\gamma_0 = EJ_0/Dd$	30,0	12,6	5,8	1,66

Таблица 38. Данные для определения необходимой величины момента инерции  $J_0$  для пластинок с двумя ребрами жесткости, подверженных сдвигу (рис. 208)

$\frac{d}{b}$	0,4	0,5	0,667	0,833	1,00
$\gamma_0 = EJ_0/Dd$	67,8	32,1	10,6	4,11	1,92

Ван<sup>1)</sup> распространил теорию Тимошенко на пластинки, подкрепленные любым числом поперечных ребер, и дал кривые для пластинок с тремя и четырьмя ребрами жесткости, а также для бесконечно длинных пластинок.

Нижеизложенное исследование бесконечно длинных пластинок, проведенное не так давно Стейном и Фралихом, показывает, что числовые результаты, полученные Тимошенко и Ваном для подкрепленных пластинок, подверженных сдвигу, могут быть ошибочными, так как деформацию пластинки нельзя выразить при помощи конечного числа членов ряда (726).

Бесконечно длинные пластинки, подкрепленные равноотстоящими ребрами жесткости. Стейн и Фралих<sup>2)</sup> опубликовали недавно более точное решение для случая свободно опертых бесконечно длинных пластинок, подкрепленных равноотстоящими поперечными ребрами жесткости. Решение получено при помощи метода множителя Лагранжа<sup>3)</sup>, и для трех значений расстояний

1) Wang T. K., Buckling of Transverse Stiffened Plates under Shear, Jour. applied Mechanics, т. 14, стр. А-269, 1947.

2) Стейн, Фралих, цит. выше, стр. 427.

3) См. § 26 главы II.

ребер жесткости  $b/d = 1, 2$  и  $5$  (рис. 210) даны числовые результаты.

На рис. 211 и 212 приведены кривые для  $b/d = 1$  и  $2$ , где нанесены значения коэффициента устойчивости  $k$  в уравнении (771) в зависимости от отношения  $\gamma$ , определяемого уравнением (774).

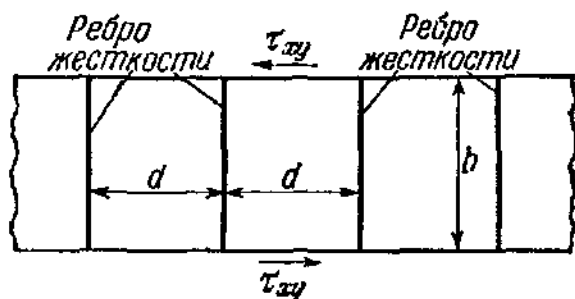


Рис. 210.

Кривые исходят из точки  $\gamma = 0$  со значением  $5,34$  для неподкрепленной бесконечно длинной пластинки, имеют точки разрыва производных  $A$ , вследствие изменения в форме выпучивания, и асимптотически стремятся к максимальным значениям  $k$  при  $\gamma = \infty$ . Теоретически не существует предельных значений  $\gamma_0$ , соответствующих конечным значениям  $J_0$ , как в описанной выше теории. Однако для практических целей точки  $A$  являются предельными значениями для  $J$ , так как увеличение  $J$  за пределы этих значений имеет лишь незначительное влияние на критическое напряжение  $\tau_{кр}$ . Часть кривых значений  $k$ , находящихся справа от точек  $A$ , является почти горизонтальными линиями.

На рис. 211 и 212 пунктирными линиями показаны значения  $k$ , полученные Ваном на основе приближенного метода Тимошенко.

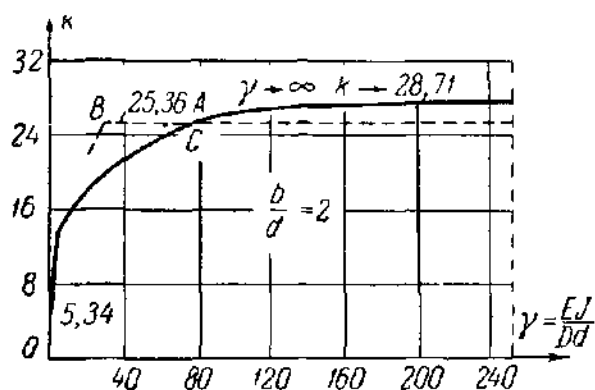


Рис. 211.

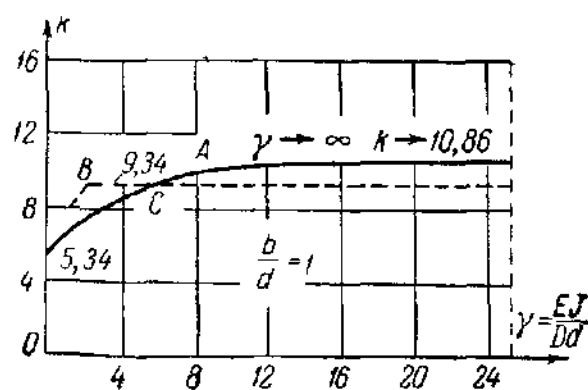


Рис. 212.

Выше определенного значения  $\gamma$  коэффициент устойчивости  $k$  становится постоянным. Для больших значений  $\gamma$  более точная теория дает несколько завышенные значения  $k$ , что не имеет большого значения, однако в окрестности точек  $B$  расхождение между двумя кривыми становится значительным. Для того чтобы пластинка выпучивалась как свободно опертая пластинка, по теории Вана, необходимо значение  $\gamma_0 = 2$  при отношении  $b/d = 1$ , тогда как более точная теория дает значительно большее значение, а именно  $\gamma_0 = 6$  (см. точку  $C$  на рис. 211). Точная теория требует наличия значительно более тяжелых ребер жесткости. Аналогичные условия существуют для отношения  $b/d = 2$  (рис. 212). Несмотря на то, что

не имеется точных результатов для пластинок с двумя или тремя ребрами жесткости, можно предполагать существование подобных расхождений, в связи с чем значения, данные в таблицах 37 и 38, не являются надежными, и их применение может привести к неправильным расчетам.

Сопоставление теоретических результатов, полученных Стейном и Фралихом, с данными лабораторных опытов, поставленных на 20 образцах различных размеров, показывает, как утверждают эти исследователи, хорошее соответствие теории с экспериментами. Однако опыты не охватывают всю область значений  $\gamma$ , и для окончательной проверки необходимы дополнительные опыты.

Решение рассмотренной выше задачи устойчивости для бесконечно длинной подкрепленной пластинки применимо к расчету концевой части стенки сплошной балки, где продольные напряжения настолько малы, что ими можно пренебречь. Три кривые, полученные Стейном и Фралихом, дают возможность интерполировать приближенное выражение для коэффициента устойчивости  $k$  в виде функции от отношения жесткостей  $\gamma$  и отношения  $\beta = b/d$  панели. Эта приближенная формула имеет следующий вид:

$$k = 5,34 + (5,5\beta^2 - 0,6) \sqrt[3]{\frac{\gamma}{4(7\beta^2 - 5)}} \quad (775)$$

и применима при  $1 \leq \beta \leq 5$  и  $0 \leq \gamma/(7\beta^2 - 5) \leq 4$ .

Уравнение (775) неприменимо, если  $\gamma > 4(7\beta^2 - 5)$ . В этом случае коэффициент практически не зависит от  $\gamma$  и может быть рассчитан из соотношения

$$k = 4,74 + 5,5\beta^2. \quad (776)$$

Это уравнение определяет наибольший коэффициент устойчивости и, следовательно, наибольшее касательное напряжение, которое можно получить для отношения  $\beta = b/d$ . Для того чтобы определить эти значения  $k$ , отношение  $\gamma$  должно быть больше, чем предельное отношение

$$\gamma_0 = 4(7\beta^2 - 5). \quad (777)$$

Из уравнения (775) можно получить значение  $k$  для случая, когда значение момента инерции  $J$  ребра жесткости задано и требуется найти критическое напряжение  $\tau_{кр}$  пластинки. Если, наоборот, требуется определить значения момента инерции  $J$  ребра жесткости так, чтобы получить желаемое значение критического напряжения  $\tau_{кр}$ , уравнение (775) можно решить относительно  $\gamma$ :

$$\gamma = (k - 5,34)^3 \frac{4(7\beta^2 - 5)}{(5,5\beta^2 - 0,6)^3}, \quad (778)$$

где значение  $k$  должно быть рассчитано для заданного  $\tau_{кр}$  при помощи уравнения (771). Формула (778) применима для  $k > 5,34$ ;

в случае, если  $k < 5,34$ , не требуется наличия ребра жесткости. С другой стороны, расстояние  $d$  между ребрами жесткости необходимо уменьшить в случае, когда значение  $\gamma$ , выведенное из уравнения (778), становится больше, чем предельное значение  $\gamma_0$ , данное уравнением (777).

**Расчетные формулы для неупругой области.** Для того чтобы применить полученные результаты в неупругой области, необходимо иметь в виду, что в подкрепленных пластинках, подверженных сдвигу, ребра жесткости остаются полностью упругими даже тогда, когда напряжения в пластинке лежат выше предела упругости.

Критическое напряжение  $\tau_{кр}$  для прямоугольной панели, подверженной сдвигу в неупругой области, определялось в § 105 [уравнения (738) и (739)]:

$$\tau_{кр} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}; \quad (779)$$

$$\frac{\sigma_i}{\sqrt{\tau}} = \frac{\pi^2 E \sqrt{3}}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k. \quad (780)$$

Значение коэффициента устойчивости  $k$  дано соотношением (772). Уравнения (779) и (780) нужно применять во всех случаях, когда используется уравнение (771) для упругой области. Член  $\sqrt{\tau}$  в уравнении (780) есть коэффициент пластичности, рассмотренный подробно в § 105.

Уравнения от (775) до (778) включительно вполне применимы в неупругой области при условии, если коэффициент устойчивости  $k$  определяется из уравнений (779) и (780). Однако в выражение для отношения жесткостей  $\gamma$ , определенное в упругой области уравнением (774), необходимо внести некоторые поправки для учета меньшего значения эффективного модуля упругости в пластинке. Получим:

$$\gamma = \frac{EJ}{Dd\sqrt{\tau}} = \frac{12(1-\nu^2)J}{t^3 d \sqrt{\tau}}. \quad (781)$$

Можно следующим образом определить необходимое значение момента инерции  $J$ , которое требуется для того, чтобы пластинка выдержала заданное критическое напряжение. Вычислим эквивалентное напряжение  $\sigma_i$  из уравнения (779), и если  $\sigma_i$  лежит выше предела пропорциональности, то значение  $\sigma_i/\sqrt{\tau}$  можно получить из таблиц 27 и 28 на стр. 380 и тем самым найти требуемое в дальнейшем значение  $\sqrt{\tau}$ . Теперь коэффициент устойчивости  $k$  и отношение жесткостей  $\gamma$  можно определить соответственно из уравнений (780) и (778). Значение  $\gamma$  должно быть меньше значения  $\gamma_0$ , данного уравнением (777); в случае, если  $\gamma > \gamma_0$ , рас-

стояние  $d$  между ребрами жесткости является слишком большим и должно быть уменьшено. В результате значение  $J$  можно рассчитать из уравнения (781), используя ранее выведенное значение коэффициента пластичности  $\sqrt{\tau}$ .

### 111. Продольно подкрепленные стенки под действием продольного сжатия

Для высоких сплошных балок часто бывает экономичным подкреплять стенку продольными ребрами жесткости в местах, где имеются значительные продольные напряжения. Рассмотрим два положения ребра жесткости:

1) Ребро жесткости расположено вдоль продольной осевой линии, т. е. по нейтральной оси (рис. 213). В этом случае в самом ребре жесткости не возникает сжимающего напряжения.

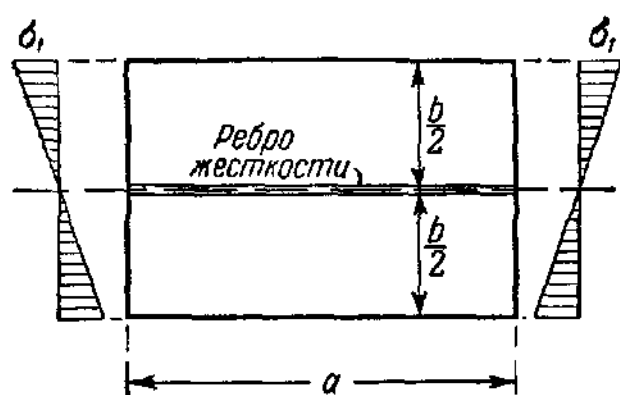


Рис. 213.

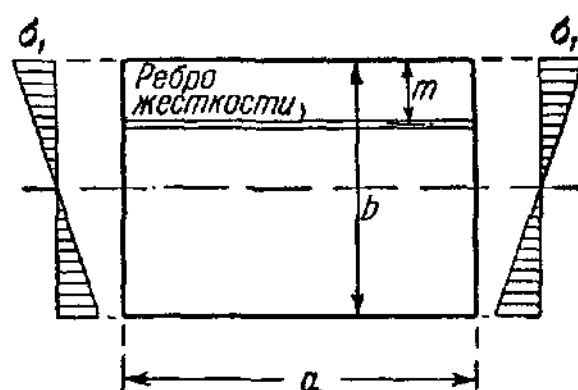


Рис. 214.

2) Ребро жесткости расположено в сжатой области на расстоянии  $m$  от края пластинки (рис. 214).

Ребро жесткости, расположенное вдоль нейтральной оси. Хампль<sup>1)</sup> определил критическое напряжение подкрепленной панели пластинки  $\sigma_{1\text{кр}}$  при помощи метода Ритца. Влияние ребра жесткости, расположенного вдоль осевой линии, для малых значений отношения  $\alpha = a/b$  весьма незначительно, однако оно становится заметным, когда  $\alpha > 2/3$ . Согласно уравнению (746) критическое напряжение  $\sigma_{1\text{кр}}$  неподкрепленной панели пластинки с одинаковым распределением напряжений равно

$$\sigma_{1\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k,$$

где значения  $k$  можно получить из первой строки таблицы 34. Критические напряжения для подкрепленной пластинки можно выразить в следующем виде:

$$\sigma_{1\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k k, \quad (782)$$

<sup>1)</sup> H a m p l M., Beitrag zur Stabilität des horizontal ausgesteiften Stegbleches, Der Stahlbau, т. 10, стр. 16, 1937.

где коэффициент  $k$  является функцией от отношения жесткостей

$$\gamma = \frac{EJ}{Db} = \frac{12(1-\nu^2)J}{bt^3}. \quad (783)$$

Для пластинок с отношением  $\alpha \geq 2/3$  коэффициент  $k$  практически не зависит от величины  $\alpha$ ; его значения даны в таблице 39.

Таблица 39. Значения коэффициента  $k$  в уравнении (782), пригодные при  $\alpha \geq 2/3$

$\gamma$	0	1	5	10	$\infty$
$k$	1,0	1,25	1,46	1,49	1,52

Максимальное значение критического напряжения достигается при  $\gamma = \infty$ , т. е. тогда, когда ребро является абсолютно жестким. Однако коэффициент  $k$  быстро стремится к предельному значению 1,52, и ребро, изгибная жесткость которого соответствует значению  $\gamma = 10$ , практически дает тот же эффект, что и жесткий продольный элемент. Таким образом, используемое в практике наибольшее значение  $J_0$  момента инерции ребра жесткости равно

$$J_0 = \frac{10}{12(1-\nu^2)} t^3 b = 0,92 t^3 b. \quad (784)$$

Для определения значения критического напряжения  $\sigma_{1кр}$ , получаемого при применении ребра жесткости с моментом инерции, рассчитанным согласно уравнению (784), с помощью таблицы 39 при  $\gamma = 10$  находим  $k = 1,49$ . Далее, из таблицы 34 видим, что для  $\alpha \leq 2/3$  коэффициент устойчивости  $k$  почти постоянен и, используя наименьшее значение  $k = 23,9$ , получаем  $kk = 1,49 \cdot 23,9 = 35,6$ . Уравнение (782) примет вид

$$\sigma_{1кр} = 35,6 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2, \quad (785)$$

что применимо для  $\alpha \geq 2/3$ .

**Формулы для неупругой области.** Уравнения (784) и (785) применимы только в упругой области, однако для использования их в неупругой области эти уравнения можно видоизменить следующим образом: значение критического напряжения в неупругой области может быть приблизительно выражено следующим образом:

$$\frac{\sigma_{1кр}}{\sqrt{t}} = 35,6 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 \quad (786)$$

при условии, если момент инерции  $J_0$  ребра жесткости вычисляется по формуле

$$J_0 = 0,92 t^3 b \sqrt{\tau}. \quad (787)$$

Член  $\sqrt{\tau}$  в этом уравнении обусловлен тем, что ребро жесткости остается упругим и, следовательно, отношение жесткостей в неупругой области будет

$$\gamma = \frac{EJ}{Db\sqrt{\tau}} = \frac{12(1-\nu^2)J}{bt^3\sqrt{\tau}}. \quad (788)$$

Уравнения (786) — (788) являются приближенными, однако они дают надежные результаты. Они основаны на предположении, согласно которому величина коэффициента пластичности  $\sqrt{\tau}$  одинакова для всей стенки и зависит от наибольшего напряжения  $\sigma_{1\text{кр}}$ .

**Ребра жесткости, расположенные между сжатым краем и нейтральной осью.** Увеличение критической нагрузки, получаемое при использовании ребра жесткости, расположенного вдоль нейтральной оси стенки, составляет только 50% от критической нагрузки неподкрепленной пластинки в упругой области и даже меньше в неупругой области. Следовательно, ребра жесткости расположенные вдоль нейтральной оси, не очень эффективны для повышения устойчивости стенок в случае чистого изгиба.

Большую эффективность можно получить в случае, когда ребро жесткости расположено между поясом и осевой линией (см. рис. 214). Хвалла<sup>1)</sup> исследовал эту задачу и дал числовые результаты для пластинки с отношением  $\alpha = 0,8$ , подкрепленной ребром жесткости, расположенным на четвертой части высоты стенки ( $m = b/4$ ). Массонне<sup>2)</sup> подробнее рассмотрел эту задачу и обобщил приведенные в § 106 результаты Тимошенко для расчета неподкрепленной пластинки, включив в выражение для потенциальной энергии системы энергию изгиба  $V_s$  ребра жесткости. При обозначениях

$$\gamma = \frac{EJ}{Db}, \quad \delta = \frac{A}{bt}, \quad \xi = 2 \quad (\text{чистый изгиб}) \quad (789)$$

система уравнений (745) принимает следующий обобщенный вид:

$$(1 + l^2\alpha^2)^2 f_i + (2\gamma - k\alpha^2\delta) \sin \frac{i\pi}{4} \sum_{p=1}^n f_p \sin \frac{p\pi}{4} - \\ - \frac{16k\alpha^2}{\pi^2} \sum_{j=1}^n f_j \frac{ij}{(i^2 - j^2)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (790)$$

Ограничивая значения  $i$  числами 1, 2, 3, 4, Массонне получил четыре уравнения, сводящиеся к одному уравнению четвертого порядка относительно  $k$ . Наименьший корень  $k$  определяет критическое

<sup>1)</sup> Chwalla E., Beitrag zur Stabilitätstheorie des Stegbleches vollwandiger Träger, Des Stahlbau, т. 9, стр. 161, 1936.

<sup>2)</sup> Massonnet C., La stabilité de l'âme de poutres munies de raidisseurs horizontaux et sollicitées par flexion pure, Pubs. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., т. 6, стр. 233, 1940—1941.

напряжение  $\sigma_{1кр}$ . Массонне построил кривые значений коэффициента устойчивости  $k$  в зависимости от величины  $\alpha$  для различных значений  $\gamma$  и  $\delta$ . Они показаны в виде кривых  $A$  на рис. 215 для  $\gamma = 2, 5, 10$  и  $20$  и  $\delta = 0, 1$ .

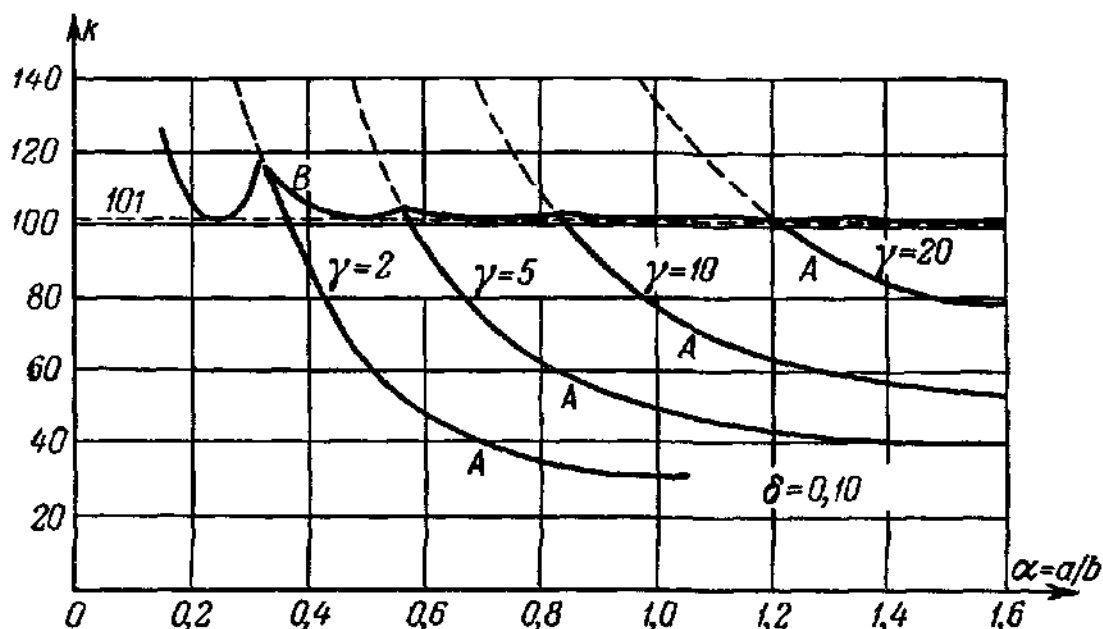


Рис. 215.

Для каждой заданной пластинки существует предельное значение  $\gamma = \gamma_0$ , определяющее изгибную жесткость  $EJ_0$  ребер жесткости, при котором узловые линии выпученной пластинки появляются вдоль ребер жесткости (рис. 216). Это значение  $\gamma_0$  соответствует наибольшему возможному значению критического напряжения  $\sigma_{1кр}$ , которое может выдержать подкрепленная пластинка. Для определения коэффициента устойчивости  $k$  при этом наибольшем значении  $\sigma_{1кр}$  можно снова использовать метод расчета неподкрепленной пластинки, описанный в § 106. Однако, кроме условий экстремума  $\partial(V + U_w)/\partial f_i = 0$ , приводящих к системе уравнений (745), необходимо рассмотреть еще следующее граничное условие:

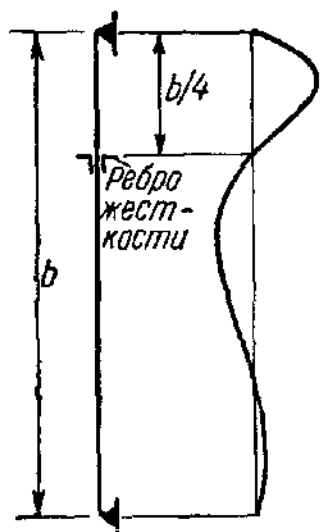


Рис. 216.

$$[\omega]_{y=\frac{b}{4}} = \sum_{p=1}^n f_p \sin \frac{p\pi}{4} = 0. \quad (791)$$

Это уравнение выражает условие равенства нулю прогиба  $w$  вдоль ребра. Таким образом, получается другая система уравнений, отличная от системы (790), на базе которой определяются значения  $k$  в функции от  $\alpha$  (кривая  $B$  на рис. 215). Из этого рисунка ясно, что при значениях  $\alpha > 0,4$  коэффициент устойчивости  $k$  быстро стремится



к значению  $k = 101$ . Наибольшие значения  $\sigma_{1\text{кр}}$  критического напряжения можно приблизительно выразить следующей формулой:

$$\sigma_{1\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 101 \quad (\alpha \geq 0,4). \quad (792)$$

Точка пересечения горизонтальной линии  $k = 101$  и кривой  $A$  на рис. 215, соответствующей данным свойствам  $\gamma$  и  $\delta$  ребра жесткости, определяет то значение отношения  $\alpha$ , которое должна иметь пластинка, критическое напряжение  $\sigma_{1\text{кр}}$  которой определяется уравнением (792). Для расчетных целей Массонне выразил соотношение между величинами  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $\gamma_0$  в виде кривых (рис. 217),

дающих значения  $\gamma_0$  в зависимости от  $\alpha$  при  $\delta = 0,50$ ;  $0,10$  и  $0,20$ .

На основе этих кривых автор книги вывел следующее приближенное выражение:

$$\gamma_0 = (12,6 + 50\delta)\alpha^2 - 3,4\alpha^2 \quad (\alpha \leq 1,6). \quad (793)$$

Если ребро жесткости характеризуется величиной  $\gamma \geq \gamma_0$ , то получается значение критического напряжения  $\sigma_{1\text{кр}}$ , соответствующее уравнению (792).

Сопоставление полученных выше результатов для случая, когда ребро жесткости расположено вдоль нейтральной оси, с результатами, полученными только что для пластинки, подкре-

пленной в сжатой части, показывает, что в последнем случае подкрепление является значительно более эффективным.

Задача о выпучивании стенки вследствие чистого изгиба рассмотрена также Дюба<sup>1)</sup>, который построил диаграммы при помощи

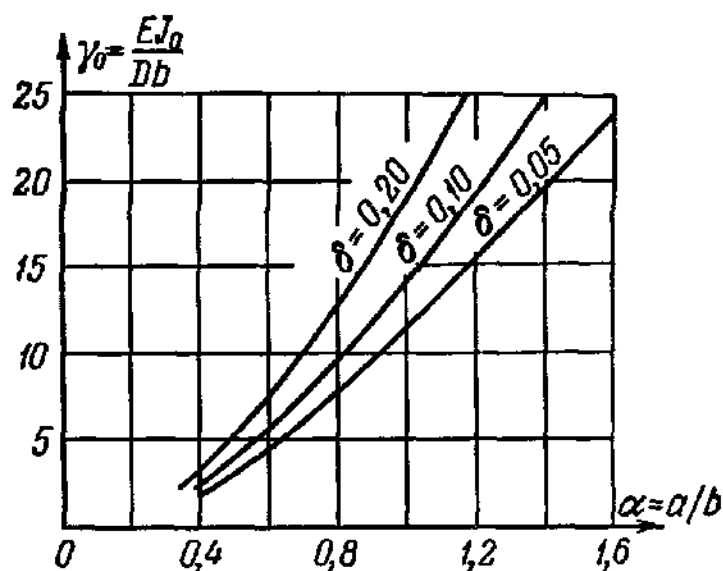


Рис. 217.

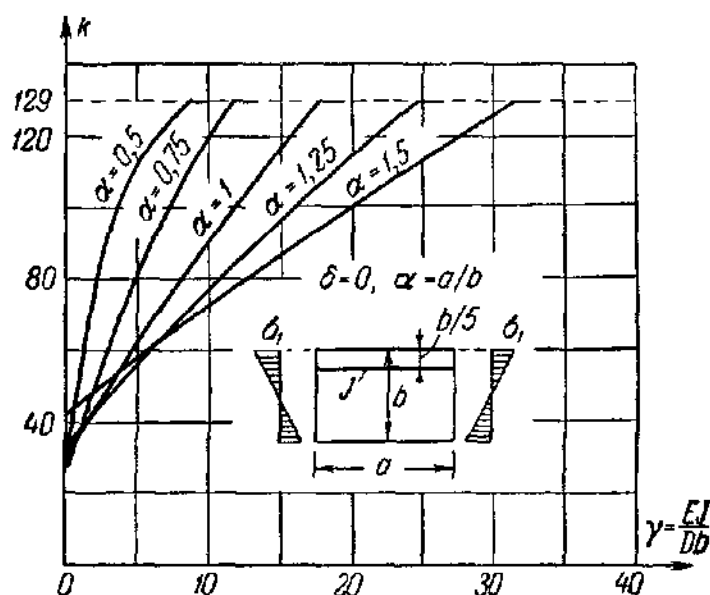


Рис. 218.

<sup>1)</sup> Dubas C., Contribution à l'étude du voilement des tôles raidies, Prelim. Rept. 3d Congr. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., Liège, 1948, стр. 129.

метода последовательных приближений. Числовые результаты получены для пластинок, подкрепленных продольным ребром жесткости, расположенным на расстоянии  $m = b/5$  от сжатого края пластинки.

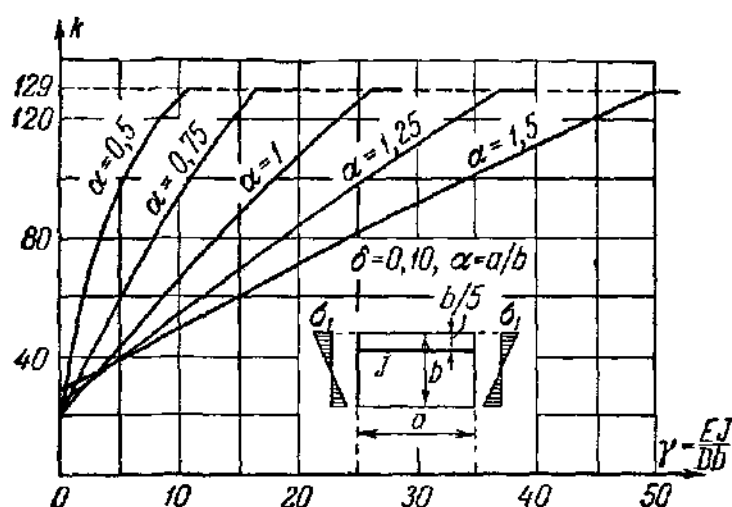


Рис. 219.

На рис. 218 и 219 приведены значения коэффициента устойчивости  $k$  в зависимости от отношения жесткостей  $\gamma$  для различных значений отношения  $\alpha = a/b$ . Наибольшее значение критического напряжения  $\sigma_{1\text{кр}}$  системы пластинка — ребро жесткости соответствует значению  $k = 129$ , что несколько больше, чем в случае расположения ребра жесткости на расстоянии  $b/4$  от сжатого края. Числовые ре-

зультаты получены только для  $\delta = 0$  и  $0,10$  и, к сожалению, недостаточны для установления формулы, аналогичной уравнению (793).

**Формулы для неупругой области.** Уравнение (792) применимо только в упругой области, однако его можно легко видоизменить для неупругой области. Критическое напряжение для случая, когда ребро жесткости находится на расстоянии  $m = \frac{b}{4}$  от сжатого пояса, равно

$$\frac{\sigma_{1\text{кр}}}{\sqrt{\tau}} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 101 \quad (794)$$

при условии, если отношение жесткостей  $\gamma$  равно или больше значения  $\gamma_0$ , данного уравнением (793). Однако соотношения (789), определяющие значения  $\gamma$  и  $\delta$ , должны быть видоизменены для неупругой области и в результате становятся такими:

$$\gamma = \frac{EJ}{Db\sqrt{\tau}} = \frac{12(1-\nu^2)J}{bt^3\sqrt{\tau}} \quad \text{и} \quad \delta = \frac{A}{bt\sqrt{\tau}}. \quad (795)$$

Необходимое значение момента инерции  $J$  можно определить следующим образом: вычислим  $\sigma_{1\text{кр}}/\sqrt{\tau}$  из уравнения (794), а из таблиц 27 и 28 найдем значение  $\sigma_{1\text{кр}}$ . Таким образом, получим значение  $\sqrt{\tau}$ , необходимое для определения  $\delta$  из второго уравнения (795). Теперь из уравнения (793) можно вычислить значение  $\gamma_0$  и в результате на основе первого уравнения (795) получить требуемое значение момента инерции

$$J_0 = \frac{bt^3\sqrt{\tau}}{12(1-\nu^2)} \gamma_0. \quad (796)$$

## 112. Подкрепленные пластинки при комбинированном действии сдвига и продольного сжатия

Милосавлевич <sup>1)</sup> недавно исследовал сложную задачу о пластинках, находящихся под комбинированным действием сдвига и продольного сжатия, подкрепленных поперечными и продольными ребрами жесткости, задачу, которая является очень важной для расчета высоких стенок мостовых балок. Он дал решение задачи о выпучивании прямоугольной пластинки, подкрепленной двумя поперечными и одним продольным ребром жесткости так, как это показано на

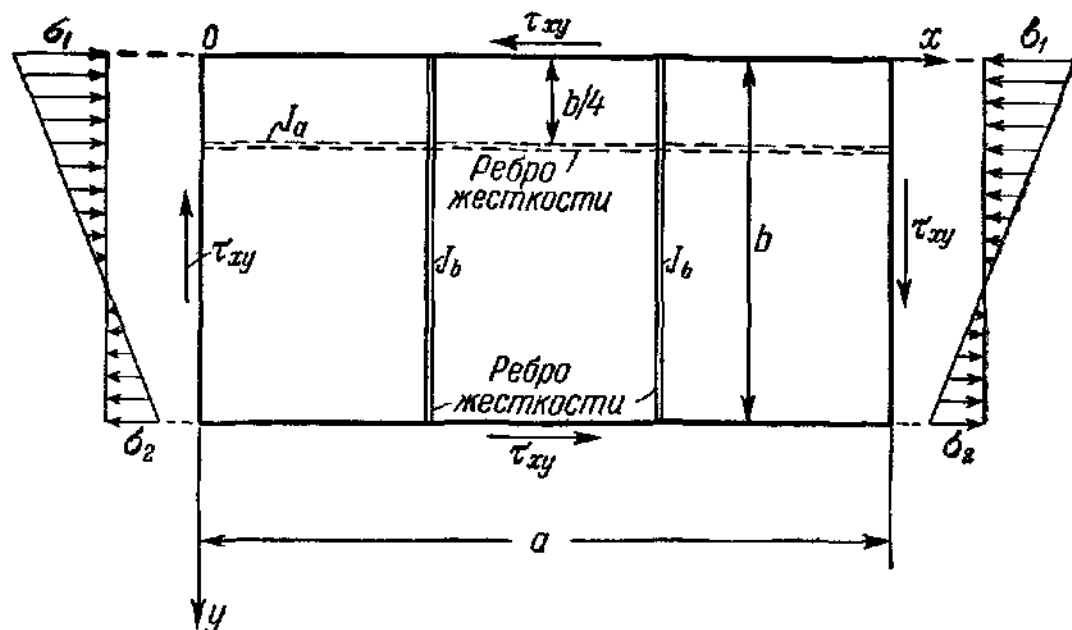


Рис. 220.

рис. 220, и нагруженной линейно распределенными продольными напряжениями, а также равномерными и касательными напряжениями, действующими вдоль краев. Исследование основывается на дифференциальном уравнении пластинки под действием продольных напряжений  $\sigma = \sigma_1(1 - \xi y/b)$  [см. уравнение (740)], касательных напряжений  $\tau_{xy}$  и поперечных сил  $q$ . Силы  $q$  представляют собой реакции ребер жесткости, поддерживающих пластинку; эти силы действуют вдоль осевых линий ребер жесткости. Дифференциальное уравнение имеет следующий вид:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -q - \sigma_1 t \left( 1 - \xi \frac{y}{b} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\tau_{xy} t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (797)$$

Решение получено при помощи метода рядов. В своей работе Милосавлевич дает численное решение для пластинок с двумя

<sup>1)</sup> Milosavljevitich M., Sur la stabilité des plaques rectangulaires renforcées par des raidisseurs et sollicitées au flexion et au cisaillement. Pubs. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., т. 8, стр. 141, 1947.

поперечными ребрами жесткости, расположенными на трети длины пластинки, и одним продольным ребром на расстоянии  $b/4$  от сжатого края. В работе приведены таблицы для практических расчетов пластинок при чистом изгибе и при комбинированном действии сдвига и чистого изгиба.

### 113. Предельная прочность пластинок, подверженных сдвигу

Предельная прочность сжатых пластинок рассматривалась в § 103 и детально исследуется в главе XII. Очевидно, что пластинки, подверженные сдвигу, или при совместном действии сдвига и сжатия ведут себя так же, когда напряжения превосходят критическую нагрузку. Теоретические исследования и эксперименты на составных балках показывают, что существует определенное различие между нагрузкой, при которой начинается выпучивание, и предельной, действительной разрушающей нагрузкой. После появления первых выпучин происходит такое перераспределение напряжений, при котором, по мере увеличения нагрузки за критическую, часть нагрузки остается уравновешенной касательными напряжениями, тогда как другая ее часть воспринимается диагоналями и поперечными ребрами жесткости за счет сжатия. Таким образом, имеет место некоторое диагональное поле напряжений, связанное с существенным увеличением действительной несущей способности стенки до тех пор, пока в наиболее напряженном волокне напряжение не достигнет предела текучести.

Различие между критической нагрузкой и предельной нагрузкой увеличивается с уменьшением критического напряжения  $\tau_{кр}$ , т. е. тогда, когда фактическое отношение ширины к толщине стенки возрастает. Для малых отношений ширины пластинки к толщине, соответствующих критическим напряжениям выше предела пропорциональности, различие между критической и предельной нагрузками уменьшается и стремится к нулю, когда  $\tau_{кр}$  приближается к пределу текучести.

Вагнер<sup>1)</sup> впервые рассмотрел задачу о предельной прочности тонких пластинок, подверженных сдвигу, и теоретически исследовал несущую способность стенок, пренебрегая их изгибной жесткостью. Результаты его исследований известны как теория поля диагональных напряжений. Кромм и Маргерр<sup>2)</sup> дали общее решение, учитывающее мембранные и изгибные напряжения. Дальнейшее исследование задачи приведено Леви, Финуп и Вули<sup>3)</sup>, которые рассмотрели образующие квадратные панели стенки сплошных балок с попереч-

<sup>1)</sup> Wagner H., Ebene Blechträger mit sehr dünnem Stegblech, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, т. 20, 1929, стр. 220.

<sup>2)</sup> Kromm A., Marguerre K., Verhalten eines von Schub und Druckkräften beanspruchten Plattenstreifens oberhalb der Beulgrenze, Luftfahrt-Forschung, т. 17, стр. 62, 1937.

<sup>3)</sup> Levy S., Fienup K. L., Wooley R. M., Analysis of Square Shear Web above Buckling Load, NACA Tech. Note 962, 1945.

ными ребрами жесткости. Все эти аналитические исследования были проведены с особой целью удовлетворить требования авиационных конструкторов и не имели большого отношения к задачам, возникающим при проектировании обычно употребляемых в тяжелых стальных конструкциях сплошных балок.

Расчет стенок сплошных балок в таких конструкциях основан на принципе, когда при наихудшем условии нагружения выпучивание должно быть предотвращено наличием достаточного запаса, несмотря на тот факт, что само появление волн выпучивания в стенке не угрожает безопасности конструкции. После того как превышена критическая нагрузка, появляется новое состояние устойчивого равновесия с перераспределенными напряжениями; отсюда ясно, что разрушающая нагрузка больше, чем критическая. Величина дополнительной нагрузки, которую может нести конструкция, зависит от прочности стенки при растяжении и от прочности сжатых ребер жесткости. В стандартных стальных конструкциях в отличие от авиационных конструкций ребра жесткости не в состоянии нести большой процент критической нагрузки, поэтому предельная нагрузка превысит критическую только в ограниченной степени. Намеренное увеличение площади ребра жесткости не экономично, и более целесообразно увеличить число ребер жесткости и предотвратить вообще явление выпучивания.

Из вышесказанного следует, что коэффициент безопасности, употребляемый при расчете стенок, по отношению к выпучиванию можно подобрать с точки зрения более экономичного использования стенки. В отличие от сжатых стержней, где местное выпучивание вызывает уменьшение эффективной площади сжатого стержня, стенки и ребра жесткости имеют дополнительный запас прочности и, следовательно, можно использовать меньшее, чем при расчете сжатых стержней, значение коэффициента безопасности при выпучивании стенок. В немецких инструкциях предлагается употреблять значение коэффициента безопасности, составляющее от  $\nu = 1,4$  до  $\nu = 1,6$ ; Тимошенко<sup>1)</sup> рекомендует брать  $\nu = 1,5$ . Бергман и Вестлунд<sup>2)</sup> все-сторонне исследовали вопрос о коэффициенте безопасности в свете проведенных экспериментов.

#### 114. Экспериментальное исследование

**Экспериментальное подтверждение теории.** Имеется только ограниченное число опытов, поставленных с главной целью проверить теоретические результаты. Одна серия опытов, о которой можно здесь упомянуть, была поставлена с целью эксперименталь-

<sup>1)</sup> Timoshenko S., Theory of Elastic Stability, стр. 415, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1936; русский перевод: Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, 1955, стр. 422.

<sup>2)</sup> Вестлунд, Бергман, цит. выше, стр. 428.

ной проверки применимости параболической кривой взаимосвязи для упругого выпучивания прямоугольных пластинок при комбинированном действии сдвига и продольного сжатия<sup>1)</sup>. Опыты проводились с четырьмя пластинками, образующими квадратную трубу, причем при обработке результатов опыта учитывалась взаимная заделка четырех стен трубы. Результаты опытов показывают, что формулу взаимосвязи (749) можно считать пригодной для расчетных целей.

Две другие группы экспериментов имели целью исследование псевдения пластинок, подкрепленных поперечными ребрами<sup>2)</sup>. Отношения  $b/d$  исследуемых панелей были 1,4; 2,4 и 4,8. Отношения  $c/t$  стенок были 70, 125 и 250. Результаты этих опытов, как уже упоминалось в § 110, показали хорошее соответствие с результатами, полученными на основе теории бесконечно длинных пластин Стейна

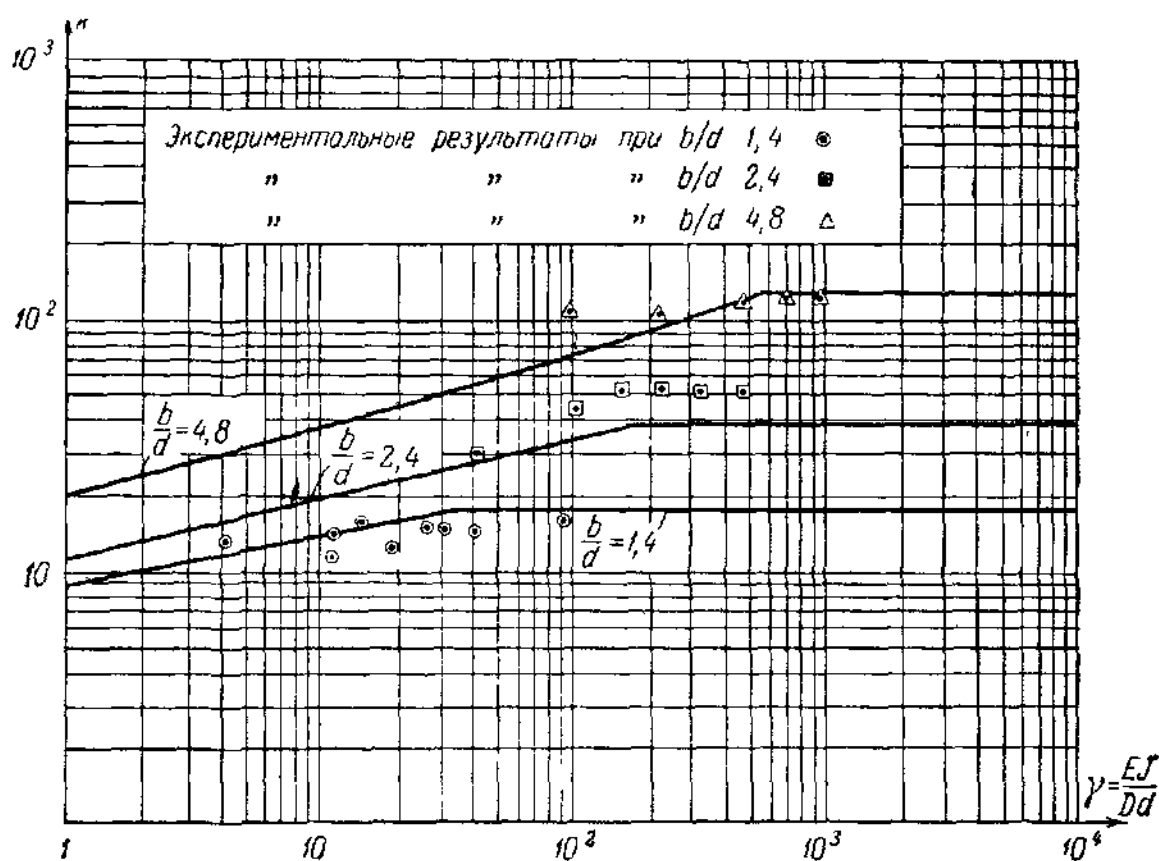


Рис. 221.

и Фралиха. На рис. 221 приведены результаты опытов и три кривые, построенные на основе расчетной формулы (775) для значений отношения  $\beta = 1,4; 2,4$  и  $4,8$ .

<sup>1)</sup> Peters R. G., Buckling Tests of Flat Rectangular Plates under Combined Shear and Longitudinal Compression, NACA Tech. Note 1750, 1948.

<sup>2)</sup> Levin L. R., Sandlin C. W., Jr., Strength Analysis of Stiffened Thick Beam Webs, NACA Tech. Note 1820, 1949; Sandlin C. W., Jr., Strength Tests of Shear Webs with Uprights Not Connected to the Flanges, NACA Tech. Note, 1635, 1948.

**Критическое напряжение и предельная прочность стенок сплошных балок.** Бергман и Вестлунд<sup>1)</sup> провели многочисленные опыты с целью выяснить поведение стенок сварных стальных балок. Опыты проводились со стенками, приваренными к поясам испытываемых балок при различных условиях нагружения, а также на пластинках, подверженных чистому сдвигу или действию изгибающих напряжений, или одновременному действию их обоих. Значение отношения  $\alpha$  исследуемых панелей находилось в пределах между 1 и 3,43, а отношение ширины к толщине изменилось между 175 и 285.

Было установлено, что стенки испытывают боковые перемещения с момента приложения нагрузки и обнаружили начальные отклонения от плоской формы. В большинстве случаев скорость увеличения прогиба от нулевой нагрузки до нагрузки, вызывающей текучесть, была приблизительно постоянной. Следовательно, действительное явление выпучивания могло бы иметь место за исключением двух случаев, когда наблюдалось довольно быстрое увеличение прогиба, указывающее на достижение критического состояния при нагрузках, превышающих на 10 и 20% критическую нагрузку, вычисленную при условии свободного опирания краев. Однако скорость возрастания прогиба в этих случаях убывала при дальнейшем увеличении нагрузки и предельные нагрузки намного превысили теоретическую критическую нагрузку. Наблюдаемые предельные нагрузки во всех опытах были в 2—4,2 раза больше, чем критические нагрузки.

Измерения с помощью датчиков деформаций, поставленных на пояса, показывали, что касательные напряжения распределены неравномерно вдоль краев стенки и что они значительно изменяются.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Ban S., Knickung der rechteckigen Platte bei veränderlicher Randbelastung, Pubs. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., т. 3, стр. 1, 1935.

Treffitz E., Willers F. A., Die Bestimmung der Schubbeanspruchung beim Ausbeulen rechteckiger Platten, Zeitschrift angewandte Mathematik und Mechanik, т. 16, стр. 336, 1936.

Schleicer F., Barbré R., Stabilität versteifter Rechteckplatten mit anfänglicher Ausbiegung, Der Bauingenieur, т. 18, стр. 665, 1937.

Fröhlich H., Stabilität der gleichmässig gedrückten Rechteckplatte mit Streben Kreuz, Der Bauingenieur, т. 18, стр. 673, 1937.

Burchard W., Beulspannungen der quadratischen Platte mit Schrägsteife unter Druck bzw. Schub, Ingenieur-Archiv, т. 8, стр. 332, 1937.

Bergman S. G. A., Behaviour of Buckled Rectangular Plates under the Action of Shearing Forces, Kungl. Tekniska Hogskola, Stockholm, 1948.

Schunk T. E., Die quadratische Platte bei Schubbelastung oberhalb der Beulgrenze, Ingenieur-Archiv, т. 17, стр. 117, 1949.

---

<sup>1)</sup> Вестлунд, Бергман, цит. выше, стр. 488.

## ГЛАВА XII

### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА ОБШИВКИ КОРАБЛЯ

#### 115. Введение

В главе IX мы рассмотрели основную задачу устойчивости прямоугольных пластинок и разработали метод расчета, применяемый в упругой и неупругой областях. Этот метод затем был использован для решения задачи о местном выпучивании пластинчатых элементов сжатых стержней. В главах X и XI исследовалось выпучивание продольно подкрепленных пластинок и стенок сплошных балок. В этой главе мы рассмотрим ряд особых задач, встречающихся при расчете обшивки корабля.

По существу корабли представляют собой конструкции, составленные из прямоугольных пластинок, опертых на поперечный и продольный набор корабля. Днище, силовая палуба и боковая обшивка являются пластинками, опирающимися непрерывно в продольном и поперечном направлениях на большое количество поддерживающих элементов. В некоторых случаях при расчете обшивки на устойчивость необходимо учитывать то обстоятельство, что обшивка является неразрезной, поскольку этот эффект может оказывать значительное влияние на устойчивость. Поэтому §§ 116—118 этой главы посвящены задачам о неразрезных и заделанных пластинках.

Влияние заделки по отношению к кручению нагруженных краев сжатых пластинок не рассматривалось в главе IX. В случае обшивки, подкрепленной шпангоутами, где пластинки имеют малые отношения сторон ( $\alpha < 1$ ), это влияние существенно и его необходимо учитывать для экономичности проектирования. Эту задачу рассмотрим в § 116.

Несмотря на то, что панели пластинки, которые можно рассматривать как защемленные на всех четырех краях, встречаются редко, все же очень важно иметь данные о защемленных пластинках. Теория таких пластинок и связанные с ней числовые результаты приведены в § 117.

Днища, подкрепленные продольными балками, главным образом рассчитываются как комбинации пластинки — ребро жесткости, при-



чем задачи о выпучивании такого типа конструкций подробно рассматривались в главе X. Двойные и тройные днища представляют собой набор пластинок ячеистого типа; в § 118 исследуется местная неустойчивость таких конструкций и описана общая теория расчета составных пластинок трубчатого и ячеистого поперечного сечения. Эта теория также дает возможность исследовать влияние непрерывности обшивки в случаях, когда соединяются две панели различных размеров.

§ 119 посвящен вопросу о подкрепляющем влиянии шва соединения листов внахлестку на устойчивость пластинок.

Тот факт, что перераспределение первоначально равномерно распределенных сжимающих напряжений имеет место после достижения критической нагрузки пластинки и пластинка деформируется, представляет собой другую сторону задачи о выпучивании, относящуюся к послекритическому поведению пластинок. Теория и экспериментальное исследование показывают, что предельная нагрузка, т. е. нагрузка, выдерживаемая до фактического разрушения, обычно значительно больше нагрузки, рассчитанной по критическому напряжению. Исследование этой стадии деформирования невозможно основывать на линейной теории прочности, развитой в предыдущих параграфах. Остальные параграфы этой главы посвящены исследованию этой задачи, основанному на теории больших прогибов пластинок, и рассмотрению родственной задачи о пластинках при продольном сжатии и нормальном давлении. Последняя задача имеет первостепенную важность при расчете обшивки корпуса корабля.

Много различных мнений существовало относительно влияния на устойчивость нормальных нагрузок, которые подобно гидростатическому давлению действуют на обшивку корпуса в добавление к сжимающим напряжениям, существующим в плоскости пластинки. Недавно были опубликованы работа о теоретическом методе решения этой задачи и заметка о ряде лабораторных опытов, подтверждающих теоретические результаты. В последнем параграфе этой главы даются краткий обзор этой работы и заключительные результаты решения задачи, имеющей большое значение при проектировании кораблей.

#### **116. Прямоугольные пластинки при продольном сжатии, упруго заделанные на нагруженных и свободно опертые на ненагруженных краях**

В главе IX было указано, что любое защемление краев, где приложены сжимающие напряжения  $\sigma_x$ , не оказывает заметного влияния на устойчивость пластинок с большим отношением сторон  $\alpha$ , т. е. пластинок, длина которых в направлении сжимающих сил в несколько раз больше, чем ширина  $b$ . Однако в случае, когда отношение  $\alpha$  стремится к единице или становится меньше единицы, влияние

защемления краев, где действуют сжимающие нагрузки, становится значительным. В связи с тем, что пластинки с отношением  $\alpha < 1$  используются в обшивке, подкрепленной шпангоутами, необходимо исследовать задачу устойчивости такой пластинки.

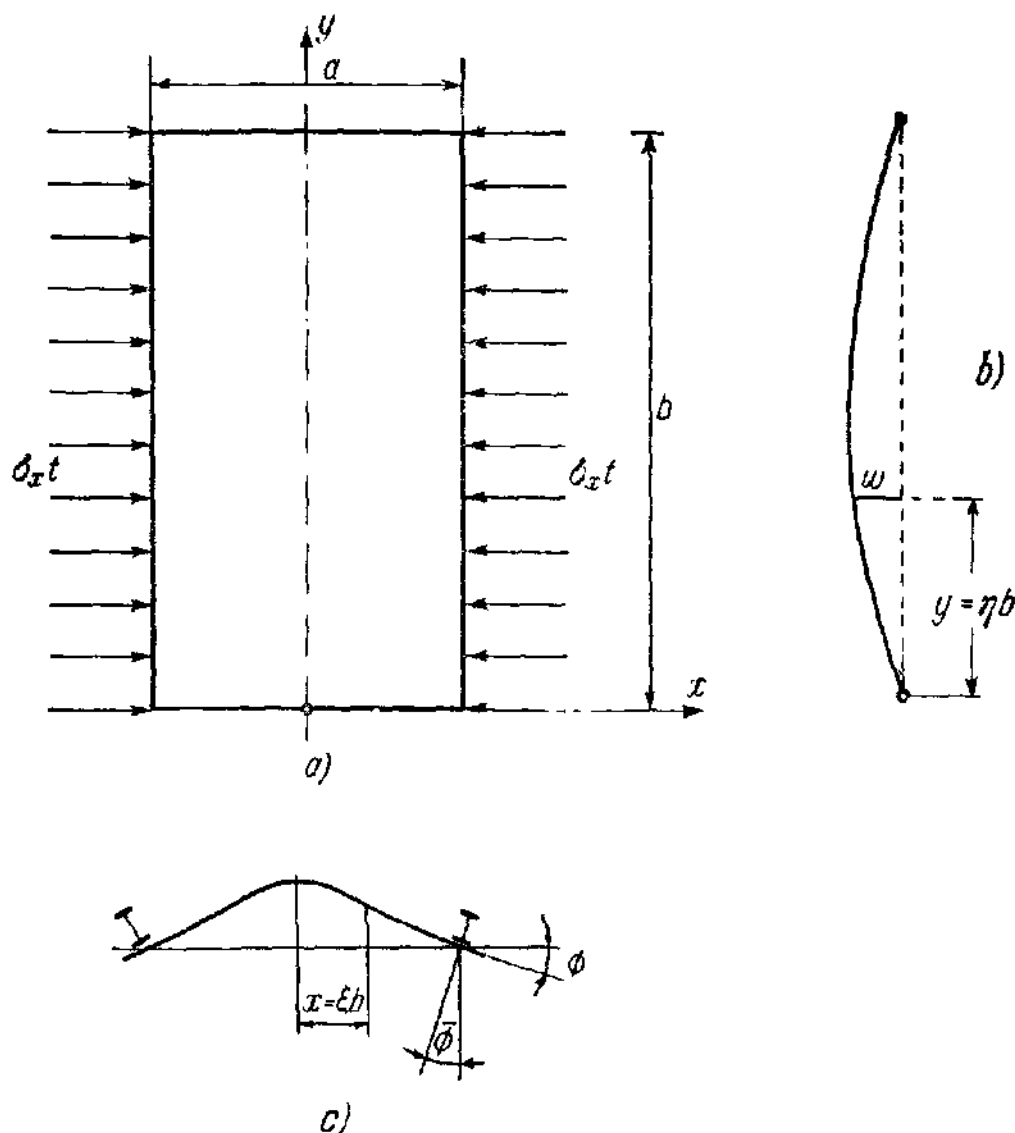


Рис. 222.

Шлейхер<sup>1)</sup> рассмотрел случай защемленных нагруженных краев и дал таблицу значений коэффициента устойчивости  $k$  для различных отношений  $\alpha$ . Ввиду того, что упругая заделка обшивки корабля обусловлена крутильной жесткостью шпангоутов, нагруженные края нельзя рассматривать как жестко защемленные. Наоборот, конечную степень заделки, обусловленной сопротивлением кручению элементов, поддерживающих конструкций необходимо считать эффективной.

Для того чтобы получить решение задачи, применимое в упругой и неупругой областях выпучивания, будем исходить из дифферен-

<sup>1)</sup> Schleicher F., Die Knickspannungen von eingespannten rechteckigen Platten, Mitteilungen aus den Forschungsanstalten des Gutehoffnungshütten-Konzerns, т. 1, 1931. См. также, Final Rept. 1st. Congr. Intern. assoc. Bridge and Structural Eng., Paris, 1932, стр. 123.

циального уравнения (604) главы IX (теория Роша — Бруннера). В данном случае скорее допустимо основывать исследование на этом уравнении, чем на более точном, но сложном уравнении (601), так как для малых отношений  $\alpha < 1$  разница в результате очень мала. Изложение этого вопроса на стр. 360, глава IX.

На рис. 222, *a* показана короткая пластинка, упруго заделанная по отношению к вращению на длинных краях и равномерно нагруженная на этих двух краях сжимающими силами  $\sigma_x t$  на единицу длины.

Если  $\xi = a/b$ ,  $\eta = y/b$  — безразмерные координаты, то дифференциальное уравнение (604) можно написать следующим образом:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + \frac{\sigma_x t b^2}{D t} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0. \quad (798)$$

Критическое напряжение  $\sigma_x = \sigma_{кр}$  можно выразить через коэффициент устойчивости  $k$ :

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E t}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 k. \quad (799)$$

Подставляя это выражение и  $D = Et^3/12(1 - \nu^2)$  в уравнение (798), получим:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + \pi^2 k \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0. \quad (800)$$

Наименьшее значение критического напряжения  $\sigma_{кр}$  связано с прогибом пластинки по одной полуволне в направлении оси  $y$ , как это показано на рис. 222, *b*. Следовательно, выражение

$$w = X \sin \pi \eta \quad (801)$$

представляет собой подходящее решение уравнения (800), где  $X$  — функция координаты  $\xi$ . Подставляя уравнение (801) в уравнение (800), получим дифференциальное уравнение для функции  $X$ :

$$\frac{d^4 X}{d \xi^4} - 2(\pi^2 - k) \frac{d^2 X}{d \xi^2} + \pi^4 X = 0. \quad (802)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка общеизвестного типа, имеющее следующее общее решение:

$$X = C_1 \cos k_1 \xi + C_2 \cos k_2 \xi + C_3 \sin k_1 \xi + C_4 \sin k_2 \xi, \quad (803)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  являются параметрами, подлежащими определению. Подставляя  $X = \cos k \xi$  в уравнение (802), получим:

$$[k^4 + (2 - k) \pi^2 k^2 + \pi^4] \cos k \xi = 0. \quad (804)$$

Это уравнение удовлетворяется для всех значений  $\xi$  при условии, когда заключенное в квадратных скобках выражение равно нулю.

Следовательно, получим:

$$(k^2 + \pi^2)^2 - \pi^2 k^2 k = 0,$$

или

$$k^2 - \pi \sqrt{k} k + \pi^2 = 0. \quad (805)$$

Это квадратное уравнение имеет два корня:

$$k_{1,2} = \frac{\pi}{2} (\sqrt{k} \pm \sqrt{k-4}). \quad (806)$$

Подставляя другие члены уравнения (803), получим одинаковые значения для  $k_1$  и  $k_2$ . Следовательно, решение (801) принимает следующий вид:

$$w = \sin \pi \eta (C_1 \cos k_1 \xi + C_2 \cos k_2 \xi + C_3 \sin k_1 \xi + C_4 \sin k_2 \xi). \quad (807)$$

Значение критической нагрузки выпучивания связано с симметричными деформациями, как это показано на рис. 222, с. Члены, содержащие  $C_3$  и  $C_4$  в уравнении (807), выражают антисимметричные прогибы, следовательно, требуемый симметричный прогиб  $w$  можно выразить только через члены  $C_1$  и  $C_2$ :

$$w = \sin \pi \eta (C_1 \cos k_1 \xi + C_2 \cos k_2 \xi). \quad (808)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий, согласно которым на нагруженных краях прогиб  $w = 0$ , и угол поворота  $\varphi$  касательной к кривой прогибов этих краев должен быть равным углу поворота  $\bar{\varphi}$  поддерживающей конструкции (рис. 222, с).

Рассуждая так же, как и при выводе условия непрерывности в упруго заделанных ненагруженных краях прямоугольной пластинки [уравнение (628) в гл. IX], условие  $\varphi = \bar{\varphi}$  для края  $\xi = a/2$  принимает следующий вид:

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{D}{\bar{\zeta} b} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right]_{\xi = \frac{a}{2}} = 0. \quad (809)$$

Коэффициент пропорциональности  $\bar{\zeta}$ , зависящий от крутильной жесткости поддерживающей конструкции, можно определить следующим образом: при выводе уравнения (809) предполагалось, что изгибающий момент  $M_x$  на единицу длины, действующий на краях, пропорционален углу вращения  $\bar{\varphi}$  поддерживающей конструкции:

$$M_x = -\bar{\zeta} \bar{\varphi}, \quad (810)$$

где значение  $\bar{\varphi}$  положительно, как это показано на рис. 222.

Другое соотношение между  $M_x$  и  $\bar{\varphi}$  выражено дифференциальным уравнением для кручения поддерживающего элемента<sup>1)</sup>:

$$E\Gamma^* \frac{d^4 \bar{\varphi}}{dy^4} - GK \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dy^2} = -M_x. \quad (811)$$

Согласно уравнению (805) прогиб  $w$  и, следовательно, момент  $M_x$  синусоидально распределены вдоль нагруженных краев. Таким образом, момент  $M_x$  равен

$$M_x = C \sin \frac{\pi y}{b},$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Подставляя это выражение в уравнение (811), можно найти решение этого уравнения:

$$\bar{\varphi} = \frac{-b^2}{\pi^2 \left( \frac{\pi^2}{b^2} E\Gamma^* + GK \right)} C \sin \frac{\pi y}{b} = \frac{-b^2}{\pi^2 \left( \frac{\pi^2}{b^2} E\Gamma^* + GK \right)} M_x. \quad (812)$$

Сравнивая уравнения (810) и (812), в результате получим:

$$\bar{\tau} = \frac{\pi^2}{b^2} \left( \frac{\pi^2}{b^2} E\Gamma^* + GK \right). \quad (813)$$

---

<sup>1)</sup> Это уравнение можно вывести при помощи теоремы о стационарном значении потенциальной энергии следующим образом. Поддерживающий элемент представляет собой стержень, который вынужденно вращается вокруг линии соединения с пластинкой. Уравнение (266) выражает потенциальную энергию сжатого стержня с фиксированной осью вращения. Опуская в этом уравнении член, содержащий  $\sigma$ , который выражает потенциальную энергию внешней силы, и полагая  $\beta = \bar{\varphi}$  и  $\tau = 1$  (последнее означает упругую работу поддерживающего элемента), получим:

$$V = \frac{1}{2} \int [E(a^2 J_y + \Gamma) \bar{\varphi}''^2 + GK \bar{\varphi}'^2] dz.$$

Кроме того, необходимо определить потенциальную энергию внешней нагрузки, т. е. распределенного момента  $M_x$ . Направление положительных моментов определено уравнением (602), и можно найти, что это направление противоположно направлению положительных углов  $\bar{\varphi}$ , показанных на фиг. 222, с. Следовательно, потенциальная энергия нагрузки равна

$$U_w = \int M_x \bar{\varphi} dz.$$

Из условия  $V + U_w =$  стационарному значению получим уравнение Эйлера (см. § 30):

$$E(a^2 J_y + \Gamma) \bar{\varphi}^{IV} - GK \bar{\varphi}'' = -M_x.$$

Как указывалось в § 43, величина  $a$  в этом уравнении означает расстояние от центра сдвига до центра вращения. Во избежание путаницы между этим значением и расстоянием  $a$  на рис. 211 введем обозначение  $\Gamma^* = a^2 J_y + \Gamma$ ; получим уравнение (811). В § 38 значения постоянных  $K$  и  $\Gamma$  определены для обычно употребляемых сечений.

Уравнение (809) окончательно можно написать в следующем виде:

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial \xi} + \alpha \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right]_{\xi = \frac{a}{2}} = 0, \quad (814)$$

где безразмерный коэффициент заделки  $\zeta$  выражен соотношением

$$\zeta = \frac{1}{\pi^2} \frac{D b^2}{a \left( \frac{\pi^2}{b^2} E \Gamma^* + G K \right)} = \frac{1}{\pi^2} \frac{t^3 b^3}{12 (1 - \nu^2)} \frac{E}{a \left( \frac{\pi^2}{b^2} E \Gamma^* + G K \right)}. \quad (815)$$

Коэффициент  $\zeta$  уменьшается с увеличением крутильной жесткости  $\frac{\pi^2}{b^2} E \Gamma^* + G K$  и становится равным нулю в случае зашеченных краев, когда эта жесткость стремится к бесконечности. Для свободно опертых краев  $\zeta = \infty$ .

В большинстве случаев поддерживающий элемент имеет тавровое или двутавровое сечение и с достаточной точностью величину  $\Gamma^*$

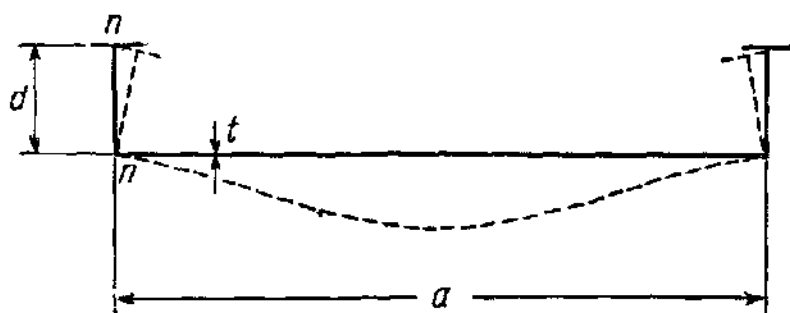


Рис. 223.

можно заменить через  $J d^2$ , где  $d$  обозначает высоту подкрепляющего элемента, а  $J$  — момент инерции верхнего пояса этого элемента относительно оси  $n-n$  (рис. 223). Следовательно, уравнение (815) принимает следующий вид:

$$\zeta = \frac{1}{\pi^2} \frac{t^3 b^2}{12 (1 - \nu^2)} \frac{1}{a \left[ \frac{\pi^2}{b^2} J d^2 + \frac{K}{2(1 + \nu)} \right]} = \frac{t^3 b^2}{107,8 a \left( \frac{\pi^2 J d^2}{b^2} + \frac{K}{2,6} \right)}, \quad (816)$$

где

$$G/E = 1/2 (1 + \nu) = 1/2,6.$$

Значение  $\zeta$ , данное уравнением (816), выведено для отдельной пластинки, опертой вдоль нагруженных краев. Для неразрезной пластинки, как это показано на рис. 224, коэффициент заделки вдвое больше значения, данного уравнением (816). Следовательно,

$$\zeta_{\text{нераз}} = \frac{t^3 b^2}{53,9 a \left( \frac{\pi^2 J d^2}{b^2} + \frac{K}{2,6} \right)}. \quad (817)$$

Вводя теперь значение  $w$  из уравнения (808) в граничное условие  $w=0$  и в уравнение (814), получим следующие два однородных уравнения:

$$C_1 \cos \frac{\alpha k_1}{2} + C_2 \cos \frac{\alpha k_2}{2} = 0;$$

$$C_1 k_1 \sin \frac{\alpha k_1}{2} + C_2 k_2 \sin \frac{\alpha k_2}{2} + \alpha \zeta \left( C_1 k_1^3 \cos \frac{\alpha k_1}{2} + C_2 k_2^3 \cos \frac{\alpha k_2}{2} \right) = 0.$$

Детерминант, составленный из коэффициентов этих уравнений, должен равняться нулю, и условие устойчивости будет

$$k_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha k_1}{2} - k_2 \operatorname{tg} \frac{\alpha k_2}{2} + \alpha \zeta (k_1^3 - k_2^3) = 0, \quad (818)$$

где величины  $k_1$  и  $k_2$  являются функциями коэффициента устойчивости  $k$  [см. уравнение (806)], а значение  $k$  можно вычислить из

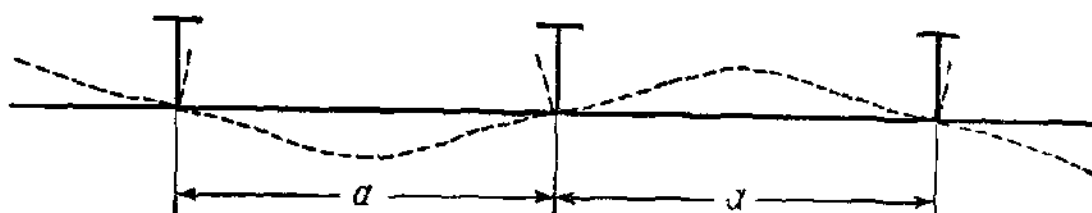


Рис. 224.

уравнения (818). Тогда критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  можно определить из уравнения (799). Однако в случае коротких пластинок целесообразно заменить отношение  $t/b$  в уравнении (799) отношением  $t/a$  и ввести коэффициент устойчивости  $\bar{k} = \alpha^2 k$ . Тогда критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  можно выразить следующим образом:

$$\frac{\sigma_{кр}}{\tau} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{a} \right)^2 \bar{k}. \quad (819)$$

Для облегчения практических расчетов  $\tau_{кр}$  в таблице 40 даны значения  $\bar{k}$  для величин  $\alpha$  в пределах от 0,1 до 1,0 и для значений  $\zeta$  — от 0 до  $\infty$ .

При выводе уравнения (815), определяющего степень заделки, подразумевалось, что выпучивание пластинки происходит в упругой области. В случае, если критическое напряжение лежит выше предела упругости, член  $D$  в уравнении (815) должен быть заменен через  $D\tau$ , а коэффициент заделки будет  $\zeta\tau$ , где параметр  $\tau$  зависит от неизвестного критического напряжения  $\sigma_{кр}$ . Определение  $\zeta$  возможно методом проб. Так как значение  $k$  можно определить из таблицы 40, достаточно точное значение  $\zeta$  можно получить с помощью двух или трех приближений. Однако для практических расчетов нет необходимости использовать такой способ, ибо влияние поправки на критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  очень мало и лежит всегда в пределах безопасности.

Т а б л и ц а 40. Значения коэффициента устойчивости  $\bar{k}$  в уравнении (819) для коротких сжатых пластинок, упруго заделанных вдоль нагруженных краев (рис. 222)

Коэффициент заделки $\zeta$	Отношение $a = a/b$							
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
0, заделанная	4,02	4,08	4,19	4,34	4,55	4,82	5,59	6,74
0,05	3,35	3,40	3,51	3,63	3,88	4,15	4,94	6,18
0,10	2,88	2,93	3,04	3,18	3,42	3,70	4,51	5,78
0,15	2,56	2,62	2,72	2,86	3,10	3,38	4,21	5,48
0,20	2,32	2,38	2,49	2,62	2,86	3,15	3,98	5,26
0,25	2,15	2,21	2,32	2,45	2,68	2,97	3,80	5,09
0,30	2,01	2,07	2,18	2,32	2,55	2,84	3,67	4,98
0,35	1,90	1,96	2,08	2,22	2,44	2,73	3,57	4,89
0,40	1,81	1,88	1,99	2,13	2,35	2,65	3,48	4,80
0,45	1,74	1,81	1,91	2,06	2,28	2,58	3,41	4,73
0,50	1,69	1,75	1,85	2,00	2,23	2,52	3,35	4,68
1,00	1,39	1,46	1,55	1,71	1,92	2,22	3,06	4,37
2,00	1,22	1,27	1,38	1,55	1,76	2,04	2,89	4,19
∞, свободно опертая	1,02	1,08	1,19	1,35	1,56	1,85	2,69	4,00

Т а б л и ц а 41. Определение критического напряжения  $\sigma_{кр}$  для стали,

$$\frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \left( \sigma_{\pi} = 1760 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \sigma_{\tau} = 2330 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right)$$

$\sigma_{кр}/\tau$	$\sigma_{кр}$	$\sigma_{кр}/\tau$	$\sigma_{кр}$	$\sigma_{кр}/\tau$	$\sigma_{кр}$
1 760	1 760	2 471	1 926	8 472	2 211
1 800	1 777	2 541	1 937	9 884	2 228
1 835	1 787	2 612	1 948	11 296	2 240
1 870	1 797	2 682	1 958	12 708	2 250
1 906	1 807	2 753	1 967	14 120	2 259
1 941	1 816	2 824	1 976	17 650	2 273
1 976	1 825	3 177	2 014	21 180	2 281
2 012	1 834	3 530	2 047	28 240	2 293
2 047	1 842	3 883	2 072	35 300	2 301
2 082	1 851	4 236	2 094		
2 118	1 858	4 942	2 121		
2 188	1 873	5 648	2 153		
2 259	1 887	6 354	2 173		
2 329	1 901	7 060	2 188		
2 400	1 914				

Следовательно, расчет критического напряжения  $\sigma_{кр}$  является очень простым. После вычисления значения  $\zeta$  из уравнения (816) или (817) из таблицы 40 определим  $\bar{k}$  и из уравнения (819) вы-



Таблица 42. Определение критического напряжения  $\sigma_{кр}$  для стали,

$$\frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \left( \sigma_{\kappa} = 2400 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \sigma_{\tau} = 3177 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right)$$

$\sigma_{кр}/\tau$	$\sigma_{кр}$	$\sigma_{кр}/\tau$	$\sigma_{кр}$	$\sigma_{кр}/\tau$	$\sigma_{кр}$
2 400	2 400	3 247	2 603	7 060	2 912
2 435	2 412	3 918	2 613	7 766	2 936
2 471	2 422	3 388	2 626	8 472	2 956
2 506	2 432	3 459	2 638	9 178	2 972
2 541	2 442	3 530	2 648	9 884	2 987
2 576	2 452				
		3 671	2 669	10 590	3 000
2 612	2 463	3 812	2 688	14 120	3 044
2 647	2 472	3 953	2 705	17 650	3 071
2 682	2 481	4 094	2 721	21 180	3 088
2 718	2 490	4 236	2 737		
2 753	2 499			28 240	3 110
2 788	2 507	4 589	2 770	35 300	3 123
		4 942	2 799	42 360	3 132
2 824	2 516	5 295	2 824		
2 894	2 532	5 648	2 846		
2 965	2 547	6 001	2 866		
3 035	2 562	6 354	2 884		
3 106	2 576	6 707	2 898		
3 177	2 590				

числим  $\sigma_{кр}/\tau$ . Значение  $\sigma_{кр}$  можно получить из таблицы 41 или 42<sup>1)</sup>, где величины  $\sigma_{кр}$  даны в функции от  $\sigma_{кр}/\tau$ .

### 117. Выпучивание прямоугольных пластинок, защемленных на всех четырех краях

Для защемленных на четырех краях пластинок невозможно получить конечные выражения условий устойчивости в элементарных функциях, как в случае, когда только два противоположных края упруго заделаны или защемлены, а формы выпучивания можно выразить при помощи комбинации круговых и гиперболических функций [уравнение (624) гл. IX].

Приближенные решения можно получить методом Ритца. Такие решения удовлетворяют граничным условиям, однако не удовлетворяют дифференциальному уравнению задачи о выпучивании. Садзава<sup>2)</sup> применил другой метод для приближенного решения этой задачи и вывел аналитическое выражение, которое на самом деле

<sup>1)</sup> Таблицы 41 и 42 применимы для тех же сортов стали, что и таблицы 27 и 28. См. сноску на стр. 381.

<sup>2)</sup> S a z a w a K., Das Ausknicken von allseitig befestigten und gedrückten rechteckigen Platten, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. 12, стр. 227, 1932.

удовлетворяет дифференциальному уравнению (600), но не удовлетворяет точно условиям на краях, за исключением середин краев и углов. Для квадратных пластинок под действием краевого сжатия  $\sigma_A$  и  $\sigma_B$  соответственно в направлениях осей  $x$  и  $y$  даны числовые результаты при различных значениях  $\sigma_B/\sigma_A$ . Садзава и Ватонабэ<sup>1)</sup> еще более усовершенствовали теорию, разлагая решение дифференциального уравнения в тригонометрический ряд, и получили решения, удовлетворяющие всем граничным условиям. Для прямоугольных пластинок под действием продольного сжатия получены числовые значения коэффициента устойчивости  $k$  при отношениях  $\alpha = a/b = 1, 1,5$  и  $2$ .

Тейлор<sup>2)</sup> опубликовал строгое решение задачи о выпучивании прямоугольных защемленных пластинок и дал числовые результаты для квадратной пластинки под действием равного сжатия в обоих направлениях ( $\sigma_A = \sigma_B$ ).

Факсен<sup>3)</sup> сделал глубокий математический анализ рассматриваемой задачи, подтвердил результаты Тейлора для квадратной пластинки и, предположив, что  $\sigma_B = 0$ , дал значение коэффициента устойчивости  $k$  для нескольких значений отношения  $\alpha$  между  $0,75$  и  $2$ .

Маульбеч<sup>4)</sup> на основе исследования Факсена распространил числовые расчеты на прямоугольные пластинки для значения отношения  $\alpha$  вплоть до  $\alpha = 4$ , предположив, что  $\sigma_B = 0$ . Он также дал решение, основанное на методе Ритца. Маульбеч аппроксимирует поверхность прогибов пластинки нормальными формами колебаний стержня, защемленного на обоих концах, используя шестичисленный ряд в направлении сжимающей силы и трехчленное выражение в другом направлении. Это исследование дало значения  $k$ , которые на  $3-10\%$  превышают значения, полученные на основе его точного метода.

Дальнейшие шаги сделаны Леви<sup>5)</sup>, который получил строгие решения в форме бесконечных рядов, выражая прогиб  $w$  и краевые моменты при помощи рядов Фурье. Важность работы Леви заключается в том, что ряды быстро сходятся, уменьшая таким образом объем числовых работ при определении значений  $k$ . Для

---

<sup>1)</sup> Sazawa K., Watanabe W., Buckling of a Rectangular Plate with Four Clamped Edges Re-examined with Improved Theory, Repts. Tokyo Imp. Univ. Aeronaut. Research Inst., т. 11, № 143, 1936.

<sup>2)</sup> Taylor G. I., The Buckling Load for a Rectangular Plate with Four Clamped Edges, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. 13, стр. 147, 1933.

<sup>3)</sup> Faxén O. H., Die Knickfestigkeit rechteckiger Platten, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. 15, стр. 268, 1935.

<sup>4)</sup> Maubetsch J. L., Buckling of Compressed Rectangular Plates with Built-in Edges, Trans. ASME, APM т. 4, стр. A 59, 1937.

<sup>5)</sup> Levy S., Buckling of Rectangular Plates with built-in Edges, Trans. ASME, т. 64, стр. A 171, 1942.

прямоугольных пластинок под действием продольного сжатия критические нагрузки определены для 14 отношений сторон в пределах от  $\alpha = a/b = 0,75$  до 4,00. Возможная ошибка результатов составляет примерно 0,1%.

Критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  прямоугольной пластинки, жестко защемленной вдоль всех четырех сторон, можно выразить в виде

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k, \quad (820)$$

где коэффициент устойчивости  $k$  зависит от отношения  $\alpha = a/b$  и от отношения  $\sigma_B/\sigma_A$  сжимающих на-

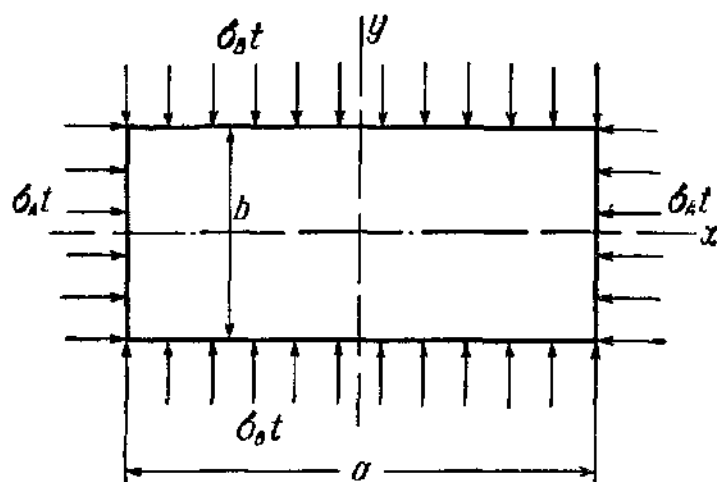


Рис. 225.

пряжений (рис. 225). Уравнение (820) применимо только тогда, когда  $\sigma_{кр}$  равно или меньше предела пропорциональности. Аналогичная формула для неупругой области дана в конце этого параграфа.

**Квадратные пластинки под действием равного сжатия в обоих направлениях.** Тейлор и Факсен нашли, что

$$k = 5,31. \quad (821)$$

**Квадратные пластинки под действием неравного сжатия ( $\sigma_A$  в направлении  $x$  и  $\sigma_B$  в направлении  $y$ ).** Значения коэффициента устойчивости  $k$ , рассчитанные Садзава на основе приближенного метода, даны в таблице 43. Подставляя эти значения  $k$  в уравнение (820), получим критические значения  $\sigma_A$ .

Точное значение  $k$  при  $\sigma_B/\sigma_A = 0$  равно 10,07 (см. таблицу 44), а при  $\sigma_B/\sigma_A = 1$  равно  $k = 5,31$  [уравнение (821)]. Различие в этих двух предельных случаях между приближенными значениями Садзава и точными значениями составляет примерно 6%. Можно полагать, что другие значения, рассчитанные Садзава, также выше точных приблизительно на 6%. В последней строке таблицы 43 приведены точные значения  $k$ , применимые для расчетных целей.

**Т а б л и ц а 43. Значения коэффициента устойчивости  $k$  в уравнении (820) для квадратных пластинок под действием сжатия в обоих направлениях**

$\sigma_B/\sigma_A$	0	$1/4$	$1/3$	$1/2$	$3/4$	1
$k$ (Садзава) . . .	10,65	8,80	8,40	7,48	6,41	5,61
$k$ (уточненные) .	10,07	8,27	7,90	7,04	6,02	5,31

Прямоугольные пластинки под действием только продольного сжатия  $\sigma_A$  (рис. 226). Леви получил значения  $k$ , данные в таблице 44.

Таблица 44. Значения коэффициента устойчивости  $k$  в уравнении (820) для прямоугольных пластинок под действием продольного сжатия (рис. 226)

$a = a/b$ $k$	0,75 11,66	1,00 10,07	1,25 9,25	1,50 8,33	1,75 8,11	2,00 7,88	2,75 7,63
$a = a/b$ $k$	2,50 7,59	2,75 7,44	3,00 7,37	3,25 7,35	3,50 7,27	3,75 7,24	4,00 7,23

Выпучивание в неупругой области. Вышеупомянутые исследования все основывались на теории упругого выпучивания; исследование, основанного на дифференциальном уравнении (601), применяемого в неупругой области, не существует. По аналогии с теорией выпучивания длинных пластинок в главе IX можно заключить, что коэффициенты устойчивости  $k$ , определенные в упругой области, остаются приблизительно пригодными, если критическое напряжение вычисляется по формуле

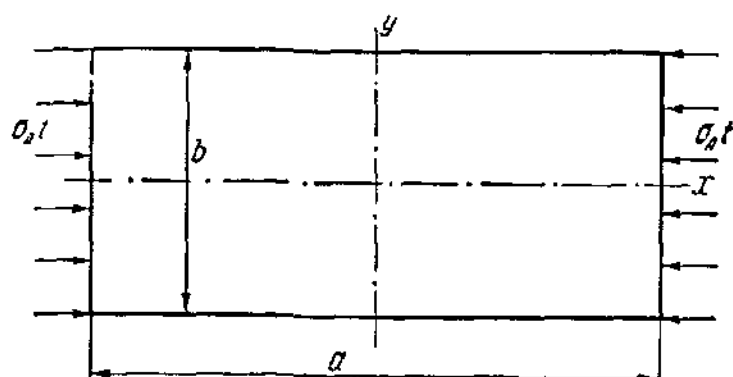


Рис. 226.

следования, основанного на дифференциальном уравнении (601), применяемого в неупругой области, не существует. По аналогии с теорией выпучивания длинных пластинок в главе IX можно заключить, что коэффициенты устойчивости  $k$ , определенные в упругой области, остаются приблизительно пригодными, если критическое напряжение вычисляется по формуле

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sqrt{\tau}} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k, \quad (822)$$

где  $\sqrt{\tau} = \sqrt{E_t/E}$  — коэффициент пластичности. Однако уравнение (822) нельзя применить для очень коротких пластинок; оно рекомендуется только для случаев, когда отношение  $a \geq 2/3$ .

Короткие пластинки ( $a < 2/3$ ) ведут себя скорее, как сжатые стержни, и для них рекомендуется применять соотношение

$$\frac{\sigma_{кр}}{\tau} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k. \quad (823)$$

Это уравнение аналогично уравнению (799) § 116.

В случае квадратной пластинки, одинаково сжатой в направлениях  $x$  и  $y$  (таблица 43,  $\sigma_A/\sigma_B = 1$ ), необходимо использовать вместо уравнения (822) уравнение (823). Поэтому в этом случае пластинку можно считать изотропной, и эффективный коэффициент пластичности равен  $\tau = E_t/E$ .

Для определения критических напряжений  $\sigma_{кр}$  необходимо использовать наряду со значениями коэффициента устойчивости  $k$  по таблицам 43 и 44 уравнение (822) или (823). При помощи рассчитанных значений  $\sigma_{кр}/\sqrt{\tau}$  или  $\sigma_{кр}/\tau$  можно определить  $\sigma_{кр}$  соответственно из таблиц 27 и 28 на стр. 380 или из таблиц 41 и 42.

### 118. Устойчивость сжатых элементов, имеющих ячеистые поперечные сечения

Одной из особых задач проектирования корпусов кораблей является вопрос об устойчивости днищ ячеистых поперечных сечений. На рис. 227, *a* и *b* показаны простейшие типы двойных и тройных днищ с равномерно расположенными продольными балками.

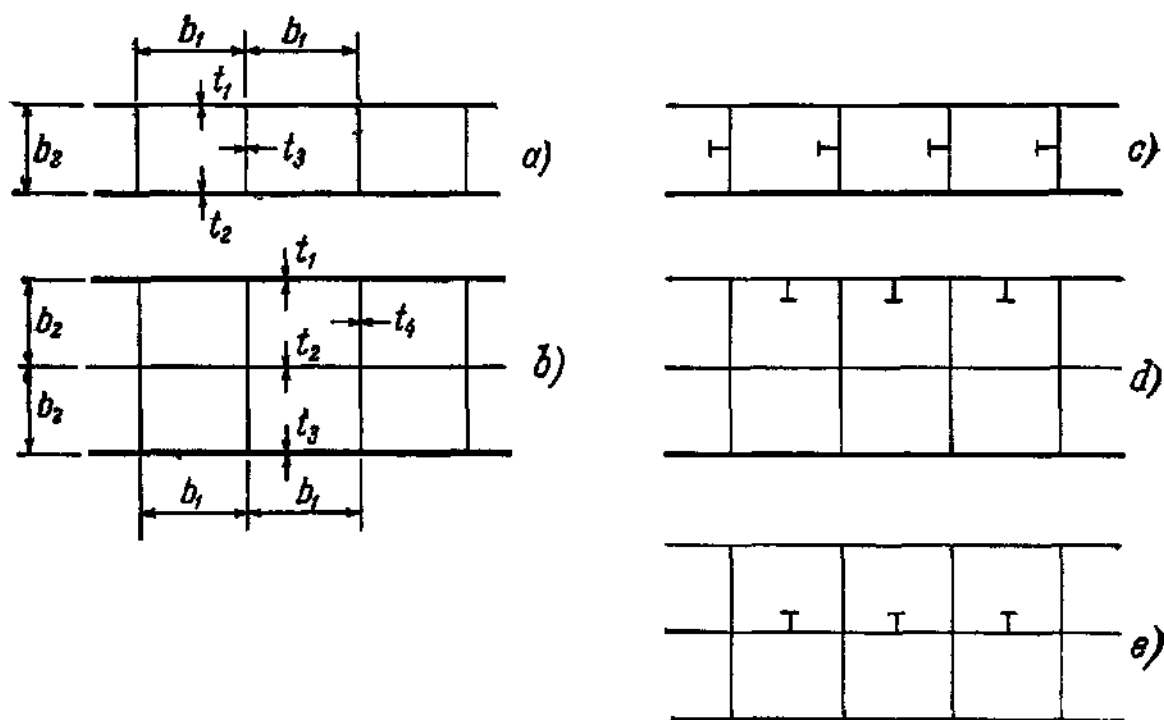


Рис. 227.

Обычно толщина пластинок, образующих ячеистую конструкцию, меняется от одной обшивки к другой. Часто продольные балки или внутренние обшивки подкреплены ребрами жесткости, как это показано на рис. 227, *c* и *e*.

В главе IX для простейшего случая ячеистого поперечного сечения, а именно для прямоугольного сечения трубы с двумя осями симметрии, давался достаточно точный приближенный метод определения взаимного влияния заделки одного пластинчатого элемента на другие. Для более сложных рассмотренных здесь случаев сжатых элементов взаимодействие между пластинками, образующими конструкцию, намного усложняется и возникает необходимость более

точного аналитического исследования, чтобы получить надежные данные для этих конструкций.

В дальнейшем излагается теория устойчивости трубчатых или ячеистых конструкций, составленных из пластинок. Метод применим в упругой и неупругой областях. Он основан на обобщении метода уравнений четырех моментов, рассмотренного в главе VI. Основная идея заключается в следующем: пластинки ячеистой конструкции, находящейся под действием продольного сжатия, выпучиваются по поперечному сечению определенной длины  $\lambda$ , которая, однако, заведомо неизвестна. При любой заданной длине волны  $\lambda$  можно определить коэффициент устойчивости  $k$  и, следовательно, соответствующее

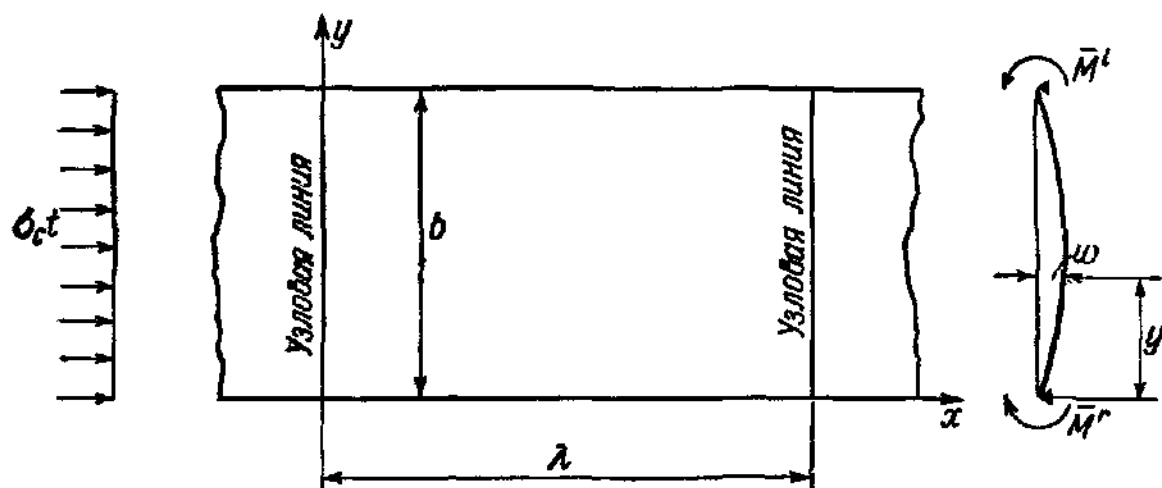


Рис. 228.

критическое напряжение сжатия  $\sigma_{кр}$  конструкции путем составления системы однородных линейных уравнений, детерминант которой, составленный из коэффициентов, должен быть равным нулю. Среди всевозможных рассчитанных таким способом значений  $k$  наименьшее значение определяет в результате действительное критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  системы<sup>1)</sup>. Последующий анализ ограничивается случаем замкнутых сечений трубчатой или ячеистой формы, однако его также можно применить для определения критического напряжения открытых сечений с выступающими поясами.

**Вывод уравнений четырех моментов.** Метод базируется на следующих двух основных предположениях:

1. Пластины жестко соединены вдоль краев. Это означает, что все пластины, соединяющиеся на одном крае, при деформации поперечного сечения поворачиваются на один и тот же угол.

2. Предполагается, что края остаются прямыми, из чего следует, что явление первоначального выпучивания всей конструкции не происходит раньше местного выпучивания.

Следовательно, каждую отдельную пластинку конструкции можно рассматривать как пластинку, свободно опертую вдоль двух не-

<sup>1)</sup> Этот метод является оригинальным исследованием автора книги.

нагруженных краев и упруго заделанную смежными пластинками. Когда пластинка в неустойчивом состоянии равновесия изгибается вдоль ненагруженных краев, действуют моменты  $\bar{M}^r$  и  $\bar{M}^l$  на единицу длины, как это показано на рис. 228. Эти моменты  $\bar{M}^r$  и  $\bar{M}^l$  распределены синусоидально<sup>1)</sup> между двумя узловыми линиями, отстоящими друг от друга на расстоянии  $\lambda$ . Следовательно, имеем:

$$\bar{M}^r = M^r \sin \frac{\pi x}{\lambda}, \quad \text{и} \quad \bar{M}^l = M^l \sin \frac{\pi x}{\lambda}, \quad (824)$$

где  $M^r$  и  $M^l$  являются наибольшими значениями краевых моментов.

Для того чтобы вывести уравнения четырех моментов, определим предварительно прогиб  $w$  пластинки, обусловленный равномерно распределенной продольной силой  $\sigma_{кр} t$  и краевыми моментами  $\bar{M}^r$  и  $\bar{M}^l$ . Целесообразно предположить, что  $\bar{M}^r = 0$ , обозначая соответствующий прогиб через  $w_1$ . На основе выражения для  $w_1$  можно легко определить прогиб  $w_2$ , обусловленный только моментом  $\bar{M}^l$  и тем самым получить общий прогиб  $w = w_1 + w_2$ .

Исследование основано на общем дифференциальном уравнении (601), применяемом в упругой и неупругой областях. Общее решение для прогиба  $w_1$  снова дается уравнением (624):

$$w_1 = \sin \frac{\pi x}{\lambda} (C_1 \operatorname{ch} k_1 y + C_2 \operatorname{sh} k_1 y + C_3 \cos k_2 y + C_4 \sin k_2 y), \quad (825)$$

где величины  $k_1$  и  $k_2$  определяются уравнениями (631), которые при  $n = 1$  и  $\alpha = \lambda/b$  принимают следующий вид:

$$k_1 = \frac{\pi}{\lambda'} \sqrt{\mu + 1}, \quad k_2 = \frac{\pi}{\lambda'} \sqrt{\mu - 1}, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{4\sqrt{\tau}}. \quad (826)$$

Постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4$  нужно определить из граничных условий:

$$\{w_1\}_{y=0} = 0; \quad \{w_1\}_{y=b} = 0; \quad (827)$$

$$\{M_y\}_{y=0} = 0; \quad \{M_y\}_{y=b} = \bar{M}^l. \quad (828)$$

Согласно уравнению (602) имеем:

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu \sqrt{\tau} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right),$$

<sup>1)</sup> Теория устойчивости прямоугольных пластинок, рассмотренная в главе IX, показывает, что прогиб  $w$  имеет вид  $w = \sin \frac{\pi x}{\lambda} Y$ , где  $Y$  является функцией от  $y$  [см. уравнение (618)]. Так как  $\bar{M}^r$  и  $\bar{M}^l$  пропорциональны  $\frac{d^2 w}{dy^2} = \sin \frac{\pi x}{\lambda} \left( \frac{d^2 Y}{dy^2} \right)$ , заключаем, что эти моменты меняются по синусоидальному закону.

и так как на краях  $\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0$ , условия (828) принимают вид

$$\left[ \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right]_{y=0} = 0; \quad -D \left[ \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right]_{y=b} = \bar{M}^l = M^l \sin \frac{\pi x}{\lambda}. \quad (829)$$

Вводя выражения (825) в уравнения (827) и (829), получим четыре уравнения для определения постоянных  $C$ :

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0; \\ C_1 k_1^2 - C_3 k_2^2 &= 0; \\ C_1 \operatorname{ch} k_1 b + C_2 \operatorname{sh} k_1 b + C_3 \cos k_2 b + C_4 \sin k_2 b &= 0; \\ k_1^2 (C_1 \operatorname{ch} k_1 b + C_2 \operatorname{sh} k_1 b) - k_2^2 (C_3 \cos k_2 b + C_4 \sin k_2 b) &= -\frac{M^l}{D}. \end{aligned}$$

Решая их относительно постоянных  $C$ , получим:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0; \quad C_2 = -\frac{M^l}{D} \frac{1}{(k_1^2 + k_2^2) \operatorname{sh} k_1 b}; \\ C_3 &= 0; \quad C_4 = \frac{M^l}{D} \frac{1}{(k_1^2 + k_2^2) \sin k_2 b}. \end{aligned}$$

Следовательно, прогиб  $w_1$  равен

$$w_1 = \frac{M^l \sin \frac{\pi x}{\lambda}}{D(k_1^2 + k_2^2)} \left( \frac{\sin k_2 y}{\sin k_2 b} - \frac{\operatorname{sh} k_1 y}{\operatorname{sh} k_1 b} \right). \quad (830)$$

Вследствие симметрии, заменяя  $M^l$  на  $M^r$  и  $y$  на  $b - y$ , можно вывести следующее выражение для  $w_2$ :

$$w_2 = \frac{M^r \sin \frac{\pi x}{\lambda}}{D(k_1^2 + k_2^2)} \left[ \frac{\sin k_2 (b - y)}{\sin k_2 b} - \frac{\operatorname{sh} k_1 (y - b)}{\operatorname{sh} k_1 b} \right], \quad (831)$$

а для полного прогиба  $w$  имеем:

$$\begin{aligned} w = \frac{\sin \frac{\pi x}{\lambda}}{D(k_1^2 + k_2^2)} \left\{ M^r \left[ \frac{\sin k_2 (b - y)}{\sin k_2 b} - \frac{\operatorname{sh} k_1 (y - b)}{\operatorname{sh} k_1 b} \right] + \right. \\ \left. + M^l \left[ \frac{\sin k_2 y}{\sin k_2 b} - \frac{\operatorname{sh} k_1 y}{\operatorname{sh} k_1 b} \right] \right\}. \quad (832) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь две смежные пластинки  $l-1$  и  $l$ , где вообще могут присоединяться также и другие пластинки, как это показано пунктирными линиями на рис. 229, а. Ширину пластинок обозначим соответственно через  $b_i$  и  $b_{i+1}$ , а толщину — через  $t_i$  и  $t_{i+1}$ . На рис. 229, б показаны обе



пластинки в деформированном состоянии под действием краевых моментов  $\bar{M}_{i-1}^r$ ,  $\bar{M}_i^r$ , и  $\bar{M}_i^l$ ,  $\bar{M}_{i+1}^l$ . В связи с тем, что пластинки

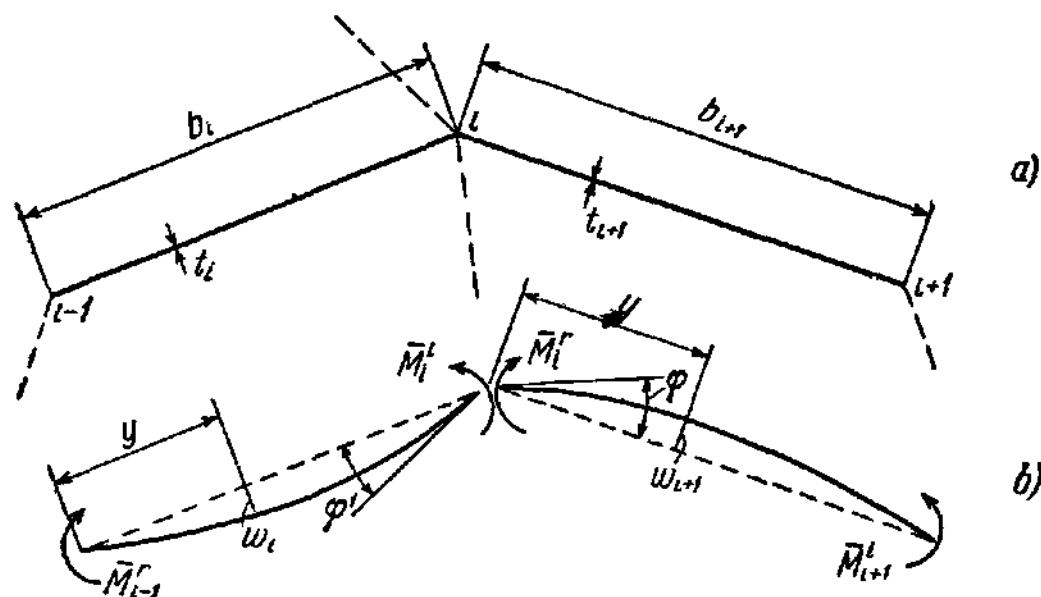


Рис 229.

жестко соединены, оба элемента вращаются на один и тот же угол  $\varphi$ , и условием непрерывности будет (рис. 229, b)

$$\left[ \frac{\partial w_i}{\partial y} \right]_{y=b_i} = \left[ \frac{\partial w_{i+1}}{\partial y} \right]_{y=0}. \quad (833)$$

Используя уравнение (832), для пластинки  $i-1$ ,  $i$  получим:

$$\left[ \frac{\partial w_i}{\partial y} \right]_{y=b} = \frac{\sin \frac{\pi x}{\lambda}}{D_i (k_{1,i}^2 + k_{2,i}^2)} \left[ M_{i-1}^r \left( -\frac{k_{2,i}}{\sin k_{2,i} b_i} + \frac{k_{1,i}}{\sin k_{1,i} b_i} \right) + \right. \\ \left. + M_i^l (k_{2,i} \operatorname{ctg} k_{2,i} b_i - k_{1,i} \operatorname{cth} k_{1,i} b_i) \right], \quad (834)$$

а для пластинки  $i$ ,  $i+1$ :

$$\left[ \frac{\partial w_{i+1}}{\partial y} \right]_{y=0} = \frac{\sin \frac{\pi x}{\lambda}}{D_{i+1} (k_{1,i+1}^2 + k_{2,i+1}^2)} \left[ M_i^r (-k_{2,i+1} \operatorname{ctg} k_{2,i+1} b_{i+1} + \right. \\ \left. + k_{1,i+1} \operatorname{cth} k_{1,i+1} b_{i+1}) + M_{i+1}^l \left( \frac{k_{2,i+1}}{\sin k_{2,i+1} b_{i+1}} - \frac{k_{1,i+1}}{\sin k_{1,i+1} b_{i+1}} \right) \right]. \quad (835)$$

Из уравнений (826) имеем:

$$k_1^2 + k_2^2 = 2 \frac{\pi^2}{\lambda'^2} \mu.$$

Если ввести обозначения  $D_i = \frac{Et_i^3}{12(1-\nu^2)}$  и  $D_{i+1} = \frac{Et_{i+1}^3}{12(1-\nu^2)}$ , то коэффициенты перед скобками в двух вышенаписанных уравнениях

становятся соответственно равными

$$\frac{6(1-\nu^2)\lambda'^2}{\pi^2\mu_i t_i^3} \sin \frac{\pi x}{\lambda}; \quad \frac{6(1-\nu^2)\lambda'^2}{\pi^2\mu_{i+1} t_{i+1}^3} \sin \frac{\pi x}{\lambda}. \quad (836)$$

Величина  $\mu^2$  определяется из уравнения (619), и, подставляя  $n=1$ ,  $a=\lambda$ , а также вышеприведенные значения  $D$ , получаем:

$$\mu_i^2 = 12(1-\nu^2) \frac{\sigma_{кр}}{\tau E t_i^2} \frac{\lambda^2}{\pi^2}; \quad \mu_{i+1}^2 = 12(1-\nu^2) \frac{\sigma_{кр}}{\tau E t_{i+1}^2} \frac{\lambda^2}{\pi^2}.$$

Принимая во внимание, что  $\sigma_{кр}/\tau$  имеет одно и то же значение для всех пластинок конструкции, можно установить следующее соотношение:

$$\mu_i t_i = \mu_{i+1} t_{i+1}. \quad (837)$$

Следовательно, два выражения (836) будут

$$\frac{6(1-\nu^2)\lambda'^2}{\pi^2\mu_i t_i} \frac{\sin \frac{\pi x}{\lambda}}{t_i^2}; \quad \frac{6(1-\nu^2)\lambda'^2}{\pi^2\mu_i t_i} \frac{\sin \frac{\pi x}{\lambda}}{t_{i+1}^2}.$$

Подставляя выражения (834) и (835) в уравнение (833) и деля его на

$$\frac{6(1-\nu^2)\lambda'^2}{\pi^2\mu_i t_i} \sin \frac{\pi x}{\lambda},$$

получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{t_i^2 b_i} (M_{i-1}^r \Psi_i + M_i^l \Phi_i) + \frac{1}{t_{i+1}^2 b_{i+1}} (M_i^r \Phi_{i+1} + M_{i+1}^l \Psi_{i+1}) = 0, \quad (838)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= -\frac{k_2 b}{\sin k_2 b} + \frac{k_1 b}{\operatorname{sh} k_1 b}, \\ \Phi &= k_2 b \operatorname{ctg} k_2 b - k_1 b \operatorname{cth} k_1 b. \end{aligned} \right\} \quad (839)$$

Величина  $\sqrt{\tau}$  не встречается в уравнении (838), которое, следовательно, применимо в упругой и неупругой областях выпучивания. Это является важным фактом, так как позволяет использовать заранее вычисленные таблицы коэффициентов  $\Psi$  и  $\Phi$ , которые употребляются независимо от того обстоятельства, что полученное в результате критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  лежит выше или ниже предела пропорциональности. Уравнение (838) представляет собой соотношение между четырьмя моментами в продольных краях двух смежных пластинок и названо уравнением четырех моментов задачи устойчивости пластинчатых конструкций.

При выводе уравнения (838) предполагалось, что на краю  $i$  соединяются также и другие пластинки. Если это обстоятельство не имеет места, то  $M_i^l = M_i^r = M_i$ , и это уравнение переходит в уравнение трех моментов.

В случае, если пластинка  $i, i+1$  жестко защемлена на краю  $i$ , можно предполагать, что это обусловлено бесконечно жесткой панелью  $i-1, i$ , находящейся слева от  $i$ . В этом случае уравнение четырех моментов (838) для пластинки  $i, i+1$  переходит в уравнение двух моментов:

$$M_i^r \Phi_{i+1} + M_{i+1}^l \Psi_{i+1} = 0.$$

**Условие устойчивости.** Рассмотрим трубчатую конструкцию, поперечное сечение которой представляет собой замкнутый контур из  $n$  пластинок так, как это показано на рис. 230. Для каждого края, на котором соединяются две пластинки, можно вывести уравнение четырех моментов (838), и в итоге получить  $n$  уравнений, определяющих  $n$  неизвестных моментов. Разбивая контур пластинок на два контура путем добавления пластинки (см. пунктирную линию на рис. 230), получим два дополнительных неизвестных момента, а также два независимых уравнения четырех моментов. Повторяя этот процесс, можно получить все виды ячеистых конструкций, представляющих собой двойные или тройные днища. Однако число уравнений четырех моментов всегда останется равным числу неизвестных краевых моментов.

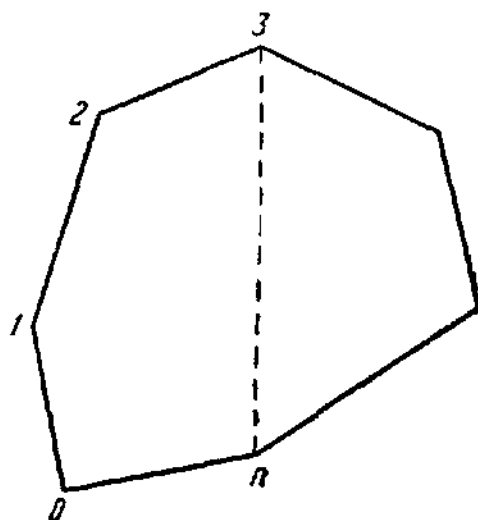


Рис. 230.

При составлении уравнений четырех моментов все краевые моменты можно считать положительными<sup>1)</sup>, за исключением тех, которые соответствуют общим для двух ячеек пластинкам. Для этих пластинок моменты считаются положительными на одном конце и отрицательными на другом. В последнем случае необходимо внести поправки в знаки уравнения (838).

Уравнения четырех моментов образуют полную систему линейных, однородных уравнений относительно неизвестных моментов; ненулевые решения возможны только тогда, когда детерминант  $\Delta$ , составленный из коэффициентов этих уравнений, равен нулю ( $\Delta = 0$ ). Условие устойчивости зависит от  $n$  отношений  $\alpha'_i = \lambda'/b_i$  и от  $n$  коэффициентов  $\mu_i$ . Если рассматривать одну пластинку как основную, то можно выразить отношения  $\alpha'_i$  и коэффициенты  $\mu_i$  через значения  $\alpha$  и  $\mu$  этой пластинки, а именно  $\alpha'_i = \alpha' b/b_i$ , и на основе уравнения (837) получить  $\mu_i = \mu t/t_i$ , где значения  $b$  и  $t$  являются параметрами основной пластинки. Следовательно, условие устойчивости

<sup>1)</sup> Положительными считаются те моменты, которые стремятся изгибать пластинку внутри контура.

является функцией только двух независимых переменных  $\alpha'$  и  $\mu$ . Предполагая значение  $\alpha'$  заданным, можно вычислить из трансцендентного уравнения устойчивости численными методами параметр  $\mu$ .

Таким образом, можно определить несколько значений  $\mu$  и рассчитывать соответствующие значения  $k$  из соотношения<sup>1)</sup>

$$k = \frac{\mu^2 b^3}{\lambda'^2} = \frac{\mu^2}{\alpha'^2}. \quad (840)$$

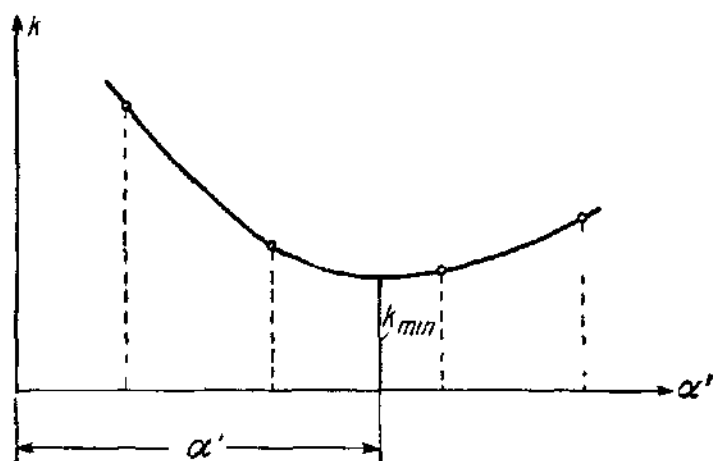


Рис. 231.

Эти значения  $k$  можно представить в зависимости от  $\alpha'$  и определить минимальное значение  $k_{\min}$  и соответствующее значение  $\alpha'$  (рис. 231). В результате

критическое напряжение  $\sigma_{кр}$ , при котором вся конструкция выпучивается, дается следующим уравнением:

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sqrt{\tau}} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k_{\min}, \quad (841)$$

где  $b$  и  $t$  являются размерами пластинки, к которой относится выбранный независимый параметр  $\mu$ .

Коэффициенты  $\Psi$  и  $\Phi$  в уравнении (838) являются функциями от  $\alpha' = \lambda'/b$  и  $\mu$ . Типичные кривые значений  $\Psi$  и  $\Phi$  для  $\alpha = 0,5$  показаны на рис. 232. Полная кривая имеет бесконечное число особенностей, разделяющих каждую из двух кривых на отдельные ветви. Для облегчения применения данного метода целесообразно иметь табулированные значения функций  $\Psi(\mu)$  и  $\Phi(\mu)$  для различных значений  $\alpha$ . Однако такие таблицы не очень удобны для пользования в связи с трудностями интерполирования тех значений  $\mu$ , для которых  $\Psi$  и  $\Phi$  становятся бесконечными. Это затруднение можно преодолеть, табулируя также значения обратных функций  $1/\Psi$  и  $1/\Phi$ , которые выражены гладкими кривыми<sup>2)</sup>.

В случае двойного и тройного днища кораблей с равноотстоящими вертикальными пластинками метод уравнения четырех моментов дает два или в некоторых случаях три линейных уравнения, детерминант которых можно легко вычислить. Этот способ можно объяснить на нескольких простых задачах.

**Задача 1.** Определить критическое напряжение прямоугольной трубы с длинами сторон соответственно  $b_1$  и  $b_2$  и толщиной  $t_1$  и  $t_2$

<sup>1)</sup> Это соотношение получается при сравнении уравнений (621) и (841).

<sup>2)</sup> Такие таблицы рассчитаны автором книги, однако они не включены в эту книгу.

(рис. 233, а). Вследствие существующей симметрии моменты  $M$  на четырех краях идентичны, и достаточно одного уравнения четырех

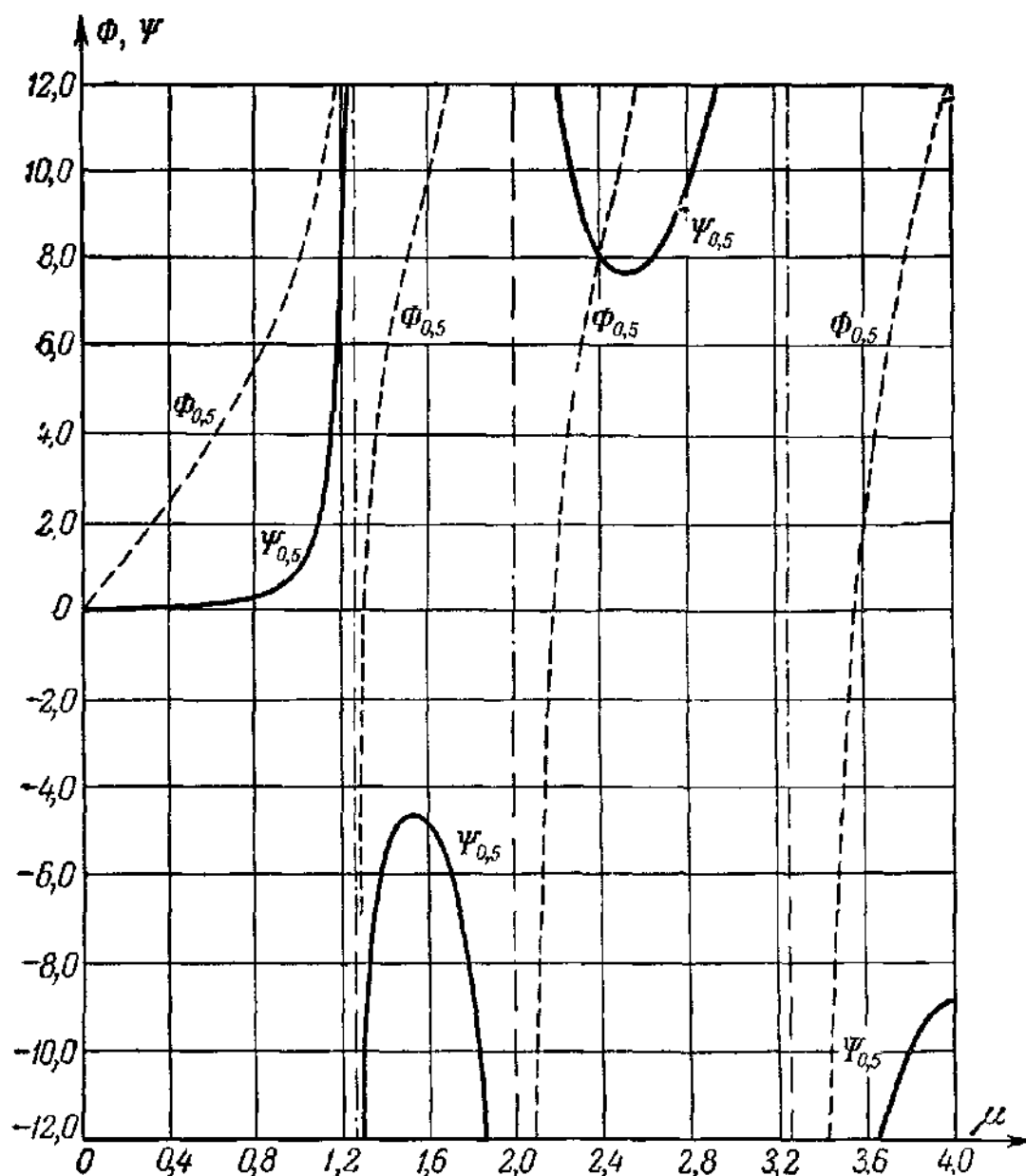


Рис. 232.

моментов для определения коэффициента устойчивости  $k_{\min}$  в уравнении (841). Рассматривая пластинки 1, 2 и 2, 3, соединяющиеся на краю 2 (рис. 233, б), получим уравнение (838) в виде

$$\frac{1}{t_1^2 b_1} (M_1 \Psi_1 + M_2 \Phi_2) + \frac{1}{t_2^2 b_2} (M_2 \Phi_2 + M_3 \Psi_3) = 0,$$

и, так как  $M_1 = M_2 = M_3$ , условие устойчивости будет

$$\frac{\Psi_1 + \Phi_1}{t_1^2 b_1} + \frac{\Phi_2 + \Psi_2}{t_2^2 b_2} = 0.$$

Это уравнение решено методом проб при помощи вышеупомянутых таблиц для  $b_2/b_1 = 0,5$  и  $0,833$  и для отношений толщины  $t_2/t_1 = 1$  и  $2$ .

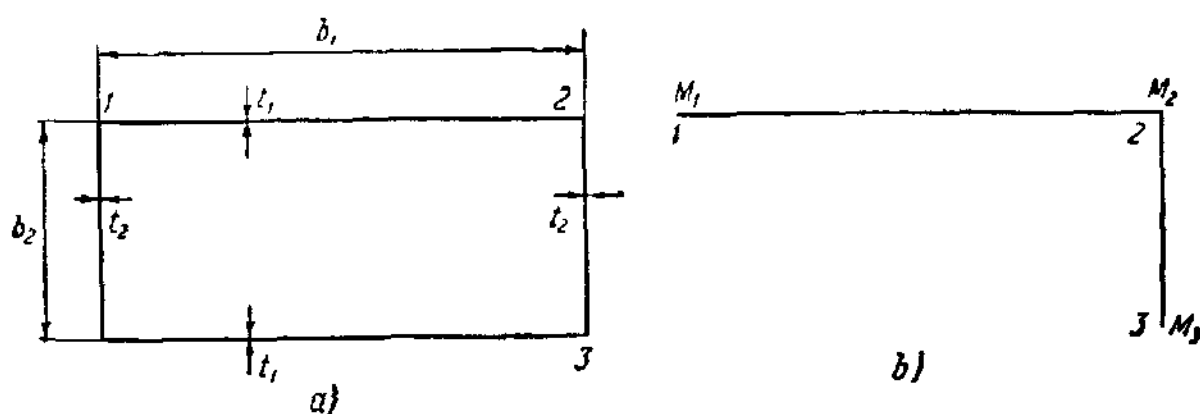


Рис. 233.

Результаты показаны в таблице 45. Для сравнения в таблице в скобках приведены значения  $k$ , определенные из кривых (рис. 169)

Таблица 45. Значения коэффициента устойчивости  $k_{\min}$  для коробчатых сечений (рис. 233, а)

$b_2/b_1$	$t_2/t_1 = 1$	$t_2/t_1 = 2$
0,5	5,15 (5,13)	6,51 (6,51)
0,833	4,56 (4,56)	4,51 (4,51)

значений  $k$ , построенных Лундквистом. Значения  $k$ , данные в таблице 45, необходимо использовать в уравнении (841) в соответствии с отношением  $b/t = b_1/t_1$ .

**Задача 2.** Неразрезная пластинка с пролетами различной длины (рис. 234). Рассмотрим панель пластинки шириной  $b_2$ , соединенной на обеих сторонах с более узкими пластинками шириной  $b_1$ .

Толщина пластинки  $t$  одинакова для всех панелей. Форма выпучивания показана на рис. 234, а, из которого можно без значительной

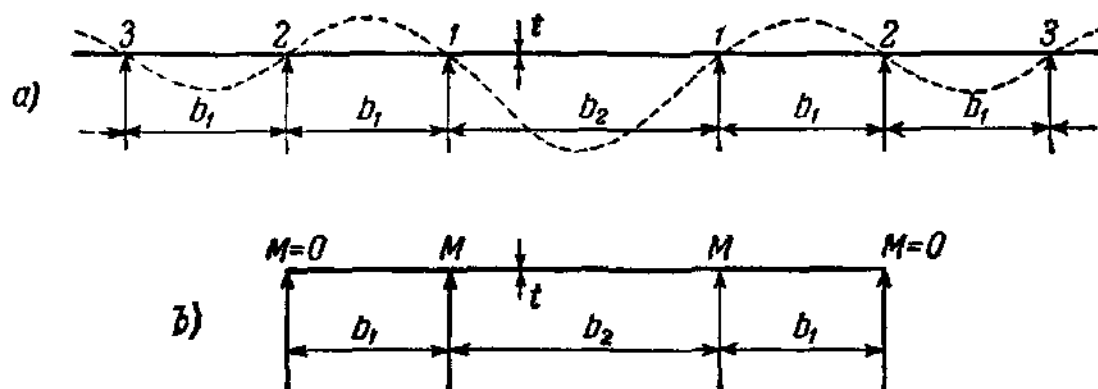


Рис. 234.

ошибки заключить, что точки перегиба лежат очень близко к опорам 2. Следовательно, можно получить приближенное решение, если предположить, что пластинки шарнирно оперты в опорах 2. Если взять только три панели со свободно опертыми краями на обоих концах

(рис. 234, б), то задачу можно решить при помощи одного уравнения четырех моментов. Вследствие симметрии и учитывая, что  $M_2 = 0$  на концах, получим:

$$\frac{1}{t_1^2 b_1} M_1 \Phi_1 + \frac{1}{t_2^2 b_2} (M_1 \Phi_2 + M_1 \Psi_2) = 0.$$

В результате условие устойчивости будет

$$\frac{\Phi_1}{t_1^2 b_1} + \frac{\Phi_2 + \Psi_2}{t_2^2 b} = 0.$$

Это уравнение решено для различных значений  $b_2/b_1$  между 0,5 и 2. На рис. 235 значения  $k$  нанесены в зависимости от отношения  $b_2/b_1$ .

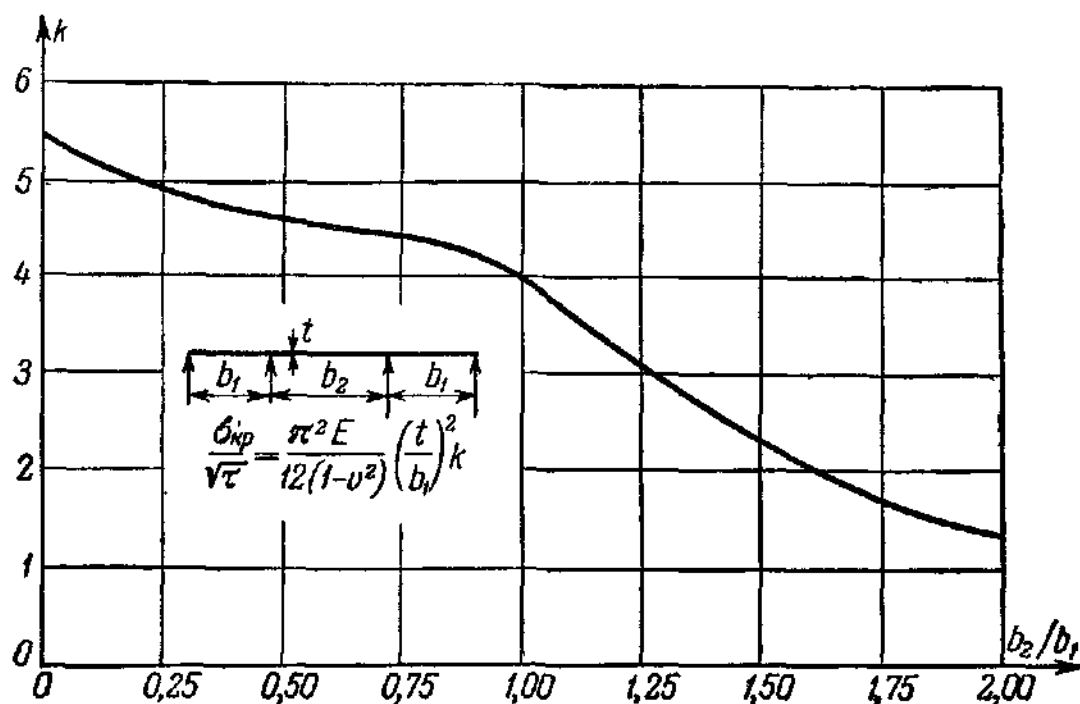


Рис. 235.

**Задача 3.** Двойное днище, показанное на рис. 236, а. Предположим, что днище безгранично простирается в обе стороны. Вследствие геометрической симметрии и симметрии нагружения отдельных ячеек достаточно двух уравнений четырех моментов для решения задачи. Обозначая крайевые моменты внутреннего днища и обшивки корпуса соответственно через  $M_1$  и  $M_2$ , крайевые моменты вертикальных пластинок можно получить непосредственно из условий равновесия краев, где соединяются пластинки. Нет необходимости более детально объяснять рис. 236, б. Рассмотрим одну ячейку конструкции, составленную из четырех пластинок. Пронумеруем края 1, 2, 3, 4 слева направо, если смотреть изнутри

ячейки. В соответствии с числом пластинок, составляющих ячейку, можно было бы написать четыре уравнения четырех моментов, однако

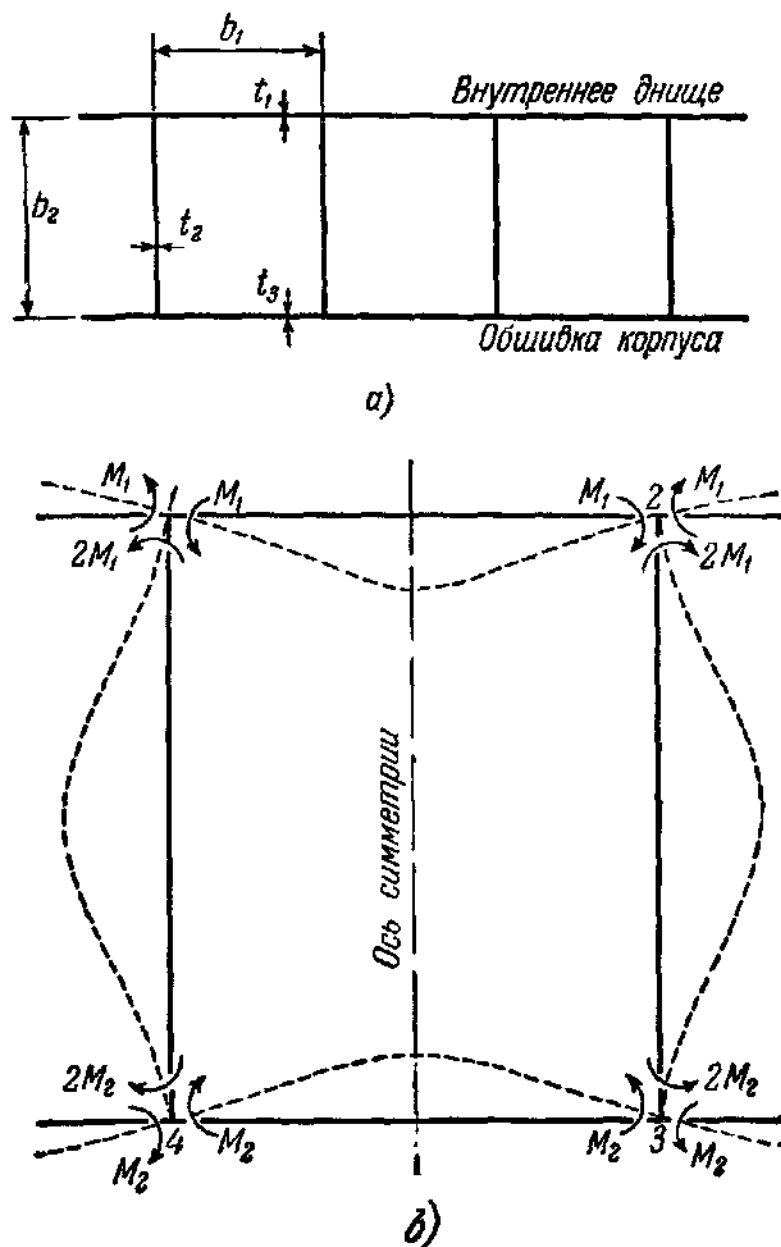


Рис. 236.

вследствие симметрии требуются только два уравнения, а именно: пластинки 1, 2 и 2, 3:

$$\frac{1}{t_1^2 b} M_1 (\Psi_1 + \Phi_1) + \frac{1}{t_2^2 b_2} (2M_1 \Phi_2 + 2M_2 \Psi_2) = 0;$$

пластинки 2, 3 и 3, 4:

$$\frac{1}{t_2^2 b_2} (2M_1 \Psi_2 + 2M_2 \Phi_2) + \frac{1}{t_3^2 b_1} (M_2 \Phi_3 + M_2 \Psi_3) = 0.$$

Преобразуя эти два уравнения, получим:

$$[c_1 (\Psi_1 + \Phi_1) + 2c_2 \Phi_2] M_1 + 2c_2 \Psi_2 M_2 = 0;$$

$$2c_2 \Psi_2 M_1 + [2c_2 \Phi_2 + c_3 (\Phi_3 + \Psi_3)] M_2 = 0,$$



где использованы следующие обозначения:

$$c_1 = \frac{1}{t_1^2 b_1}; \quad c_2 = \frac{1}{t_2^2 b_2}; \quad c_3 = \frac{1}{t_3^2 b_1}.$$

Детерминант вышенаписанной системы представляет собой условие устойчивости

$$[c_1(\Psi_1 + \Phi_1) + 2c_2\Phi_2][2c_2\Phi_2 + c_3(\Phi_3 + \Psi_3)] - 4c_2^2\Psi_2^2 = 0.$$

### 119. Влияние соединений внахлестку на устойчивость пластинок

Характерной особенностью конструкции кораблей является применение соединений внахлестку между опорами панели пластинки так, как это показано на рис. 237. Очевидно, соединения внахлестку

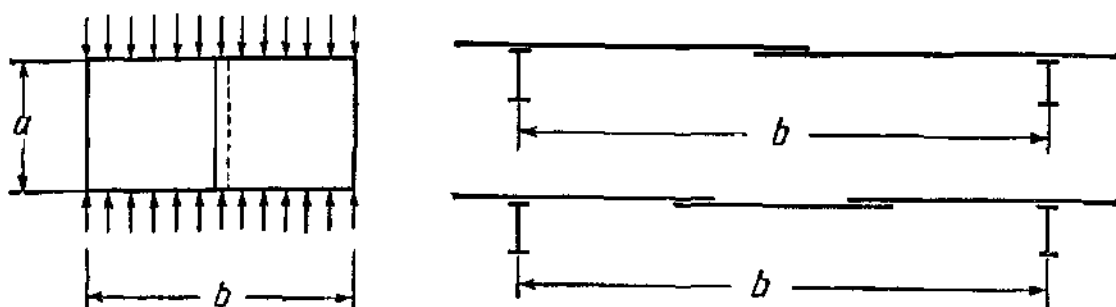


Рис. 237.

подкрепляют пластинку, и полученный в результате эффект является довольно значительным. Пластины, соединенные внакладку, были исследованы Шнаделем<sup>1)</sup>, который использовал энергетический метод для решения задач устойчивости таких пластинок при сжатии. Теория продольно подкрепленных пластинок, изложенная в главе X, дает возможность сравнительно простым способом решить задачу о пластинках с такими соединениями. В дальнейшем рассмотрим случаи с одним швом в середине пластинки, с двумя швами, расположенными на одну треть расстояния от опор пластинки, и с одним эксцентрично расположенным швом на одной трети расстояния от опор.

Пластины с одним швом внахлестку, расположенным по середине пластинки. В § 98 рассматривались пластины, имеющие одно ребро жесткости, расположенное по середине. Условие устойчивости в случае симметричного выпучивания, когда ребро жесткости изгибается вместе с пластинкой [уравнение (685)] при  $n=1$ , будет

$$\left( \frac{1}{k_1} \operatorname{th} \frac{k_1 b}{2} - \frac{1}{k_2} \operatorname{tg} \frac{k_2 b}{2} \right) \Phi' - 2(k_1^2 + k_2^2) = 0, \quad (842)$$

<sup>1)</sup> Schnadel G., Knickung von Schiffsplatten, Werft—Reederei—Hafen, 1930, стр 461.

где

$$k_1 b = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\mu + 1}; \quad k_2 b = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\mu - 1}; \quad (843)$$

$$\Phi' = \frac{\gamma}{b^3} \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^4 - \delta \frac{\sigma_{кр} t}{D b \tau} \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2; \quad (844)$$

$$\gamma = \frac{EJ}{bD}; \quad \delta = \frac{A}{bt}. \quad (845)$$

При  $n=1$  и  $a=ab$  из уравнения (621) имеем:

$$\sigma_{кр} = \frac{1}{b^2} \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{D\tau}{t} \mu^2. \quad (846)$$

Подставляя это значение в уравнение (844), получим:

$$\Phi' = \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^4 \frac{1}{b^3} (\gamma - \mu^2 \delta) = \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^4 \frac{1}{b^3} \Phi, \quad (847)$$

где  $\Phi = \gamma - \mu^2 \delta$ . Используя уравнения (843) и (847), можно условие устойчивости (842) написать в следующем виде:

$$\left( \frac{1}{\sqrt{\mu+1}} \operatorname{th} \frac{\pi}{2\alpha} \sqrt{\mu+1} - \frac{1}{\sqrt{\mu-1}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\alpha} \sqrt{\mu-1} \right) \Phi - \frac{4\mu\alpha}{\pi} = 0. \quad (848)$$

При любом заданном значении  $\Phi$ , выражающем относительную жесткость ребра сравнительно с изгибной жесткостью пластинки, уравнение (848) можно решать относительно  $\mu$ . Однако более целесообразно выразить значение  $\Phi$  в функции от  $\mu$ , а именно:

$$\Phi = \frac{\frac{4\mu\alpha}{\pi}}{\frac{1}{\sqrt{\mu+1}} \operatorname{th} \frac{\pi}{2\alpha} \sqrt{\mu+1} - \frac{1}{\sqrt{\mu-1}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\alpha} \sqrt{\mu-1}}. \quad (849)$$

На рис. 238 значения  $\Phi$  нанесены в зависимости от  $\mu$  для отношений  $\alpha=0,5$ ;  $0,75$  и  $1,0$ . Эти кривые можно использовать для определения значения  $\mu$  при любом заданном значении  $\Phi$ . Коэффициент устойчивости подкрепленной пластинки  $k_s$  зависит от  $\mu$ :

$$k_s = \frac{\mu^2}{\alpha^2}, \quad (850)$$

и критическое напряжение подкрепленной пластинки можно определить из следующей формулы:

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sqrt{\tau}} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 k_s. \quad (851)$$

При определении правильного значения момента инерции  $J$ , которое должно быть подставлено в уравнение (845) для  $\gamma$ , возникают некоторые затруднения. Нет сомнения в том, что определенная

часть пластинки, смежная с швом внахлестку, повышает изгибное сопротивление шва. Следовательно, заключаем, что часть ширины  $b_e$

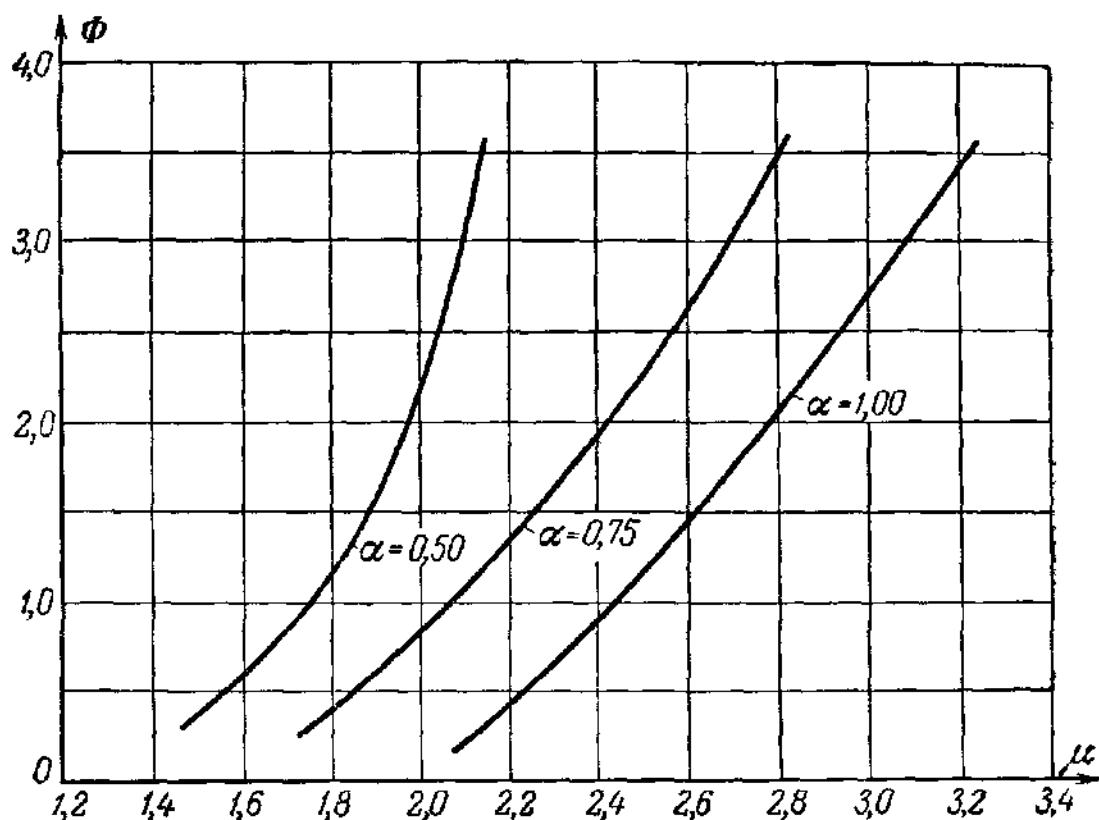


Рис. 238.

должна быть эффективной (рис. 239). На этом рисунке показано ребро жесткости, состоящее из двух полос пластинки ширины  $b_1$ . Вычисляя момент инерции относительно оси  $\xi - \xi$ , получаем  $J = b_1 \frac{(2t)^3}{12}$  и

$$\gamma = \frac{EJ}{bD} = 8 \frac{b_1}{b} (1 - \nu^2). \quad (852)$$

Прежде всего эффективная ширина  $b_e$  зависит от величины пролета  $a$  пластинки. Этот факт был доказан в результате теоретического исследования пластинок, подкрепленных ребром в середине и ведущих себя как простые балки длиной  $a$  (рис. 240). В особом случае синусоидального прогиба, который фактически имеет место в выпученной пластинке, установлено, что эффективная ширина составляет  $b_e = 0,363a$ , если ширина  $b$  пластинки бесконечна<sup>1)</sup>. Это значение уменьшается весьма незначительно при условии, если значение  $b$

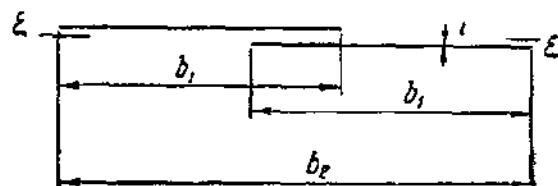


Рис. 239.

<sup>1)</sup> Chwalla E., Die Formeln zur Berechnung der «voll mitragenden Breite» dünner Gurt und Rippenplatten, Der Stahlbau, т. 9, стр. 73, 1936.

ограничено и примерно равно  $a$ . В связи с тем, что длинные пластинки выпучиваются по полуволнам длиной  $b$ , значение эффективной ширины  $b_e$  в таких случаях можно считать несколько меньшим  $0,363b$ . Для окончательного установления значения  $b_1$  с достаточным запасом по отношению к рассмотренным выше пределам возьмем  $b_1 = 0,25a$  или  $b_1 = 0,25b$  в зависимости от того, какое из

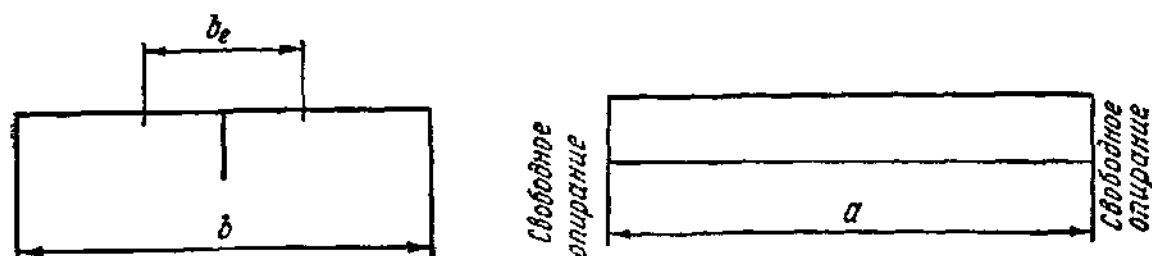


Рис. 240.

них меньше. Подставляя эти значения в уравнение (852) и полагая  $\gamma = 0,3$ , получим следующее простое соотношение:

$$\gamma = 1,8\alpha < 1,8.$$

Для того чтобы получить значение  $\Phi = \gamma - \delta\mu^2$ , нужно из  $\gamma$  вычесть член  $\delta\mu^2$ . Сравнительные расчеты показывают, что в практических случаях значение  $\delta\mu^2$  не превосходит  $\gamma/3$ . В целях упрощения предположим  $\delta\mu^2 = \gamma/3$ , что в результате дает малое и заниженное значение для  $\Phi$ . Рассуждая таким образом, в результате получим:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= 1,2 & \text{при } \alpha > 1; \\ \Phi &= 1,2\alpha & \text{при } \alpha < 1. \end{aligned} \right\} \quad (853)$$

Значение  $\Phi$  не зависит от отношения  $b/t$ .

Кривые, изображенные на рис. 238, для  $\Phi = 1,2\alpha$  дают значения коэффициента устойчивости  $k_s$ , приведенные в таблице 46. Эти значения можно сопоставить со значениями  $k$  для неподкрепленной пластинки, данными в последней строке этой таблицы.

Т а б л и ц а 46. Значения коэффициента устойчивости  $k_s$  в уравнении (851) для пластинок со швами внахлестку по середине (рис. 237)

$\alpha = a/b$	0,5	0,75	1,0
Пластинка со швом: $k_s$	10,21	7,33	6,33
Неподкрепленная пластинка: $k$ . . . . .	6,25	4,34	4,00

Пластинки с двумя швами внахлестку на расстоянии одной трети пролета. Условие устойчивости для симметричного выпучива-

ния в случае, когда два ребра жесткости изгибаются вместе с пластинкой, имеет следующий вид<sup>1)</sup>:

$$3 \left( \frac{\pi}{3a} \right)^4 \Phi \left[ \frac{\operatorname{sh} \bar{k}_1}{\bar{k}_1 (2 \operatorname{ch} \bar{k}_1 - 1)} - \frac{\sin \bar{k}_2}{\bar{k}_2 (2 \cos \bar{k}_2 - 1)} \right] - (\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2) = 0, \quad (854)$$

где

$$\bar{k}_1 = \frac{\pi}{3a} \sqrt{\mu + 1}; \quad \bar{k}_2 = \frac{\pi}{3a} \sqrt{\mu - 1}; \quad (855)$$

$$\Phi = \gamma - \delta \mu^2. \quad (856)$$

Вводя выражение  $\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2 = \left( \frac{\pi}{3a} \right)^2 2\mu$  в уравнение (854), получим следующую формулу для  $\Phi$ :

$$\Phi = \frac{(3a/\pi)^2 (2\mu/3)}{\frac{\operatorname{sh} \bar{k}_1}{\bar{k}_1 (\operatorname{ch} \bar{k}_1 - 1)} - \frac{\sin \bar{k}_2}{\bar{k}_2 (\cos \bar{k}_2 - 1)}}. \quad (857)$$

На основе этого уравнения построены кривые, показанные на рис. 241, где значения  $\Phi$  нанесены в зависимости от величины  $\mu$  для значений  $\alpha = 0,5$ ; 0,75 и 1,00.

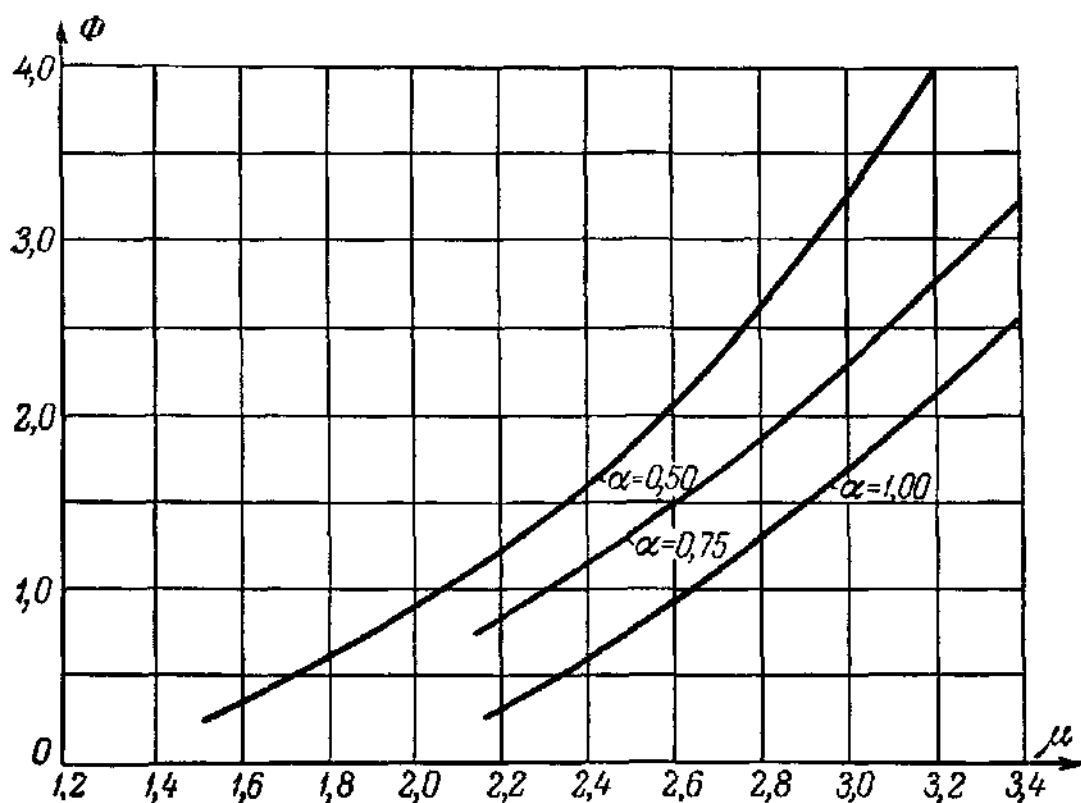


Рис. 241.

Используя уравнения (850) и (853), применимые также и в данном случае, можно из кривых рис. 241 определить значения

<sup>1)</sup> Barbré R., Beulspannungen in Rechteckplatten mit Längssteifen bei gleichmässiger Druckbeanspruchung, Der Bauingenieur, т. 17, стр. 268, 1936.

коэффициента устойчивости  $k_s$ . Для сравнения даны также значения  $k$  для неподкрепленной пластинки.

Таблица 47. Значения коэффициента устойчивости  $k_s$  в уравнении (851) для пластинок с двумя швами внахлестку на расстоянии одной трети пролета

$\alpha = a/b$	0,5	0,75	1,00
Пластинка со швом: $k_s$	13,10	9,06	7,57
Неподкрепленная пластинка: $k$ . . . . .	6,25	4,34	4,00

Пластинки с одним швом внахлестку на расстоянии одной трети пролета. В данном случае применимо условие устойчивости

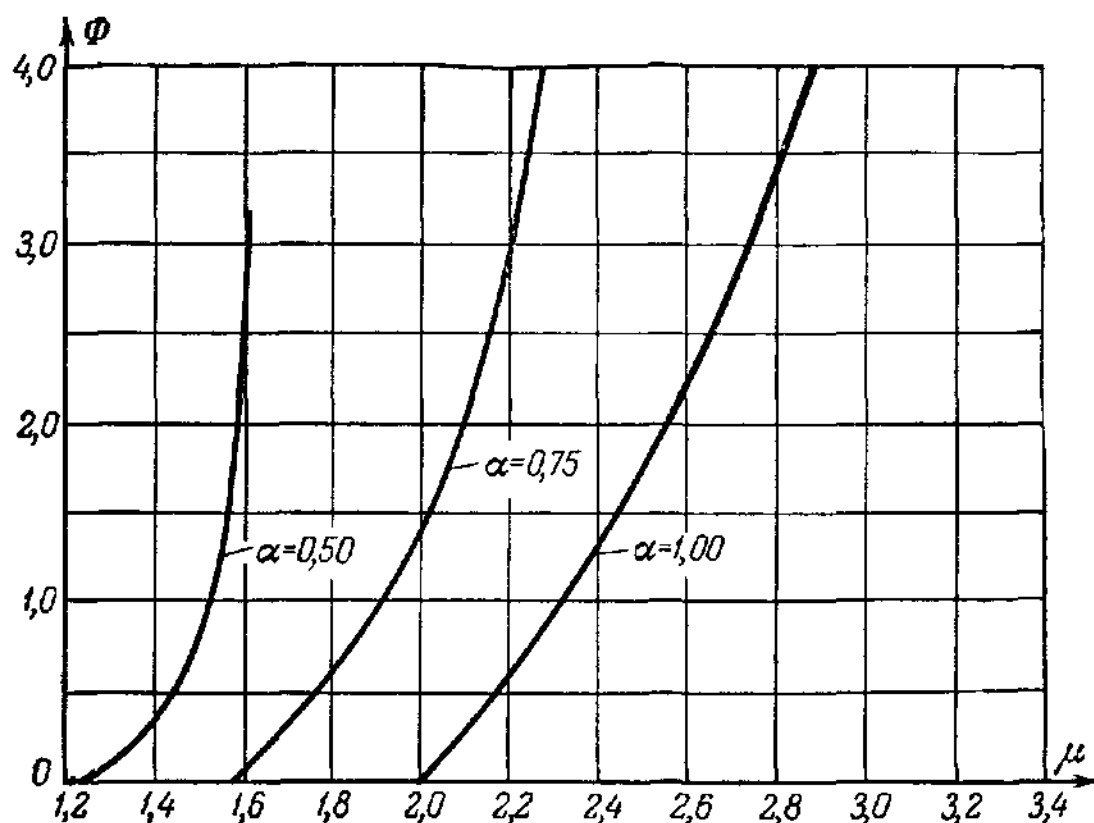


Рис. 242.

(703), выведенное в § 100, которое при  $r=3$  и  $n=1$  принимает следующий вид:

$$27\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 (\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2) - \Phi \left( \frac{\operatorname{sh} \bar{k}_1 \operatorname{sh} 2\bar{k}_1}{\bar{k}_1 \operatorname{sh} 3\bar{k}_1} - \frac{\sin \bar{k}_2 \sin 2\bar{k}_2}{\bar{k}_2 \sin 3\bar{k}_2} \right) = 0, \quad (858)$$

где

$$\bar{k}_1 = \frac{\pi}{3\alpha} \sqrt{\mu + 1}; \quad \bar{k}_2 = \frac{\pi}{3\alpha} \sqrt{\mu - 1}; \quad (859)$$

$$\Phi = \gamma - \delta\mu^2. \quad (860)$$

Решая уравнение (858) относительно  $\Phi$ , получим:

$$\Phi = \frac{6\mu (a/\pi)^3}{\frac{\operatorname{sh} \bar{k}_1 \operatorname{sh} 2\bar{k}_1}{\bar{k}_1 \operatorname{sh} 3\bar{k}_1} - \frac{\sin \bar{k}_2 \sin 2\bar{k}_2}{\bar{k}_2 \sin 3\bar{k}_2}}. \quad (861)$$

На рис. 242 приведены значения  $\Phi$  в функции от  $\mu$  для  $\alpha = 0,5$ ; 0,75 и 1,00. На основе уравнений (850) и (853) и кривых на рис. 242 определим значения коэффициента устойчивости  $k_s$ , приведенное в таблице 48.

Т а б л и ц а 48. Значения коэффициента устойчивости  $k_s$  в уравнении (851) для пластинок с одним швом внахлестку на расстоянии одной трети от пролета

$a = a/b$	0,5	0,75	1,00
Пластинка со швом: $k_s$	8,60	6,30	5,63
Неподкрепленная пластинка: $k$ . . . . .	6,25	4,34	4,00

## 120. Предельная прочность прямоугольных пластинок под действием сжатия и нормального давления. Введение

В главе I было показано, что действительная разрушающая нагрузка сжатого стержня практически совпадает с критической нагрузкой, при которой идеально прямой сжатый стержень начинает изгибаться. Исследование послекритического поведения сжатого стержня показывает, что после достижения выпучивающей нагрузки сжатый стержень не имеет заметного запаса прочности и достаточно незначительного приращения этой нагрузки, чтобы вызвать такое перемещение, при котором происходит внезапное разрушение сжатого стержня — явление выпучивания сжатого стержня.

При достижении критической нагрузки пластинка начинает выпучиваться, но скорость увеличения прогибов уменьшается, если нагрузка растет за пределы этой критической нагрузки. В том случае, когда приложенная нагрузка превышает критическую, опертые края, параллельные направлению действующей нагрузки, сообщают пластинке дополнительную прочность, которая обнаруживается при выпучивании центральной части пластинки. Таким образом происходит перераспределение напряжений, которое вместе с появлением уравновешивающих мембранных напряжений, позволяет пластинке снова приобрести устойчивость в искривленном состоянии. В результате под действием монотонно возрастающей нагрузки в наиболее напряженных частях пластинки появляется текучесть, причем достигается не критическая нагрузка, а предельная нагрузка пластинки.

Разница между критической и предельной нагрузками увеличивается по мере уменьшения критического напряжения  $\sigma_{кр}$  и становится значительной, когда значение  $\sigma_{кр}$  лежит ниже предела пропорциональности. С другой стороны, эта разность стремится к нулю, когда значение  $\sigma_{кр}$  приближается к пределу текучести. Для очень гибких пластинок, как, например, используемых в подкрепленных панелях авиационных конструкций, разрушающее напряжение может в тридцать раз превзойти критическое. В строительных и корабельных конструкциях увеличение действительной несущей способности менее существенно, так как гибкость  $b/t$  редко достигает значения 100. Следовательно, предельное напряжение меньше удвоенного значения критического напряжения.

Для того чтобы получить представление о послекритическом поведении тонкой плоской пластинки, необходимо знать, что происходит в пластинке, деформированное состояние которой характеризуется прогибами, сравнимыми с толщиной пластинки, но меньшими, чем ее ширина. При выводе линейного дифференциального уравнения (599) в главе IX предполагалось, что значения сжимающих напряжений, действующих в плоскости пластинки, не меняются при изгибе пластинки, отсюда в данном уравнении напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  постоянны. В случае появления больших прогибов такое предположение недопустимо. Мембранный эффект незначителен при малых поперечных прогибах, но становится все более существенным, когда под действием возрастающей нагрузки прогиб пластинки постепенно увеличивается. Этот мембранный эффект вызван растяжением срединной поверхности вследствие кривизны пластинки и характеризуется появлением мембранных напряжений, необходимых для равновесия и выполнения условий совместности деформаций на краях. Эти мембранные напряжения изменяются вдоль поверхности пластинки, но подобно напряжениям, первоначально вызванным приложенной нагрузкой, не меняются в направлении, перпендикулярном к плоскости пластинки. Волокна пластинки ведут себя так, как будто они закреплены на опертых краях, а в некоторых частях пластинки растягивающие напряжения, вызванные удлинением искривленных волокон, препятствуют увеличению прогиба, обусловленного сжимающей нагрузкой. Таким образом, мембранные напряжения оказывают уравновешивающее влияние на пластинку.

В предыдущих главах исследование задач о выпучивании пластинок основывалось на линейном дифференциальном уравнении, выведенном при условии малых прогибов пластинки по сравнению с ее толщиной. Следовательно, решение этого дифференциального уравнения применимо только к начальному состоянию выпучивания, когда имеется бесконечно малое перемещение пластинки и, следовательно, дает только значение критической нагрузки, при которой упругое равновесие пластинки становится неустойчивым. Совершенно очевидно, что при исследовании послекритического поведения пла-



стинки становится невозможным применение линейной теории пластинок, так как в этом случае рассматриваются конечные прогибы, имеющие величины порядка толщины пластинки. В этом случае мы имеем дело с нелинейной задачей о напряжениях, для решения которой необходима совершенно другая теория.

Нелинейность дифференциального уравнения в случае больших прогибов обуславливается взаимодействием между мембранными напряжениями и кривизной пластинки, которое дает нелинейные члены в уравнениях равновесия элемента пластинки.

Фёппль<sup>1)</sup> впервые разработал теорию больших прогибов тонких пластинок, предположив, что изгибные напряжения малы по сравнению с мембранными и, следовательно, вполне пренебрежимы. Полная система дифференциальных уравнений задачи была сформулирована Карманом<sup>2)</sup>, который добавил члены, зависящие от изгибной жесткости пластинки. Тимошенко<sup>3)</sup>, Маргерр и Треффц<sup>4)</sup> вывели выражения для энергии деформации пластинок при больших прогибах.

Первая работа в области исследования больших прогибов сжатых прямоугольных пластинок, находящихся в послекритическом состоянии, принадлежит Шнаделю<sup>5)</sup>, который дал приближенное решение для свободно опертой пластинки, нагруженной вдоль двух противоположных сторон. Используя энергетический метод, он допустил, что форма изогнутой поверхности пластинки в послекритическом состоянии та же, что и в момент начала выпучивания. Он усовершенствовал свой метод, учитывая влияние упругой заделки против кручения вдоль ненагруженных краев, и показал, как можно улучшить результаты, используя два члена в выражении для прогибов. Результаты, полученные Шнаделем, были подтверждены последующими исследователями.

На основе энергетического метода, используя ту же форму изогнутой поверхности пластинки, что и Шнадель, Тимошенко<sup>3)</sup> дал другое приближенное решение задачи о свободно опертой пластинке, сжатой в одном направлении в своей плоскости. В своем исследовании функцию перемещения, определяющую перемещения  $u$  и  $v$

---

<sup>1)</sup> Föppl A., Vorlesungen über technische Mechanik, т. 5, стр. 132, Leipzig, 1907.

<sup>2)</sup> Von Kármán T., Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, т. 15/4, стр. 349, 1910.

<sup>3)</sup> Timoshenko S., Theory of Elastic Stability, стр. 390, Mc Graw — Hill Book Company, Inc., New York, 1936; русский перевод: Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, 1955.

<sup>4)</sup> Marguerre K., Trefftz E., Über die Tragfähigkeit eines längsbelasteten Plattenstreifens nach Überschreiben der Beullast, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. 17, стр. 85, 1937.

<sup>5)</sup> Schnadel G., Die Überschreitung der Knickgrenze bei dünnen Platten, Proc. 3d Intern. Congr. Applied Mechanics, Stockholm, 1930, стр. 73; Knickung von Schiffsplatten, Werft — Reederei — Hafen, 1930, стр. 461.

срединной поверхности пластинки. Тимошенко берет в произвольном виде. Найденное им распределение напряжений значительно отличается от распределения, найденного Шнаделем и последующими исследователями, применявшими более точные методы.

Кокс<sup>1)</sup> в работе, опубликованной в 1935 г., также применяет энергетический метод, но результаты его исследования, частично основанные на произвольных предположениях, не находятся в удовлетворительном соответствии с выводами, полученными другими исследователями, и не совпадают с результатами его же опытов.

Более точное решение задачи о больших прогибах дано Маргерром<sup>2)</sup>. В своем исследовании свободно опертых сжатых прямоугольных пластинок он избегает некоторых произвольных предположений, сделанных его предшественниками, исключая, таким образом, возможные источники ошибок. Единственное сделанное им допущение касается формы выпученной пластинки. Используя энергетический метод, Маргерр рациональным способом определяет значения свободных параметров, входящих в предполагаемое выражение для прогибов. Решение Маргерра изложено в §§ 122—125.

Задача о прямоугольных пластинках под действием продольных сжимающих сил и нормального давления является очень важной для расчета обшивки корпуса корабля. Эта задача тесно связана с вопросом о предельной прочности выпученных пластинок и также рассматривается в этой главе в §§ 127—129. Бенгстон<sup>3)</sup> сделал попытку решить задачу о больших прогибах опертых и защемленных прямоугольных пластинок под действием совместного изгиба и продольного сжатия. Применяя метод Ритца, он получил приближенные решения. Однако Бенгстон в своем решении допускает некоторые произвольные предположения, которые отчасти противоречат друг другу, и точность полученных им результатов является весьма сомнительной.

В ряде работ Леви и др. дали теоретически точные решения о больших прогибах свободно опертых и защемленных прямоугольных пластинок. Выражая прогибы и нормальное давление в виде рядов Фурье<sup>4)</sup>, эти исследователи получили общие решения диф-

---

<sup>1)</sup> Cox H. L., Buckling of Thin Plates in Compression, R. & M., No. 1554, London, 1933.

<sup>2)</sup> Marguerre K., Die mittragende Breite der gedrückten Platte, Luftfahrt — Forschung, т. 14, стр. 121, 1937.

<sup>3)</sup> Bengston H. W., Ship Plating under Compression and Hydrostatic Pressure, Trans. Soc. Naval Architects Marine Engr., т. 47, стр. 80, 1939.

<sup>4)</sup> Levy S., Bending of Rectangular Plates with Large Deflections NACA Tech. Note 846, 1942 и NACA Tech. Rept. 737, 1942, стр. 139; Square Plate with Clamped Edges under Normal Pressure Producing Large Deflections, NACA Tech. Note 847, 1942 и NACA Tech. Rept. 740, 1942, стр. 209; Levy S., Greenman S., Bending with Large Deflection of a Clamped Rectangular Plate with Length-Width Ratio of 1.5 under Normal Pressure, NACA Tech. Note 853, 1942; Levy S., D. Goldenberg, Zibritsky G., Simply Sup-

дифференциального уравнения Кармана для больших прогибов пластинок. Числовые решения получены ими для различных случаев нагружения и опирания. Решение является крайне сложным, а вычислительная работа для получения частных решений очень трудоемкой. Тем не менее эти исследования очень важны в связи с тем, что они дают возможность проверить точность результатов более простых приближенных методов. Кроме того, на основе этих детально разработанных аналитических решений можно исследовать влияние нормального давления на выпучивание сжатых вдоль краев пластинок (см. § 130).

В целях непосредственного определения значения предельной нагрузки из опытов и для подтверждения теории опытами проводилась экспериментальная работа с тонкими пластинками. Результаты этих опытов описаны в § 126.

### 121. Основные уравнения теории больших прогибов тонких пластинок

Вводим следующие обозначения (рис. 243):

- $a, b$  — размеры прямоугольной пластинки в плане;
- $t$  — толщина пластинки;
- $\sigma_A$  — равномерно распределенная на краях сжимающая нагрузка, действующая в направлении оси;
- $p$  — равномерно распределенное нормальное давление;
- $u$  и  $v$  — перемещения произвольной точки  $x, y$  срединной поверхности пластинки соответственно в направлениях  $x$  и  $y$ ;
- $w$  — прогиб произвольной точки;
- $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$  — средние фибровые напряжения (мембранные напряжения);  $\sigma$  считается положительной величиной при сжатии;

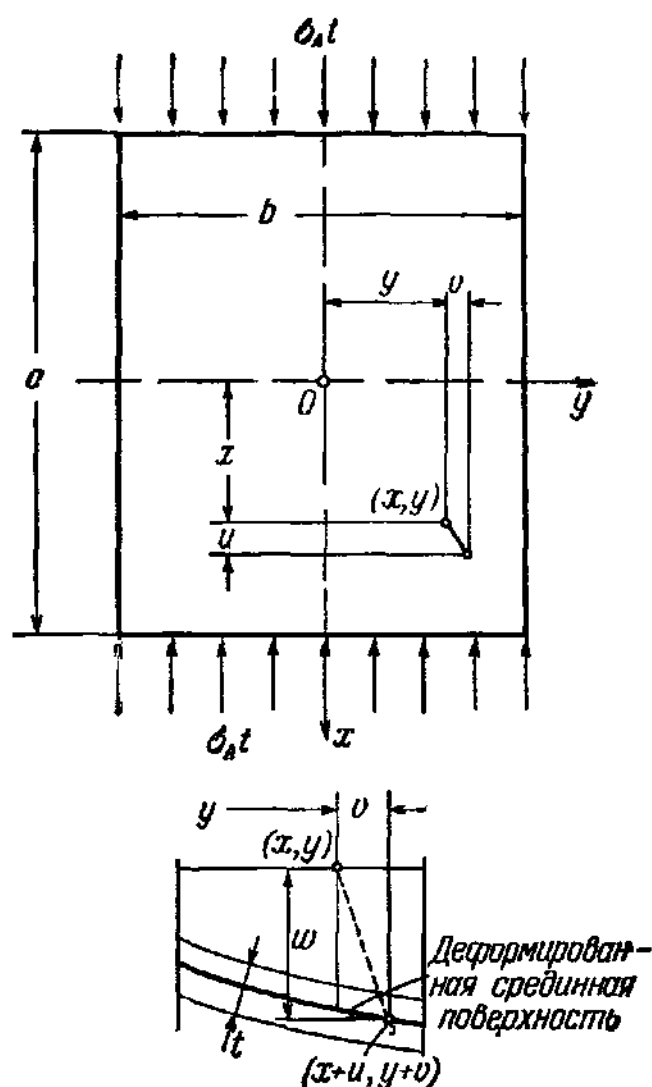


Рис. 243.

ported Long Rectangular Plate under Combined Axial Load and Normal Pressure, NACA Tech. Note 949, 1944; Corrick J. N., Levy S., Clamped Long Rectangular Plates under Combined Axial Load and Normal Pressure, NACA Tech. Note 1047, 1946.

$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  — средние фибровые деформации (мембранные деформации);  $\epsilon$  предполагается положительной величиной при сжатии;

$\nu$  — коэффициент Пуассона;

$D = Et^3/12(1 - \nu^2)$  — изгибная жесткость пластинки.

Между перемещениями  $u, v, w$  и деформациями  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  существуют следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} -\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \\ -\epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (862)$$

Следовательно, средние фибровые напряжения равны

$$\left. \begin{aligned} -\bar{\sigma}_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}; \\ -\bar{\sigma}_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}; \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (863)$$

Основными дифференциальными уравнениями в частных производных теории больших прогибов тонких плоских пластинок являются<sup>1)</sup>:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]; \quad (864)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \\ &= \frac{p}{D} + \frac{t}{D} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \quad (865)$$

Уравнения (864) и (865) получены Карманом при условии, что линии нормальные к срединной поверхности до деформации остаются нормальными к срединной поверхности и после деформации и прогиб  $w$  является величиной порядка толщины пластинки, но малой по сравнению с ее размерами в плане. Переменная  $F$  представляет собой функцию напряжений, определяющую средние фибровые напряжения пластинки

$$-\bar{\sigma}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad -\bar{\sigma}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \bar{\tau}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (866)$$

<sup>1)</sup> Вывод этих уравнений см. Timoshenko S., Theory of Elastic Stability, стр. 321, Mc Graw-Hill Book Company, New York, Inc., 1936; русский перевод: Тимошенко, Устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, 1955, стр. 331.

Энергия деформации изогнутой пластинки состоит из двух частей: энергии деформаций  $V_S$  мембранных напряжений и энергии деформаций  $V_B$  изгиба<sup>1)</sup>:

$$V_S = \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^2 \right) dx dy; \quad (867)$$

$$V_B = \frac{D}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \right. \\ \left. - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (868)$$

При определенных условиях на опоре вдоль краев, так же как и в случае свободно опертых или защемленных краев, интеграл

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

равен нулю, и уравнение (868) принимает следующий вид:

$$V_B = \frac{D}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy. \quad (869)$$

Используя функцию напряжений  $F$ , Маргерр<sup>2)</sup> написал в следующем виде выражение (867) для энергии деформации:

$$V_S = \frac{t}{2E} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left\{ \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1+\nu) \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (870)$$

<sup>1)</sup> Там же, стр. 317, 399.

<sup>2)</sup> Маргерр, цит. выше, стр. 561.

## 122. Теория Маргерра больших прогибов прямоугольных пластинок под действием продольного сжатия

В нижеизложенной теории рассматриваются прямоугольные пластинки, свободно вращающиеся вдоль опертых краев и свободно перемещающиеся вдоль опор. Предполагается, что края остаются прямыми и после деформации пластинка сохраняет свою прямоугольную форму, как это показано на рис. 244.

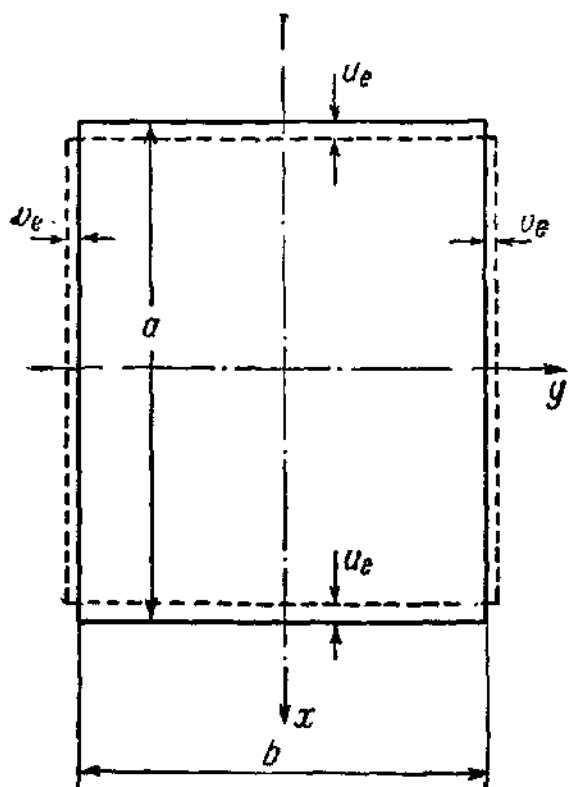


Рис. 244.

Определим среднее значение  $p_1$  мембранных напряжений  $\bar{\sigma}_x$  следующим образом:

$$p_1 = \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \bar{\sigma}_x dy = \sigma_A, \quad (871)$$

а среднее значение мембранных напряжений  $\bar{\sigma}_y$  — соотношением

$$p_2 = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \bar{\sigma}_y dx. \quad (872)$$

Очевидно, что среднее значение  $p_1$  идентично внешнему напряжению  $\sigma_A$ .

Далее, определим значение средней деформации  $\epsilon_1$  следующим образом:

$$u_e = \frac{\epsilon_1 a}{2}, \quad (873)$$

а среднюю деформацию  $\epsilon_2$  — соотношением

$$v_e = \frac{\epsilon_2 b}{2}, \quad (874)$$

где величины  $u_e$  и  $v_e$  означают перемещения краев (рис. 244). В соответствии с определением деформаций величины  $u_e$  и  $v_e$  положительны в случае, когда пластинка укорачивается.

Необходимо несколько подробнее остановиться на термине «средняя деформация». Перемещения краев  $u_e$  и  $v_e$  состоят из двух частей: изменения длины хорды вследствие прогиба и изменения длины вследствие переменной фибровой деформации в изогнутой пластинке. В соответствии с вышеприведенным определением  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  представляют собой средние значения полного изменения длины  $u_e$

или  $\sigma_x$  на единицу длины и в целях упрощения называются средними деформациями. Осевая сжимающая сила  $p_1$  перед выпучиванием распределена равномерно, и деформация  $\varepsilon_1$  пропорциональна<sup>1)</sup> сжимающему напряжению  $p_1$ , т. е.  $p_1 = E\varepsilon_1$ . Выше критического значения  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{кр}$  пластинка изгибается больше в середине, чем у заделанных краев, что приводит к неравномерному распределению сжимающих напряжений  $\sigma_x$ , как это показано на рис. 245. Задача, которую нужно решить, заключается в определении изогнутой формы пластинки, величины и распределения мембранных напряжений и, в частности, в установлении взаимосвязи между средним значением  $p_1$  и средней деформацией  $\varepsilon_1$  или, иначе говоря, зависимости между напряжением и деформацией  $p_1 = f(\varepsilon_1)$ .

Метод решения задачи о больших прогибах является следующим: выбирая для прогиба  $w$  подходящее выражение, содержащее несколько свободных параметров, Маргерр определяет функцию напряжений  $F$  из дифференциального уравнения (864). Затем функцию  $F$  вместе с выбранным для прогиба  $w$  выражением он вводит в выражение для потенциальной энергии изогнутой пластинки и в результате из условий стационарного значения потенциальной энергии определяет значения свободных параметров, фигурирующих в выражении для  $w$ . Маргерр исследует два различных случая изогнутой формы пластинки. В первой части своей работы он допускает, что выражение для прогиба  $w$  содержит только один свободный параметр. Эту теорию с достаточной точностью можно применить к пластинкам, в которых значение предельной нагрузки примерно в пять раз меньше критической. Вторая часть работы основывается на выражении для прогиба  $w$ , имеющем три свободных параметра, применяемых для расчетов очень тонких пластинок. Для расчета тяжелой обшивки корабельных конструкций важную роль играет наиболее простая из двух теорий, данных Маргерром. Эта часть работы Маргерра будет изложена в дальнейшем; усовершенствованная теория рассматривается в § 125.

Наиболее простое выражение для прогиба  $w$ , содержащее только один свободный параметр, получается, если предположить, что форма выпучивания свободно опертой прямоугольной пластинки остается

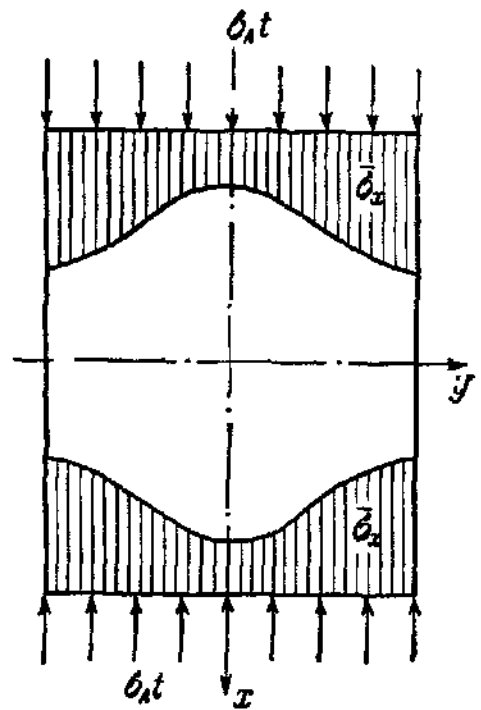


Рис. 245.

<sup>1)</sup> Маргерр предполагает неограниченную применимость закона Гука.

неизменной даже тогда, когда превзойдена критическая нагрузка:

$$w = f \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}. \quad (875)$$

Вводя это выражение в дифференциальное уравнение (864), получим:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = -E \frac{\pi^4 f^3}{2a^2 b^2} \left( \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi y}{b} \right). \quad (876)$$

Для того чтобы получить решение этого дифференциального уравнения, необходимо установить граничные условия для функции напряжений  $F$ . Предполагая, что края пластинки остаются прямыми (рис. 244), Маргерр получил два граничных условия в виде двух соотношений между перемещениями  $u_e$ ,  $v_e$  и средними деформациями:

$$u_e = \mp \frac{\varepsilon_1 a}{2}; \quad v_e = \mp \frac{\varepsilon_2 b}{2}. \quad (877)$$

Два других граничных условия получаются из условия равенства нулю касательных напряжений на краях. На основе третьего уравнения (863) получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \quad \text{при} \quad x = \pm \frac{a}{2}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \quad \text{при} \quad y = \pm \frac{b}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (878)$$

Далее Маргерр из уравнений (863) определяет перемещения  $u$  и  $v$  в функции от  $F$  и, подставляя найденный результат в уравнения (877) и (878), получает граничные условия для дифференциального уравнения (876). Таким образом, в результате он выводит следующее выражение для  $F$ :

$$F = -\frac{E f^3}{32} \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \cos \frac{2\pi y}{b} \right] - \frac{1}{2} p_1 y^2 - \frac{1}{2} p_2 x^2, \quad (879)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — постоянные, которые равны средним мембранным давлениям в направлениях  $x$  и  $y$  [уравнения (871) и (872)].

Из уравнения (879) получим следующие выражения для мембранных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = p_1 - \frac{E \pi^2 f^3}{8a^2} \cos \frac{2\pi y}{b}; \\ \bar{\sigma}_y &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = p_2 - \frac{E \pi^2 f^3}{8b^2} \cos \frac{2\pi x}{a}; \\ \bar{\tau}_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (880)$$

где напряжения  $\bar{\sigma}_x$  и  $\bar{\sigma}_y$  считаются положительными при сжатии. Подставляя эти значения  $\bar{\sigma}_x$  и  $\bar{\sigma}_y$  в уравнения (871) и (872), получим подтверждение того, что постоянные  $p_1$  и  $p_2$  в уравнении (879) представляют собой средние значения мембранных напряжений.



Решая первые два уравнения (863) относительно  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial v}{\partial y}$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} E \frac{\partial u}{\partial x} &= -(\bar{\sigma}_x - \nu \bar{\sigma}_y) - \frac{E}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \\ E \frac{\partial v}{\partial y} &= -(\bar{\sigma}_y - \nu \bar{\sigma}_x) - \frac{E}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (881)$$

Уравнения (877) можно записать в следующем виде:

$$u_e = \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\partial u}{\partial x} dx = -\frac{\varepsilon_1 a}{2}; \quad v_e = \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\varepsilon_2 b}{2}.$$

Используя уравнения (875), (880) и (881), получим:

$$\left. \begin{aligned} E\varepsilon_1 &= p_1 - \nu p_2 + E \frac{\pi^2 f^2}{8a^2}; \\ E\varepsilon_2 &= p_2 - \nu p_1 + E \frac{\pi^2 f^2}{8b^2}, \end{aligned} \right\} \quad (882)$$

на основе чего можно определить значения постоянных  $p_1$  и  $p_2$  в функции средних деформаций  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ :

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2 - \frac{\pi^2 f^2}{8} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \right]; \\ p_2 &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1 - \frac{\pi^2 f^2}{8} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (883)$$

Из теоремы о стационарном значении потенциальной энергии можно затем определить значение прогиба  $f$ <sup>1)</sup>. Для этой цели необходимо выразить потенциальную энергию в функции от  $f$ . Условие

$$\frac{\partial U}{\partial f} = 0 \quad (884)$$

дает уравнение для прогиба  $f$ .

Полная потенциальная энергия  $U$  состоит из энергии деформаций  $V_S$  мембранных напряжений, энергии деформаций  $V_B$  изгиба и потенциальной энергии  $U_w$  внешних нагрузок  $\sigma_A$ . Выражения для энергий  $V_S$  и  $V_B$  даны уравнения (869) и (870), отсюда сумму  $V = V_S + V_B$  можно выразить в функции средних деформаций  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $f$  [см. ниже уравнение (887)]. С другой стороны, потенциальная энергия  $U_w$  внешних сил зависит не от прогиба  $f$ , но лишь от средней деформации  $\varepsilon_1$ :

$$U_w = -\sigma_A t_a b \varepsilon_1. \quad (885)$$

<sup>1)</sup> См. § 23.

В результате  $\frac{\partial U}{\partial f} = 0$ , и уравнение (884) будет просто:

$$\frac{\partial V}{\partial f} = 0. \quad (886)$$

Вводя уравнения (875) и (879) в уравнения (869) и (870), получим энергию деформаций  $V$  в функции от средних значений  $p_1$  и  $p_2$  мембранных напряжений:

$$V = V_S + V_B = \frac{abt}{2} \left[ \frac{\pi^4 E}{128} f^4 \left( \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \right) + \frac{1}{E} (p_1 + p_2)^2 - \frac{2(1+\nu)}{E} p_1 p_2 \right] + \\ + \frac{\pi^4 E abt^3}{96(1-\nu^2)} f^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2.$$

С учетом значений  $p_1$  и  $p_2$  по уравнению (883), выражение для потенциальной энергии будет функцией от значений  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  и параметра  $f$ :

$$V = \frac{Eabt}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2} + \nu \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} \left[ \varepsilon_1 \left( \frac{b^2}{a^2} + \nu \right) + \varepsilon_2 \left( 1 + \nu \frac{b^2}{a^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\pi^4 f^4}{256b^4} \left[ (3-\nu^2) \left( 1 + \frac{b^4}{a^4} \right) + 4\nu \frac{b^2}{a^2} \right] + \frac{\pi^4 f^2 f^2}{96b^4} \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right)^2 \right\}. \quad (887)$$

На основе уравнения (886) далее получим следующее соотношение:

$$\varepsilon_1 \left( \nu + \frac{b^2}{a^2} \right) + \varepsilon_2 \left( 1 + \nu \frac{b^2}{a^2} \right) = \frac{\pi^2 f^2}{12b^2} \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right)^2 + \\ + \frac{\pi^2 f^2}{16b^2} \left[ (3-\nu^2) \left( 1 + \frac{b^4}{a^4} \right) + 4\nu \frac{b^2}{a^2} \right], \quad (888)$$

из которого определяется прогиб  $f$  в функции от средних деформаций  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ .

### 123. Результаты теории Маргерра для квадратных пластинок

Поведение пластинки с большими прогибами проще исследовать на квадратной пластинке, не преуменьшая при этом общности некоторых выводов, которые можно извлечь из аналитических результатов.

Исследование значительно упрощается, если  $a = b$ . Уравнение (888) принимает следующий вид:

$$\frac{\pi^2 f^2}{8b^2} = \frac{1}{3-\nu} \left( \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{1}{1+\nu} \frac{\pi^2 f^2}{3b^2} \right). \quad (889)$$

Критическое напряжение квадратной пластинки со стороной  $b$  и толщиной  $t$  при сжатии в направлении  $x$  равно

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E t^2}{3(1-\nu^2) b^2}, \quad (890)$$

и следовательно, уравнение (890) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\pi^2 f^2}{8b^2} = \frac{1}{3-\nu} \left[ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - (1-\nu) \frac{\sigma_{кр}}{E} \right]. \quad (891)$$

Подставляя значения  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  из уравнения (882) в уравнение (891), получим:

$$\frac{E\pi^2 f^2}{8b^2} = p_1 + p_2 - \sigma_{кр}. \quad (892)$$

Это выражение можно затем представить в уравнения (880) и, учитывая, что  $a=b$ , найти мембранные напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= p_1 - (p_1 + p_2 - \sigma_{кр}) \cos \frac{2\pi y}{b}; \\ \bar{\sigma}_y &= p_2 - (p_1 + p_2 - \sigma_{кр}) \cos \frac{2\pi x}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (893)$$

Максимальное напряжение имеет место на продольных краях

$$\bar{\sigma}_{x\max} = \bar{\sigma}_e = 2p_1 + p_2 - \sigma_{кр}, \quad (894)$$

а минимальное напряжение — в середине:

$$\bar{\sigma}_{x\min} = \bar{\sigma}_m = -p_2 + \sigma_{кр}. \quad (895)$$

До сих пор мы избегали определения условий опирания ненагруженных краев пластинки. Теперь рассмотрим два предельных случая: случай 1, когда продольные края свободно перемещаются в поперечном направлении таким образом, что  $p_2=0$ , и случай 2, когда перемещение продольных краев в поперечном направлении предотвращено ( $\varepsilon_2=0$ ).

**Случай 1.** С учетом  $p_2=0$  уравнение (892) примет вид

$$\frac{\pi^2 f^2}{8b^2} = \frac{1}{E} (p_1 - \sigma_{кр}), \quad (896)$$

откуда ясно, что прогиб  $f$  пропорционален квадратному корню разности действительной и критической нагрузок.

Мембранные напряжения равны

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= p_1 - (p_1 - \sigma_{кр}) \cos \frac{2\pi y}{b}; \\ \bar{\sigma}_y &= (p_1 - \sigma_{кр}) \cos \frac{2\pi x}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (897)$$

Подставляя  $p_2=0$  и значение  $f^2$  из уравнения (891) во второе уравнение (883), получим:

$$\varepsilon_2 = \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_1 - \frac{1}{2} (1+\nu) \frac{\sigma_{кр}}{E}.$$

Вводя это выражение в уравнение (891), имеем:

$$\frac{\pi^2 f^2}{8b^3} = \frac{1}{2} \left( \epsilon_1 - \frac{\sigma_{кр}}{E} \right) = \frac{1}{2} (\epsilon_1 - \epsilon_{кр}), \quad (898)$$

где величина  $\epsilon_{кр}$  обозначает деформацию сжатия, соответствующую критическому напряжению  $\sigma_{кр}$ . Сравнивая уравнения (896) и (898), получим зависимость между напряжением и деформацией:

$$p_1 - \sigma_{кр} = \frac{E}{2} (\epsilon_1 - \epsilon_{кр}). \quad (899)$$

Выше критического напряжения добавочная средняя деформация  $\epsilon_1 - \epsilon_{кр}$  становится пропорциональной разности напряжений  $p_1 - \sigma_{кр}$ .

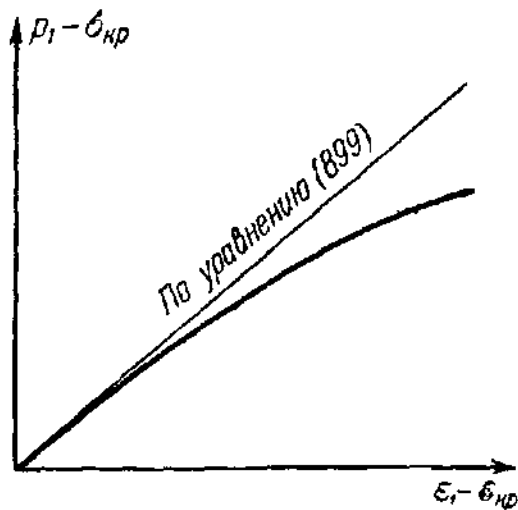


Рис. 246.

Кажущийся модуль упругости равен  $E/2$ . Это предельно простое соотношение является, конечно, результатом ограничения, налагаемого на форму выпущенной поверхности, что является основой вышеизложенного исследования. В действительности уравнение (899) применимо только в первоначальной стадии после превышения критической нагрузки. Прямая линия на рис. 246, изображающая уравнение (899), является касательной к действительной кривой зависимости между напряжением и деформацией, которая, начинаясь от этой касательной, отклоняется вниз. Однако

для не слишком больших значений отношения  $\epsilon_1/\epsilon_{кр}$  отклонение так мало, что для практических целей зависимость (899) между напряжением и деформацией можно считать достаточно точной.

В послекритическом состоянии несущую способность пластинки обычно выражают, определив максимальное напряжение на краях с помощью эффективной ширины  $b_e$  пластинки:

$$b_e \bar{\sigma}_e = b p_1, \quad (900)$$

где  $\bar{\sigma}_e$  — напряжение вдоль продольных краев. Так как  $p_2 = 0$ , то из уравнения (894) получим:

$$\bar{\sigma}_e = 2p_1 - \sigma_{кр}. \quad (901)$$

Вводя  $p_1 = (\bar{\sigma}_e + \bar{\sigma}_{кр})/2$  в уравнение (900), имеем:

$$\frac{b_e}{b} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sigma_{кр}}{\bar{\sigma}_e} \right). \quad (902)$$

На рис. 247 изображено отношение  $b_e/b$  в зависимости от  $\bar{\sigma}_e/\sigma_{кр}$ ; при  $b_e/b = 1/2$  кривая имеет горизонтальную асимптоту. Несмотря

на то, что ее применимость ограничена значениями  $\bar{\sigma}_e/\sigma_{кр} < 5^1$ ), она дает достаточно точные результаты при расчете обшивки кораблей, где отношение  $\bar{\sigma}_e/\sigma_{кр}$  редко превосходит значение 3.

Для практических расчетов при проектировании кораблей, где используется эффективная ширина, более целесообразно выразить  $b_e/b$  в зависимости от сжимающей нагрузки  $p_1$  пластинки. Подставляя уравнение (901) в уравнение (900) и заметив, что  $p_1 = \sigma_A$ , находим:

$$\frac{b_e}{b} = \frac{1}{2 - \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_A}}. \quad (903)$$

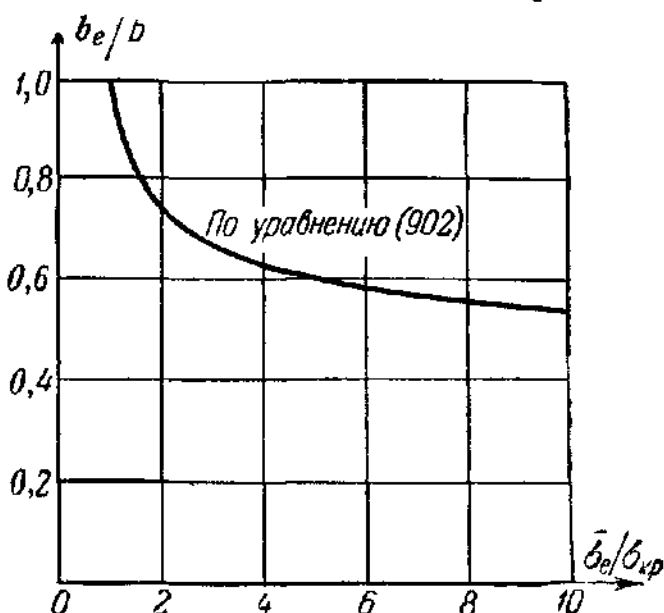


Рис. 247.

Допустив, что предельная прочность достигается тогда, когда  $\bar{\sigma}_e$  приближается к пределу текучести, из уравнения (902) получим следующую расчетную формулу:

$$\frac{b_e}{b} = 0,5 + \frac{0,5\sigma_{кр}}{\sigma_T}, \quad (904)$$

а из уравнения (901) — следующее выражение для предельной прочности:

$$p_1 = \sigma_{пред} = 0,5\sigma_T + 0,5\sigma_{кр}. \quad (905)$$

**Случай 2.** Имея в виду  $\varepsilon_2 = 0$ , из уравнения (891) найдем:

$$\frac{\pi^2 f^2}{8b^2} = \frac{1}{3-\nu} \left[ \varepsilon_1 - (1-\nu) \frac{\sigma_{кр}}{E} \right]. \quad (906)$$

Для того чтобы выразить  $\varepsilon_1$  в зависимости  $p_1$ , используем первое уравнение (883):

$$\varepsilon_1 = \frac{1-\nu^2}{E} p_1 + (1+\nu) \frac{\pi^2 f^2}{8b^2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (906), получим:

$$\frac{E\pi^2 f^2}{8b^2} = \frac{1+\nu}{2} \left( p_1 - \frac{\sigma_{кр}}{1+\nu} \right). \quad (907)$$

При  $f=0$  из этого уравнения находим значение напряжения, при котором возникает прогиб:

$$p_1 = \sigma_{кр}^* = \frac{\sigma_{кр}}{1+\nu}. \quad (908)$$

<sup>1)</sup> Соображения по поводу рис. 248 см. на стр. 517.

Значение  $\sigma_{кр}^*$  представляет собой критическое напряжение пластинки, сжатой в двух направлениях ( $\sigma_A = \sigma_{кр}$ ,  $\sigma_B = \nu \sigma_{кр}$ )<sup>1)</sup>. Такое положение логически оправдано, потому что условие  $\varepsilon_2 = 0$  вызывает напряжения  $\sigma_B = \nu \sigma_A$ .

При  $f = 0$  из уравнения (906) получим величину деформации  $\varepsilon_{кр}^*$  в момент выпучивания

$$\varepsilon_{кр}^* = \frac{(1 - \nu) \sigma_{кр}}{E}.$$

Сопоставляя уравнения (906) и (907), находим:

$$\frac{1 + \nu}{2} (p_1 - \sigma_{кр}^*) = \frac{E}{3 - \nu} (\varepsilon_1 - \varepsilon_{кр}^*).$$

Это уравнение можно написать в следующем виде:

$$p_1 - \sigma_{кр}^* = \frac{2(1 - \nu)}{3 - \nu} \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_{кр}^*). \quad (909)$$

Сопоставляя это соотношение с соотношением, пригодным для нагрузки ниже критической:

$$p_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_1,$$

находим, что уравнение (909) остается линейным, но имеет коэффициент  $2(1 - \nu)(3 - \nu)$ . Значение этого коэффициента для  $\nu = 0,3$  равно 0,52. Следовательно, кажущееся значение модуля упругости выше критической нагрузки приблизительно равно половине значения  $E/(1 - \nu^2)$  перед выпучиванием.

Рассуждая так же, как в случае 1, найдем, что отношение  $b_e/b$  принимает следующее значение:

$$\frac{b_e}{b} = \frac{2}{3 + \nu} + \frac{1 + \nu}{3 + \nu} \frac{\sigma_{кр}^*}{\sigma_{кр}}, \quad (910)$$

и, подставляя  $\nu = 0,3$ , имеем:

$$\frac{b_e}{b} = 0,604 + 0,394 \frac{\sigma_{кр}^*}{\sigma_{кр}}. \quad (911)$$

Предельная прочность будет

$$\sigma_{пред} = 0,604 \sigma_y + 0,394 \sigma_{кр}^*. \quad (912)$$

Действительные граничные условия для обшивки корабля точно неизвестны и могут иметь любое значение между этими двумя рассмотренными предельными случаями. В связи с тем, что значение  $\sigma_{кр}$

<sup>1)</sup> См. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, стр. 333, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1936; см. русский перевод: Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, 1955, стр. 342.

при расчете обшивки корабля в большинстве случаев лежит выше предела пропорциональности, различие между значениями  $\sigma_{\text{пред}}$ , вычисленными по уравнениям (905) и (912) не является значительным. Следовательно, целесообразно использовать более надежную формулу, выведенную в случае 1, применение которой не ухудшает существенно экономичность любой конструкции.

#### 124. Результаты теории Маргерра для прямоугольных пластинок

Необходимо помнить, что длинная пластинка под действием продольного сжатия выпучивается по полуволнам, длины которых приблизительно равны ширине пластинки. Следовательно, полученные в предыдущем параграфе результаты, в частности уравнения (902) — (905), можно применить к длинным пластинкам, подкрепленным шпангоутами.

Для того чтобы получить соответствующие результаты для пластинок, используемых в корабельных конструкциях, снабженных шпангоутами, где отношение  $\beta = b/a > 1$ , необходимо применить общие уравнения (880) — (888). Предположив, что ненагруженные края свободно перемещаются в боковом направлении ( $p_2 = 0$ ), можно следующим образом получить максимальные напряжения.

С учетом  $p_2 = 0$  уравнения (882) примут вид

$$\left. \begin{aligned} E\varepsilon_1 &= p_1 + E \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} \beta^2; \\ E\varepsilon_2 &= -\nu p_1 + E \frac{\pi^2 f^2}{8b^2}, \end{aligned} \right\} \quad (913)$$

где  $\beta = b/a$ .

Подставляя эти выражения в уравнение (888), получим соотношение между величиной  $\pi^2 f^2 / 8b^2$  и средним сжимающим напряжением  $p_1$ :

$$\frac{\pi^2 f^2}{8b^2} = \frac{2p_1\beta^2}{E(1+\beta^4)} - \frac{2 \frac{\pi^2 f^2}{12b^2} (1+\beta^2)^2}{(1-\nu^2)(1+\beta^4)}. \quad (914)$$

Критическое сжимающее напряжение  $\sigma_{\text{кр}}$  для пластинки с отношением сторон

$$\alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{\beta}$$

дано уравнением (634). В упругой области  $\tau = 1$  и, полагая  $n = 1$ , получим:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 \left( \beta + \frac{1}{\beta} \right)^2. \quad (915)$$

Выражение в числителе второго члена левой части уравнения (914) можно записать следующим образом:

$$2 \frac{\sigma_{кр}}{E} (1 - \nu^2) \beta^2,$$

и уравнение (914) примет следующий простой вид:

$$\frac{\pi^2 f^2}{8b^3} = \frac{2\beta^2 (p_1 - \sigma_{кр})}{E(1 + \beta^4)}. \quad (916)$$

Из уравнений (880) для  $y = \pm b/2$  находим значение напряжения  $\sigma_e$ :

$$\bar{\sigma}_e = p_1 + \frac{E\pi^2 f^2}{8b^3} \beta^2,$$

и, подставляя уравнение (916), получим:

$$\bar{\sigma}_e = \frac{(1 + 3\beta^2) p_1 - 2\beta^4 \sigma_{кр}}{1 + \beta^4}. \quad (917)$$

Из уравнения (900) определяем эффективную ширину:

$$\frac{b_e}{b} = \frac{p_1}{\sigma_e} = \frac{1 + \beta^4}{1 + 3\beta^4} + \frac{2\beta^4}{1 + 3\beta^4} \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_e}.$$

В результате предельное напряжение, основанное на пределе текучести, будет равно

$$\sigma_{пред} = \frac{1 + \beta^4}{1 + 3\beta^4} \sigma_{\tau} + \frac{2\beta^4}{1 + 3\beta^4} \sigma_{кр}. \quad (918)$$

Выражая  $b_e/b$  в функции от сжимающего напряжения  $p_1 = \sigma_A$ , можно получить следующую формулу для эффективной ширины:

$$\frac{b_e}{b} = \frac{1 + \beta^4}{1 + 3\beta^4 - 2\beta^4 \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_A}}. \quad (919)$$

Уравнения (916) — (919) применимы для  $\beta = b/a > 1$ . В случае, когда  $\beta \leq 1$ , применимы уравнения (902) и (905).

### 125. Теория Маргерра для очень тонких пластинок

Во второй части своей работы Маргерр<sup>1)</sup> рассматривает распределение напряжений в тонких пластинках, когда действующая нагрузка превышает критическую более чем в пять раз. В этом случае две краевые полосы несут на себе приблизительно полную

<sup>1)</sup> Маргерр, цит. выше, стр. 502.



нагрузку, в то время как в центральной части пластинки действует напряжение несколько большее, чем критическое. Вблизи краев появляется вторичное волнообразование, так как краевые полосы, несущие главную часть нагрузки, выпучиваются в форме квадратных панелей, до некоторой степени напоминающих длинную пластинку шириной  $b_e/2$ . Это волнообразование налагается на первоначальную выпученную форму, на основании чего Маргерр принимает следующее выражение для перемещения  $w$  квадратной пластинки:

$$w = f_1 \cos \frac{\pi x}{b} \cos \frac{\pi y}{b} - f_3 \cos \frac{3\pi x}{b} \left( \cos \frac{\pi y}{b} - \eta \cos \frac{3\pi y}{b} \right). \quad (920)$$

Это выражение удобно для определения упомянутого выше волнообразования. Значения трех параметров  $f_1$ ,  $f_3$  и  $\eta$  определяются на основе теоремы о стационарном значении потенциальной энергии. Появление вторичного волнообразования вблизи продольных краев действительно наблюдалось в опытах на тонких пластинках.

Математические выкладки по существу те же, что и изложенные ранее, но вычисления становятся очень громоздкими. Результаты исследования Маргерра для квадратных пластинок показаны на рис. 248, где приведены значения отношения  $b_e/b$  в зависимости

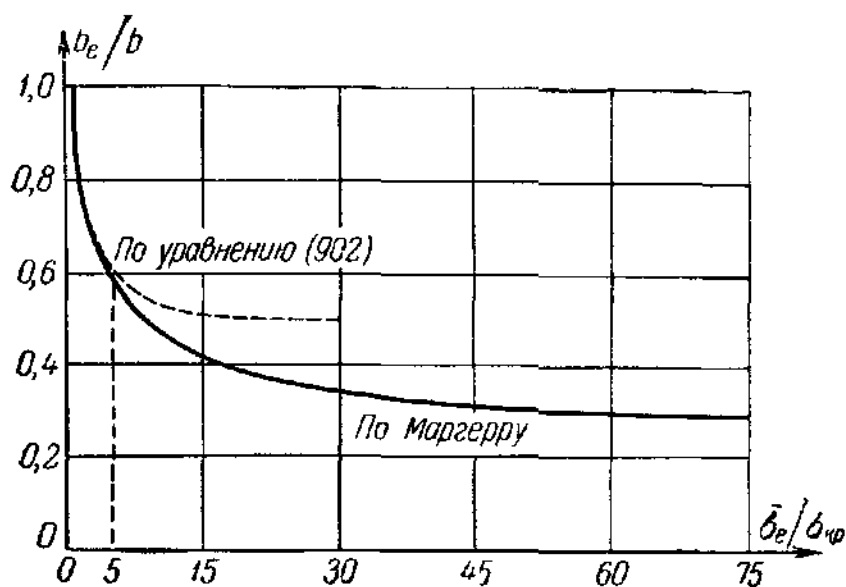


Рис. 248.

от отношения  $\bar{\sigma}_e/\sigma_{кр}$ . Пунктирная линия идентична диаграмме рис. 247, и легко видеть, что обе кривые на рис. 248 довольно хорошо совпадают в пределах значений  $\bar{\sigma}_e/\sigma_{кр} =$  от 1 до 5, причем в этом интервале результаты упрощенной теории, описанной в § 123, достаточно точны.

В заключение изложения теории Маргерра необходимо обратить внимание на тот факт, что в этой теории предполагается неограниченная применимость закона Гука до достижения предела текучести.

Кривая зависимости между напряжением и деформацией, лежащая в основе исследования, показана на рис. 249, и критическое напряжение  $\sigma_{кр}$ , использованное в математических выкладках теории, представляет собой то значение  $\sigma_{кр}$ , которое получилось бы, если бы пластинка была идеально упругой до тех пор, пока  $\sigma_{кр}$  не достигло предела текучести. В случае, когда значение  $\sigma_{кр}$  превосходит пределы текучести, это вычисленное значение  $\sigma_{кр}$  следует заменить на  $\sigma_t$ . В качестве иллюстрации к этому на рис. 249 приведены предельные

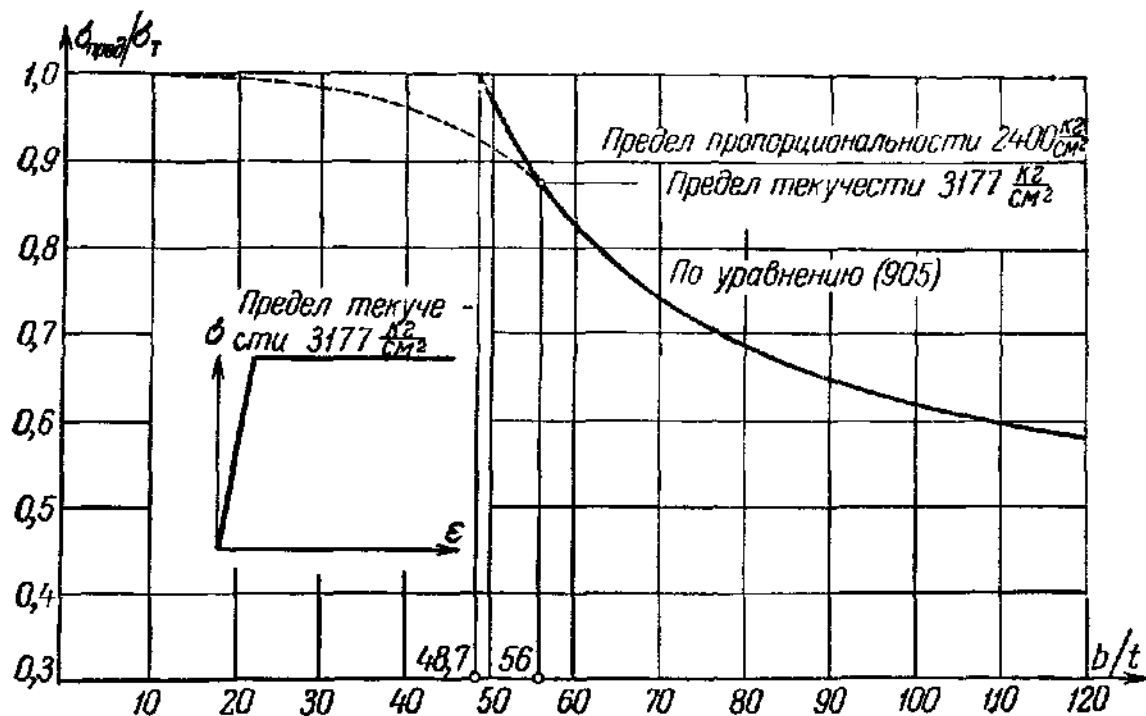


Рис. 249.

напряжения квадратной пластинки из высокопрочной стали в зависимости от  $b/t$ . Безразмерные отношения  $\sigma_{пред}/\sigma_t$  были рассчитаны на основе уравнения (905). При  $b/t = 48,7$   $\sigma_{кр}$  достигает предела текучести  $\sigma_t$ , а отношение  $\sigma_{пред}/\sigma_t$  принимает предельное значение, применимое для всех пластинок с отношением  $b/t < 48,7$ .

Однако закон Гука в действительности пригоден ниже предела пропорциональности и, следовательно, сплошная кривая на рис. 249 применима только для отношений  $b/t > 56,1$ , когда  $\sigma_{кр}$  равно пределу пропорциональности. Остальную часть кривой  $\sigma_{пред}/\sigma_t$  необходимо заменить более точной кривой с учетом того факта, что значение  $\sigma_{кр}$ , а также значение  $\sigma_{пред}$  различны в неупругой области, где действительная диаграмма напряжения—деформации отличается от упрощенной диаграммы, изображенной на рис. 249.

Предположим, что искривление пластинки в послекритическом состоянии характеризуется эффективным модулем  $E_\phi$ , определяющим значение  $\sigma_{кр}$ . Это предположение заведомо неправильно, но оно больше соответствует действительным условиям, чем предположение о неограниченной применимости модуля упругости  $E$ . Следовательно,

в предыдущих расчетах модуль  $E$  можно заменить модулем  $E_s$ . Это означает, что полученные выше формулы для мембранных напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  и для эффективной ширины или предельной прочности применимы также в неупругой области при условии, если значение  $\sigma_{кр}$  в этих уравнениях определяется как действительное критическое напряжение в неупругой области выпучивания. Таким образом, вычисляя  $\sigma_{кр}$  из формулы

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{8(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2,$$

получим пунктирную кривую, показанную на рис. 249, которая в неупругой области дает несколько меньшие значения для  $\sigma_{пред}$ , чем первоначальное уравнение Маргерра.

Нельзя замалчивать тот факт, что, несмотря на эту поправку, теория Маргерра дает слишком высокие значения для предельных напряжений. Опыты<sup>1)</sup> над стальными пластинками с отношениями  $b/t = 30 - 100$ , употребляемыми в кораблестроении, показывают, что действительные предельные напряжения на 10—20% меньше теоретических. Возможно, что эти расхождения в какой-то степени обусловлены меньшим значением эффективного модуля упругости в областях с большими напряжениями вблизи краев пластинок.

Для того чтобы иметь понятие о величине запаса прочности пластинок, интересно определить разницу между предельной и критической нагрузками в рассмотренном здесь случае. В таблице 49 даны значения отношения  $\sigma_{пред}/\sigma_{кр}$  для значений отношения в пределах от  $b/t = 30$  до 120. Эти значения несколько меняются, если используется материал с другими свойствами; они увеличиваются при возрастании предела текучести.

Т а б л и ц а 49. Значения отношения  $\sigma_{пред}/\sigma_{кр}$  для прямоугольных пластинок

$\frac{b}{t}$	30	40	50	60	70	80	90	100	120
$\frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{кр}}$	1,01	1,06	1,10	1,26	1,53	1,84	2,13	2,60	3,54

Считается необходимым проводить исследование поведения пластинок с критическими нагрузками, лежащими между пределами пропорциональности и текучести, так как пластинки, используемые в конструкциях кораблей, обычно подходят под эту категорию.

<sup>1)</sup> Frankland J., The Strength of Ship Plating under Edge Compression, U. S. Experimental Model Basin, Rept. 469, 1940.

### 126. Опыты по определению предельной прочности пластинок

Наиболее ранние опыты с целью экспериментального определения предельной прочности пластинок проведены Шуманом и Баком<sup>1)</sup>, которые установили, что для широких тонких пластинок предельная нагрузка в тридцать раз больше критической и что в случае узких, толстых пластинок разрушающая нагрузка существенно не превосходит критической. Для широких, тонких пластинок предельная нагрузка почти не зависела от ширины пластинки. В то время вопрос о предельной прочности тонкой пластинки, особенно подкрепленной пластинки, был очень важным в самолетостроении (см. § 103). Предлагались эмпирические методы, основанные на этих опытах<sup>2)</sup>, пока Карман<sup>3)</sup> не разработал полуэмпирическую формулу для предельной прочности свободно опертой пластинки. Она основана на предположении, согласно которому в момент внезапного разрушения напряжения в двух краевых полосах достигли предела текучести и уравнивают полную нагрузку, в то время как сильно искривленную часть пластинки можно считать ненапряженной (рис. 250).

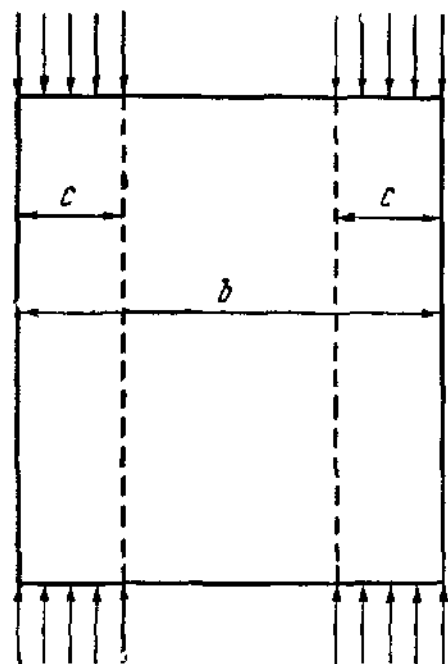


Рис. 250.

Для ширины  $2c$  несущих полос имеем следующую формулу:

$$2c = \frac{2\pi t}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{E}{\sigma_T}} = Ct \sqrt{\frac{E}{\sigma_T}}, \quad (921)$$

где  $C = 1,9$ , а  $\sigma_T$  есть предел текучести. Следовательно, предельная нагрузка равна

$$\sigma_{\text{пред}} = \frac{2c}{b} \sigma_T = C \frac{t}{b} \sqrt{E\sigma_T}. \quad (922)$$

Секлер<sup>4)</sup> провел серию опытов с целью проверки справедливости гипотезы Кармана. Эти опыты показали, что коэффициент  $C = 1,9$  не остается постоянным, а меняется с величиной  $\sqrt{E/\sigma_T} t/b$ , умень-

<sup>1)</sup> Schuman L., Back G., Strength of Rectangular Flat Plates under Edge Compression, NACA Tech. Rept. 356, 1930.

<sup>2)</sup> Newell J. S., Data on the Strength of Aircraft Materials, Aviation Eng., 1932.

<sup>3)</sup> Von Kármán T., Sechler E. E., Donnell L. H., The Strength of Thin Plates in Compression, Trans. ASME, т. 54, APM 54-5, стр. 53, 1932.

<sup>4)</sup> Sechler E. E., The Ultimate Strength of Thin Flat Sheets in Compression, Guggenheim Aeronaut. Lab. Pub. 27, California Institute of Technology, Pasadena, 1933.

шаясь по мере увеличения этого параметра. Значение  $C$  стремится к 1,9 только в случае широких и тонких пластинок.

В недавно опубликованной статье Винтер<sup>1)</sup> привел результаты детального исследования тонкостенных стальных U-образных сечений. Опыты проводились с целью изучения поведения тонких и широких поясов, находящихся под действием сжатия. Было установлено, что уравнение (921) для эффективной ширины пригодно также для напряжений  $s$ , лежащих ниже предела текучести:

$$b_e = Ct \sqrt{\frac{E}{s}}, \quad (923)$$

где значение коэффициента

$$C = 1,9 \left( 1 - 0,475 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{s}} \right) \quad (924)$$

определялось экспериментальным путем.

Проведенные многочисленные другие опыты и разработанные расчетные формулы для нужд авиационных инженеров здесь не приводятся, поскольку они не охватывают круг задач, важных для проектирования кораблей. Первостепенную важность для корабельного инженера имеют многочисленные опыты, проведенные в Опытном модельном бассейне США с целью определения предельной прочности тонких прямоугольных стальных пластинок при краевом сжатии<sup>2)</sup>. Первая группа опытов ставилась на пластинках длиной 75 см, толщиной 2,7 мм, у которых ширина менялась в пределах от 12,5 до 75 см. Было обнаружено, что для больших значений отношения  $b/t$  ( $b/t > 100$ ) в соответствии с формулой Кармана предельная нагрузка лишь в незначительной степени зависит от ширины пластинки. Например, пластинки с шириной 75 см оказались лишь немного прочнее, чем пластинки с шириной 25 см.

Во второй группе опытов образцы имели постоянную длину и ширину  $a = 75$  см,  $b = 37,5$  см и отличались только толщиной, меняющейся от 1,25 до 2,7 мм. В соответствии с уравнением (922) предельная нагрузка приблизительно пропорциональна толщине пластинки. В другой группе опытов делалась попытка определить влияние длины на предельную прочность. Опыты, проведенные с пластинками длиной 37,5 см, показали, что такие пластинки воспринимают нагрузки несколько большие, чем пластинки длиной 75 см, использованные в первой серии опытов. Очень важным является тот факт, что эти опыты снова показали зависимость<sup>3)</sup> предельного

<sup>1)</sup> Winter G., Performance of Thin Steel Compression Flanges, Prelim. Pub. 3d Congr. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., Liège, 1948, стр. 137.

<sup>2)</sup> Sweeney R. J., The Strength of Hull Plating under Compression, U. S. Experimental Model Basin, Progress Repts. 1 and 2, 1933.

<sup>3)</sup> Франкленд, цит. выше, стр. 519.

напряжения от безразмерного параметра  $\sqrt{E/\sigma_T} t/b$  — результат, который находится в полном соответствии с опытами Секлера.

Вышеупомянутые опыты проводились над отдельными панелями. Кроме того, испытывались пластинки, которые были разделены в двух панелях с помощью продольного ребра жесткости, расположенного в середине пластинки. Эти пластинки имели приблизительно вдвое большую прочность, чем однородная пластинка. Образцы после достижения критической нагрузки выпучиваются по двум полу-волнам.

### 127. Распространение теории Маргерра на пластинки, находящиеся под действием продольного сжатия и нормального давления

В своей работе Маргерр исследовал только влияние продольного сжатия, действующего в плоскости пластинки. Однако его метод можно распространить на случай действия нормального давления, равномерно распределенного по поверхности пластинки. Эту задачу мы решим в этом параграфе, используя аналитические результаты §§ 121 и 122. Леви<sup>1)</sup> и Ван<sup>2)</sup> дали более точные решения, необходимые для исследования поведения тонких пластинок, используемых в авиационных конструкциях.

Задача о пластинках, находящихся под действием продольного сжатия и нормальных нагрузок, возникает при проектировании обшивки корпуса корабля. Полученные в этом параграфе теоретические результаты используются в следующем параграфе для того, чтобы делать важные выводы относительно предела применимости упрощенных методов расчета, предложенных для расчета внешней обшивки корпусов кораблей.

Предположим, что прогиб  $w$  пластинки, находящейся под одновременным действием равномерно распределенного нормального давления  $p$  и продольного сжатия  $\sigma_A$ , с достаточной точностью можно снова выразить при помощи уравнения (875):

$$w = f \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}. \quad (925)$$

Наличие бокового давления  $p$  не влияет на уравнение (879) для функции напряжений  $F$ , удовлетворяющей дифференциальному уравнению (864) задачи о больших прогибах, и поэтому оно остается в силе. Следовательно, уравнения (880) — (883), выведенные из уравнения (879), справедливы и в данном случае. Прогиб  $f$ , фигурирующий в этих уравнениях, можно определить на основании теоремы

<sup>1)</sup> Леви, цит. ниже, стр. 524.

<sup>2)</sup> Wang C. T., Nonlinear Large — deflection Boundary — value Problems of Rectangular Plates, NACA Tech. Note 1425, 1948.

о стационарном значении потенциальной энергии. Значение энергии деформаций  $V$  выражается уравнением (887), а потенциальная энергия  $U_w$  внешнего давления  $p$  равна

$$U_w = - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} p w \, dx \, dy.$$

Вводя уравнение (925), находим:

$$U_w = - \frac{4pab}{\pi^2} f. \quad (926)$$

Из условия

$$\frac{\partial (V + U_w)}{\partial f} = 0 \quad (927)$$

получим следующее уравнение относительно  $f$ :

$$\frac{Eabt}{1-\nu^2} \left\{ -\frac{\pi^2 f}{4b^2} \left[ \varepsilon_1 \left( \frac{b^2}{a^2} + \nu \right) + \varepsilon_2 \left( 1 + \nu \frac{b^2}{a^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\pi^4 f^3}{64b^4} \left[ (3-\nu^2) \left( 1 + \frac{b^4}{a^4} \right) + 4\nu \frac{b^2}{a^2} \right] + \frac{\pi^4 f^2}{48b^4} \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right)^2 \right\} = \frac{4pab}{\pi^2}. \quad (928)$$

Предполагая, что отношение сторон  $b/a > 0,7$ , пластинка выпучивается по одной полуволне ( $n=1$ ) и из уравнения (634) получим критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  для пластинки под действием продольного сжатия в направлении  $x$ :

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2. \quad (929)$$

Следовательно, последний член левой части уравнения (928) можно заменить выражением

$$(1-\nu^2) \frac{\pi^2}{4b^2} \frac{\sigma_{кр}}{E} \beta^2 f.$$

Обозначая  $\beta = b/a$ , получим:

$$\frac{\pi^2 f^3}{16b^2} [(3-\nu^2)(1+\beta^4) + 4\nu\beta^2] - \\ - f \left[ \varepsilon_1 (\nu + \beta^2) + \varepsilon_2 (1 + \nu\beta^2) - (1-\nu^2) \beta^2 \frac{\sigma_{кр}}{E} \right] = \frac{16(1-\nu^2)b^2}{\pi^4 E t} p. \quad (930)$$

Вводя значения  $p_1 = \sigma_A$  и  $p_2 = 0$  в уравнения (882), имеем:

$$\varepsilon_1 (\beta^2 + \nu) + \varepsilon_2 (1 + \nu\beta^2) = \frac{\sigma_A}{E} \beta^2 (1 - \nu^2) + \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} (\beta^4 + 2\nu\beta^2 + 1); \quad (931)$$

отсюда и уравнение (930) примет следующий вид:

$$\frac{\pi^2 f^3}{16b^2} (1 + \beta^4) - \frac{f\beta^2}{E} (\sigma_A - \sigma_{кр}) = \frac{16b^2 p}{\pi^4 E t}.$$

Удобно написать это уравнение в следующем безразмерном виде:

$$\left(\frac{f}{t}\right)^3 - \frac{16}{\pi^2} \frac{\beta^2}{1+\beta^4} \left(\frac{\sigma_A}{\sigma_{кр}} - 1\right) \frac{\sigma_{кр}}{E} \frac{b^2}{t^2} \left(\frac{f}{t}\right) - \frac{256}{\pi^6} \frac{1}{1+\beta^4} \frac{pb^4}{Et^4} = 0. \quad (932)$$

Используя уравнение (929), вычислим

$$\frac{\sigma_{кр}}{E} \frac{b^2}{t^2} = \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2.$$

В результате, подставляя это выражение во второй член уравнения (932), получим:

$$\left(\frac{f}{t}\right)^3 - \frac{4}{3(1-\nu^2)} \frac{(1+\beta^2)^2}{1+\beta^4} \left(\frac{\sigma_A}{\sigma_{кр}} - 1\right) \left(\frac{f}{t}\right) - \frac{256}{\pi^6} \frac{1}{1+\beta^4} \frac{pb^4}{Et^4} = 0, \quad (933)$$

пригодное для  $\beta = b/a > 0,7$ . Это уравнение третьей степени относительно  $f/t$  и имеет один и только один действительный, положи-

тельный корень, который можно найти при заданных значениях отношений  $\beta$ ,  $\sigma_A/\sigma_{кр}$  и  $pb^4/Et^4$  при помощи любого известного метода решения уравнений третьей степени.

Уравнение (933) было решено для квадратных пластинок ( $\beta = 1$ ) при  $\sigma_A = 0$  и различных значениях отношения  $pb^4/Et^4$ . На рис. 251 нанесены значения отношения  $f/t$  в зависимости от  $pb^4/Et^4$ . Для сравнения на рисунке пунктирной линией проведена кривая, построенная на основе точной теории Леви<sup>1)</sup>. При  $\sigma_A = 0$

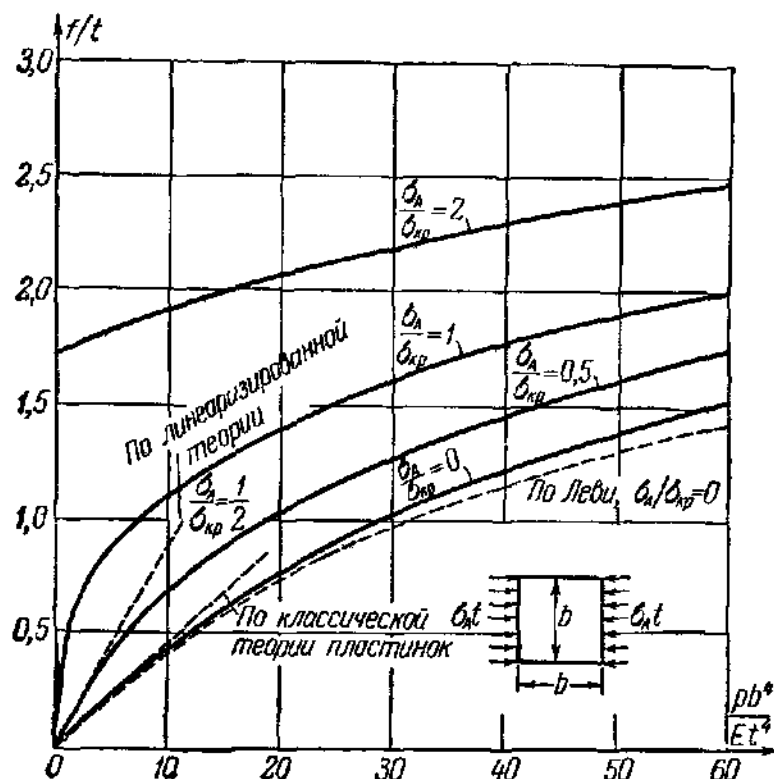


Рис. 251.

обе кривые лишь незначительно расходятся, что показывает на достаточную точность уравнения (933) при условии, если  $pb^4/Et^4 < 60$ , которое всегда выполняется для обшивки корпуса корабля. Для того чтобы показать влияние продольных сжимающих напряжений  $\sigma_A$  на нормально нагруженные пластинки, на рис. 251 приведены также кривые значений  $f/t$ , построенные для  $\sigma_A/\sigma_{кр} = 0,5; 1$  и  $2$ .

<sup>1)</sup> Levy S., Bending of Rectangular Plates with Large Deflections, NACA Tech. Note 846, 1942; NACA Tech. Rept. 737, 1942, стр. 139.



Находя числовое значение  $f$  из уравнений (880), определим значения мембранных напряжений  $\bar{\sigma}_x$  и  $\bar{\sigma}_y$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \sigma_A - \frac{E\pi^2 f^2}{8a^2} \cos \frac{2\pi y}{b}; \\ \bar{\sigma}_y &= -\frac{E\pi^2 f^2}{8b^2} \cos \frac{2\pi x}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (934)$$

Положительные значения  $\bar{\sigma}_x$  и  $\bar{\sigma}_y$  соответствуют сжатию. Напряжения  $\bar{\sigma}_x$  и  $\bar{\sigma}_y$  достигают своих максимальных значений соответственно на краях  $x = \pm a/2$  и  $y = \pm b/2$ .

Мембранные напряжения, определенные вышеприведенными уравнениями, равномерно распределены по толщине  $t$  полосы пластинки единичной ширины. На них мы должны наложить изгибающие напряжения, обусловленные кривизной пластинки. Эти напряжения линейно меняются с расстоянием  $z$  волокна от срединной плоскости пластинки. Отсюда внешние фибровые напряжения  $\sigma_{xB}$  и  $\sigma_{yB}$  равны

$$\begin{aligned} \sigma_{xB} &= \frac{6}{t^2} M_x = -\frac{6D}{t^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_{yB} &= \frac{6}{t^2} M_y = -\frac{6D}{t^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \end{aligned}$$

Используя уравнение (925), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xB} &= \frac{\pi^2 E t f}{2(1-\nu^2)a^2} \left( 1 + \nu \frac{a^2}{b^2} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}; \\ \sigma_{yB} &= \frac{\pi^2 E t f}{2(1-\nu^2)b^2} \left( 1 + \nu \frac{b^2}{a^2} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (935)$$

Максимальное значение изгибающих напряжений получается в центре пластинки, где  $\cos \frac{\pi x}{a} = 1$  и  $\cos \frac{\pi y}{b} = 1$ .

**Защемленные пластинки.** Уэй<sup>1)</sup> впервые дал теорию больших прогибов защемленных пластинок, находящихся под действием нормального давления; он применил метод Ритца, используя полиномы в качестве функций разложения прогиба в ряд. Не так давно Леви<sup>2)</sup> рассмотрел задачу о квадратной пластинке, находящейся под действием нормального давления; для решения дифференциальных уравнений задачи больших прогибов он применил метод рядов Фурье. Значения прогибов и мембранных напряжений, полученные соответственно из теорий Уэя и Леви, полностью совпадают. В другой

1) Way S., Uniformly Loaded, Clamped, Rectangular Plates with Large Deflection, Proc. 5th Intern. Congr. Applied Mechanics, Cambridge, Mass., 1938, стр. 123.

2) Levy S., Square Plate with Clamped Edges under Normal Pressure Producing Large Deflections, NACA Tech. Note 847, 1942; NACA Tech. Rept. 740, 1942, стр. 209.

работе Леви и Гринман<sup>1)</sup> применили метод рядов к задаче о пластинках с отношением длины к ширине, равным 1,5:1. Бенгстон<sup>2)</sup> исследовал защемленные пластинки, находящиеся под одновременным действием продольных сжимающих напряжений и нормального давления. Как выше было упомянуто, Бенгстон частично основывал свое исследование на произвольных предположениях, поэтому правильность полученных им результатов является сомнительной.

В следующем параграфе увидим, что условия, преобладающие в обшивке корабля, таковы, что величины прогибов защемленных пластинок не достигают значений, требующих применения теории больших прогибов. Следовательно, корабельный инженер не нуждается в такой теории; его требования могут быть удовлетворены более простой теорией, изложенной в следующем параграфе. Этот факт устраняет необходимость детального рассмотрения теорий больших прогибов защемленных пластинок.

## 128. Расчет внешней обшивки корпуса корабля

Внешняя обшивка корпуса корабля состоит из прямоугольных панелей пластинки, нагруженных нормальным давлением окружающей воды; кроме того, пластинки, расположенные вблизи днища корабля, могут находиться в состоянии продольного сжатия, обусловленного изгибом корпуса корабля.

В предшествующем параграфе мы рассмотрели теорию больших прогибов прямоугольных пластинок, находящихся под действием продольного сжатия и нормального давления; эта теория могла бы быть использована для расчета обшивки корпуса корабля. Однако целесообразно рассмотреть, действительно ли необходимо использовать теорию больших прогибов или условия таковы, что достаточно применять более простые теории, не учитывающие большие прогибы. Следует помнить, что при помощи классической теории пластинок<sup>3)</sup>, не учитывающей большие прогибы, обычно исследуется только обшивка корпуса корабля, находящаяся под действием нормального давления; с другой стороны, для исследования послекритического поведения пластинок под действием продольного сжатия необходимо применять более сложную теорию больших прогибов. Для того чтобы точно определить, какой теорией следует пользоваться при расчете внешней обшивки корпуса корабля, рассмотрим некоторые основные факты.

---

<sup>1)</sup> Levy S., Greenman, S., Bending with Large Deflection of a Clamped Rectangular Plate with Length — Width Ratio of 1.5 under Normal Pressure, NACA Tech. Note 853, 1942.

<sup>2)</sup> Бенгстон, цит. выше стр. 502.

<sup>3)</sup> Shade H. A., Design Curves for Cross — stiffened Plating under Uniform Bending Load, Proc. Soc. Naval Architects Marine Engrs, 1941.

При исследовании напряженного состояния любой конструкции можно использовать различные варианты теории; в зависимости от требуемой точности эти теории отличаются в предположениях относительно величины прогибов. Для нашей цели мы разделим эти теории на три группы.

**Группа 1.** Теории этой группы предполагают, что прогибы конструкции настолько малы, что степенями высокого порядка прогиба можно пренебречь; прогибы никакого влияния не оказывают на напряжения. Классическая теория тонких пластинок принадлежит этой группе. Здесь применим принцип наложения.

**Группа 2.** Предполагая прогибы достаточно малыми, чтобы пренебречь их степенями выше первой, для некоторых типов конструкций можно принять во внимание влияние деформаций на напряжения путем удержания в расчете произведения внешних сил и прогибов. Такие теории мы назовем «линеаризированными», вследствие того, что они линейны относительно прогибов. В таких теориях деформации не являются пропорциональными внешним нагрузкам; поэтому принцип наложения неприменим<sup>1)</sup>.

**Группа 3.** В теориях этой группы в расчете удерживаются по крайней мере прогибы в первой и второй степени. Разумеется, принцип наложения в этом случае неприменим.

Рассматривая обшивку корпуса корабля под действием нормального давления, но не подверженную действию продольного сжатия, классическая теория пластинок при изгибе, обусловленном нормальными нагрузками, принадлежит к группе 1. Мы уже рассмотрели теорию больших прогибов (группа 3), приводящую к дифференциальным уравнениям (864) и (865). Для этой частной задачи не существует теории, принадлежащей к группе 2, ибо при малых значениях  $w$  и  $F$  уравнение (865) идентично классическому дифференциальному уравнению пластинки. Было упомянуто, что пластинки корпуса корабля, находящиеся под действием только нормального давления, рассчитываются на основе классической теории пластинок, отсюда возникает вопрос относительно предела применимости этой теории. Ответ на этот вопрос можно получить, рассматривая рис. 251, где кривая при  $\sigma_d/\sigma_{кр} = 0$  дает прогиб  $f$  квадратной пластинки согласно теории больших прогибов. Значения прогиба, найденные по классической теории, приведены в виде прямой линии, которая должна касаться вышеупомянутой

<sup>1)</sup> Элементарным примером этого случая является задача о стержне, находящемся под одновременным действием сжимающей силы  $P$  и поперечных нагрузок  $p$ . Дифференциальное уравнение задачи будет

$$EJy^{IV} + Py'' = p.$$

В теории 1 группы членом  $Py''$  необходимо пренебречь. Этот член обуславливает то обстоятельство, что деформации не являются пропорциональными нагрузкам.

кривой в начале координат, так как обе теории для очень малых значений прогибов и нагрузок совпадают. Очевидно, что расхождение между кривой и касательной практически не является существенным, пока значение отношения  $f/t \leq 0,5$ . Это показывает, что классическую теорию можно применять для расчетных целей при значениях прогибов  $f$ , равных половине толщины пластинки; однако для больших прогибов классическая теория дает значения прогибов и напряжений на 10% или более выше действительных значений.

Рассмотрим теперь случай нормальной нагрузки и одновременного действия продольного сжатия. На рис. 251 показана кривая при  $\sigma_A/\sigma_{кр} = 1/2$ , построенная на основе теории больших прогибов. Если к этой задаче применить теорию, принадлежащую к группе 1, то снова получим классическую теорию пластинок. Вследствие принципа наложения, продольное сжатие вызывает напряжения  $\sigma_A$ , но не вызывает прогибов, поэтому эта теория дает те же значения прогиба, что и при отсутствии продольных напряжений. Из рис. 251 отчетливо видно, что классическая теория и теория больших прогибов для малых значений прогиба дают различные результаты. Однако можно получить хорошую аппроксимацию теории больших прогибов, заменяя кривую при  $\sigma_A/\sigma_{кр} = 1/2$  на рис. 251 касательной, проведенной через начало координат. Эта линия соответствует «линеаризированной» теории, принадлежащей к группе 2. Линеаризованную теорию можно получить из теории больших прогибов, отбрасывая члены, содержащие  $f$  в степени выше первой в окончательном уравнении (933). Таким образом, получим:

$$\frac{4}{3(1-\nu^2)} \frac{(1+\beta^2)^2}{1+\beta^4} \left(1 - \frac{\sigma_A}{\sigma_{кр}}\right) \frac{f}{t} = \frac{256}{\pi^6(1+\beta^4)} \frac{pb^4}{Et^4}. \quad (936)$$

Результат такого упрощения при  $\sigma_A/\sigma_{кр} = 1/2$  приведен на рис. 251; видно, что линеаризованная теория дает достаточно точные результаты до тех пор, пока  $f/t \leq 1/2$ . Несмотря на то, что на рис. 251 приведены только значения прогиба для квадратных пластинок, утверждение о том, что линеаризованную теорию можно использовать при  $f/t \leq 1/2$ , верно также для других значений отношения сторон до тех пор, пока  $\sigma_A < \sigma_{кр}$ . Линеаризованная теория непригодна в случае, если значение  $\sigma_A$  близко к значению  $\sigma_{кр}$ , но при  $\sigma_A > \sigma_{кр}$  становится опять справедливой. Однако этот факт не имеет большого значения при расчете обшивки корпуса корабля, так как  $\sigma_A$  всегда меньше  $\sigma_{кр}$ .

Уравнению (936), которое представляет собой линеаризованное соотношение между прогибом  $f$  и нагрузками  $\sigma_A$  и  $p$ , можно дать очень важную и полезную интерпретацию. Это уравнение можно применять для пластинок, не находящихся под действием продольного сжатия, полагая  $\sigma_A = 0$ . Обозначая для этого случая прогиб

через  $f_1$ , имеем:

$$\frac{4}{3(1-\nu^2)} \frac{(1+\beta^2)^2 f_1}{(1+\beta^4)t} = \frac{256}{\pi^3(1+\beta^4)} \frac{pb^4}{Et^4}. \quad (937)$$

Так как правые части уравнений (936) и (937) идентичны, то левые части также должны быть идентичными, и после сокращений получим:

$$f = \frac{f_1}{1 - \frac{\sigma_A}{\sigma_{кр}}}. \quad (938)$$

Это уравнение имеет большое практическое значение. Оно подтверждает тот факт, что прогиб  $f$  пластинки, находящейся одновременно под действием нормального давления и продольного сжатия, можно найти, зная прогиб  $f_1$  той же самой пластинки под действием только нормального давления. Нет необходимости определять прогиб  $f_1$  из линеаризированной теории: его можно найти на основе классической теории пластинок, результаты которой известны и легко доступны. Для того, чтобы найти прогиб  $f$ , нужно умножить прогиб  $f_1$ , найденный из теории пластинок, на «коэффициент увеличения»  $m$ , учитывающий влияние продольной силы. Так как изгибающие напряжения пропорциональны прогибам, коэффициент  $m$  применяется также и для определения изгибающих напряжений. Значение этого коэффициента увеличения равно

$$m = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_A}{\sigma_{кр}}}. \quad (939)$$

Все до сих пор использованные уравнения в этом параграфе относятся к свободно опертым пластинкам и выведены довольно длинным путем из теории больших прогибов. В последующих параграфах более прямым путем выведем подобные линеаризованные уравнения, применяемые также для защемленных пластинок. Прежде чем приступить к выводу этих уравнений, рассмотрим вопрос о том, применима ли линеаризованная теория для обшивки корпуса корабля средней толщины.

Из рассмотрения рис. 251 мы заключили, что линеаризованная теория для свободно опертых пластинок достаточно точна, если  $f/t \leq 1/2$ . Необходимо помнить, что член, содержащий третью степень отношения  $f/t$  в уравнении (933), который учитывает влияние больших прогибов, обусловлен мембранными напряжениями, действующими в плоскости пластинки. В связи с тем, что величина этих мембранных напряжений, по существу, является функцией прогиба  $f$  в центре пластинки, можно заключить, что мембранные напряжения даже в случае защемленных пластинок оказывают

незначительное влияние при условии, если  $f/t \leq 1/2$ . Этот вывод можно подтвердить теорией Бенгстона для защемленных пластинок<sup>1)</sup>.

Наибольшими значениями прогиба  $f$ , которые необходимо рассмотреть, являются значения, при которых материал пластинок начинает течь. Эти максимальные значения прогиба, при которых имеет место текучесть, определены диаграммой, построенной Шейдом<sup>2)</sup> для прямоугольных пластинок под действием нормальной нагрузки, и даны в таблице 50. Наибольшие возможные значения отношения  $f/t$  являются функциями  $\sigma_T/E$  и отношений  $a/t$  или  $b/t$  в зависимости от того, какое из них меньше.

Таблица 50. Максимальные значения отношения  $f/t$  для прямоугольных пластинок под действием нормальных нагрузок

Все четыре края	Отноше- ние %	Значение отношения $f/t$ для любого материала	Значение отношения $f/t$ для высоко- прочной стали	
			$\sigma_T = 3177 \text{ кг/см}^2$ , $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$	$a/t = 60$ , $b/t = 60$
свободны опоры	$1/3$	$0,186 (a/t)^2 \sigma_T/E$	$2,83 \cdot 10^{-4} (a/t)^2$	1,01 *)
	1	$0,154 (b/t)^2 \sigma_T/E$	$2,34 \cdot 10^{-4} (b/t)^2$	0,84 **)
	3	$0,186 (b/t)^2 \sigma_T/E$	$2,83 \cdot 10^{-4} (b/t)^2$	1,01 **)
защемлены	$1/3$	$0,056 (a/t)^2 \sigma_T/E$	$0,94 \cdot 10^{-4} (a/t)^2$	0,34 *)
	1	$0,042 (b/t)^2 \sigma_T/E$	$0,64 \cdot 10^{-4} (b/t)^2$	0,23 **)
	3	$0,056 (b/t)^2 \sigma_T/E$	$0,94 \cdot 10^{-4} (b/t)^2$	0,34 **)

\*)  $a/t = 60$ .

\*\*)  $b/t = 60$ .

В последнем столбце таблицы 50 приведены наиболее вероятные значения отношения прогиба к толщине  $f/t$  для тончайших пластинок из высокопрочной стали. Для защемленных пластинок значение  $f/t$  меньше  $1/2$ , однако это неверно для свободно опертых пластинок, где значение  $f/t$  может достигать значения единицы. Данные, приведенные в таблице 50, применимы для пластинок, не находящихся под действием продольного сжатия; если принять во внимание, что наличие продольных напряжений величиной, например,  $\sigma_A = \sigma_T/4$  или  $\sigma_A = \sigma_T/2$ , уменьшает значение допустимого изгибающего напряжения и, следовательно, уменьшает в  $3/4$  или  $1/2$  раза вышеприведенные значения этих величин, то можно заключить, что в большинстве

<sup>1)</sup> Бенгстон, цит. выше, стр. 502.

<sup>2)</sup> Шейд, цит. выше, стр. 526.

случаев значение  $f/t$  будет меньше  $1/2$ , но могут иметь место случайные значения отношения  $f/t$  вплоть до 0,8.

Суммируя, можно указать, что линеаризированная теория всегда применима в случае защемленных прямоугольных пластинок, в то время как для свободно опертых панелей вследствие больших прогибов она не верна. В случае свободно опертых панелей, когда значение  $f/t > 0,5$ , линеаризированная теория дает слишком большие значения для прогибов и моментов. В следующем параграфе увидим, что линеаризированную теорию можно путем введения соответствующего поправочного коэффициента использовать также в области значений отношения  $0,5 \leq f/t \leq 0,8$ .

### 129. Линеаризированная теория расчета внешней обшивки корпуса корабля

В предыдущем параграфе мы установили, что линеаризированная теория достаточно точна для расчета обшивки корпуса, за исключением довольно редких случаев свободно опертых панелей, когда значения отношения  $f/t$  могут превышать  $1/2$ . В этом параграфе мы рассмотрим хорошо известную линеаризированную теорию и упростим ее для расчетных целей введением понятия о коэффициенте увеличения, упомянутом в предыдущем параграфе.

Дифференциальное уравнение линеаризированной теории имеет вид <sup>1)</sup>

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{t}{D} \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{p}{D}. \quad (940)$$

Это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение упругого выпучивания [уравнение (600)], в котором добавлен член, зависящий от нагрузки  $p/D$ . Оно является линейным относительно  $w$  и его производных, но содержит произведение нагрузки на прогиб, которое обуславливает нелинейность связи между нагрузками и прогибами.

В случае свободно опертых прямоугольных пластинок уравнение (940) решено при помощи рядов <sup>2)</sup>, но полученные результаты нельзя представить в табулированном виде и в виде диаграмм, пригодных для практических расчетов. Решения для защемленных пластинок не имеются. В этом параграфе при помощи энергетического метода получим приближенные решения задачи для различных условий опирания и покажем, каким образом в этих выводах появляется коэффициент увеличения.

<sup>1)</sup> Timoshenko S., Theory of Plates and Shells, стр. 301, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, 1940, русский перевод: Тимошенко С. П., Пластинки и оболочки, М., Гостехиздат, 1948, стр. 289.

<sup>2)</sup> Там же, стр. 290, 294.

Рассмотрим прямоугольную пластинку (рис. 252), находящуюся под действием нормального давления  $p$  и продольных сил  $\sigma_A$  в направлении  $x$ . Для того чтобы наиболее простым путем получить выражение для потенциальной энергии системы, вычислим изменение

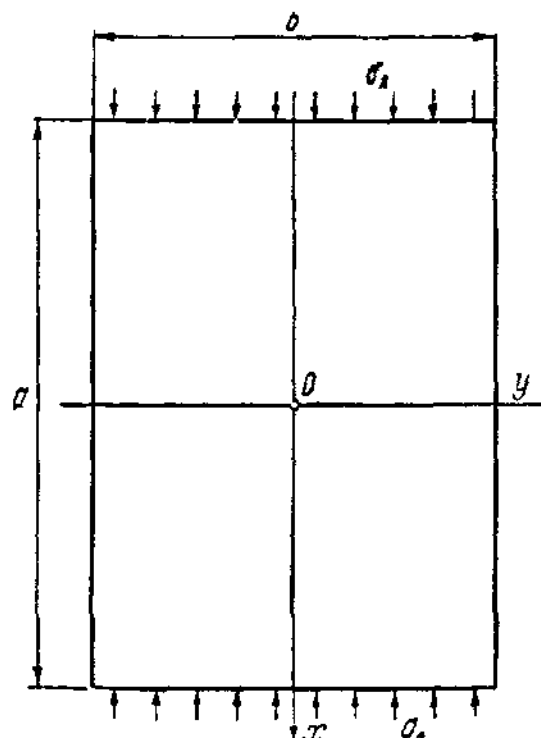


Рис. 252.

потенциальной энергии в случае, когда на пластинке действуют только продольные силы  $\sigma_A$ . Если мы теперь приложим нормальные нагрузки  $p$ , пластинка будет изгибаться и изменение энергии деформаций изгиба пластинки получим из уравнения (869). В общем случае мы должны были бы иметь также изменение энергии деформаций, обусловленное мембранными напряжениями, но ввиду того что  $\sigma_A$  неизменно, а высокими степенями  $w$  мы пренебрегаем, то изменение мембранной энергии деформаций равно нулю; имеем:

$$V = \frac{D}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy. \quad (941)$$

Изменение потенциальной энергии  $U_w$  внешних нагрузок  $p$  и  $\sigma_A$  равно

$$U_w = - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[ p w + \frac{\sigma_A}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy. \quad (942)$$

Первый член этого уравнения представляет собой изменение потенциальной энергии нагрузок  $p$ ; второй член — изменение потенциальной энергии продольных сил  $\sigma_A$ , которое обусловлено только укорочением пластинки вследствие изгиба.

Следовательно, потенциальная энергия  $U$  равна

$$U = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[ \frac{D}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \frac{\sigma_A}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - p w \right] dx dy. \quad (943)$$

Представим  $w$  в виде ряда, мы можем методом Ритца определить прогиб пластинки. Используя только первый член такого ряда

$$w = c \varphi(x, y), \quad (944)$$



где  $c$  обозначает неизвестную постоянную, а  $\varphi(x, y)$  — функцию, зависящую от  $x$  и  $y$  и удовлетворяющую граничным условиям из уравнения (93) можно определить прогиб методом Тимошенко<sup>1)</sup>. В связи с тем, что внешняя работа  $W$  в уравнении (93) равна<sup>2)</sup>  $U_w$ , это уравнение можно написать просто в виде

$$U = 0. \quad (945)$$

Таким образом, подставляя уравнение (944) в (943), определим неизвестную постоянную  $c$ :

$$c = \frac{\rho \iint \varphi \, dx \, dy}{\frac{D}{2} \iint \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 \, dx \, dy - \frac{\sigma_A}{2} \iint \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \, dx \, dy}. \quad (946)$$

Пределы интегрирования здесь для краткости опущены. Уравнение (946) можно использовать также в случае пластинки, не находящейся под действием продольного сжатия  $\sigma_A$ . В этом случае, обозначая через  $w_1$  прогиб пластинки, а через  $c_1$  — значение  $c$ , имеем:

$$w_1 = c_1 \varphi(x, y); \quad (947)$$

$$c_1 = \frac{\rho \iint \varphi \, dx \, dy}{\frac{D}{2} \iint \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 \, dx \, dy}. \quad (948)$$

Разделив уравнение (946) на (948), получим следующее соотношение:

$$c = m c_1, \quad (949)$$

где коэффициент увеличения  $m$  определяется выражением

$$m = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_A}{D} \frac{\iint \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \, dx \, dy}{\iint \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 \, dx \, dy}}. \quad (950)$$

Из уравнений (944), (947) и (949) заключаем, что

$$w = m w_1. \quad (951)$$

Это означает, что значения прогиба  $w$  можно найти, зная значения  $w_1$  прогиба пластинки, находящейся только под действием нормальных нагрузок. Так как изгибающие напряжения пропорциональны вторым производным от  $w_1$ , то коэффициент увеличения  $m$  можно применять также для определения и этих напряжений. Обозначая максимальные

<sup>1)</sup> См. стр. 91.

<sup>2)</sup> См. сноску на стр. 92.

фибровые напряжения в пластинке в направлениях  $x$  и  $y$ , обусловленные комбинированным действием нормальной нагрузки и продольного сжатия, соответственно через  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  и соответствующие изгибающие напряжения в пластинке, обусловленные только нормальными нагрузками, через  $\sigma_{xB}$  и  $\sigma_{yB}$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_A + m\sigma_{xB}; \\ \sigma_y &= m\sigma_{yB}. \end{aligned} \right\} \quad (952)$$

Соотношения (951) и (952) основываются на предположении, согласно которому для выражения прогиба достаточна одна координатная функция. В случае использования большего числа координатных функций получим более сложные выражения, но вследствие того, что первая координатная функция, если она правильно выбрана, имеет преобладающее значение, уравнения (951) и (952) в некоторых, установленных ниже пределах представляют собой очень хорошую аппроксимацию.

Таблица 51. Координатные функции  $\varphi$  и коэффициент  $k$  для разных условий опирания пластинки

	Координатная функция $\varphi$	$k$
Случай 1 (рис. 253)	$(1 + \cos 2\pi x/a)(1 + \cos 2\pi y/b)$	$4a^2/b^2 + 8/3 + 4b^2/a^2$
Случай 2 (рис. 254)	$(\cos \pi x/a)(\cos \pi y/b)$	$a^2/b^2 + 2 + b^2/a^2$
Случай 3 (рис. 255)	$(1 + \cos 2\pi x/a) \cos \pi y/b$	$3a^2/4b^2 + 1 + 4b^2/a^2$
Случай 4 (рис. 256)	$\cos \pi x/a (1 + \cos 2\pi y/b)$	$16a^2/3b^2 + 8/3 + b^2/a^2$

Нет необходимости вычислять прогиб  $w_1$  и напряжения  $\sigma_{xB}$  и  $\sigma_{yB}$  в пластинке под действием только нормальных нагрузок при помощи энергетического метода, так как значения этих прогибов и напряжений можно легко получить из диаграмм Шэйда<sup>1)</sup>. Для того чтобы использовать уравнения (951) и (952) вместе с этими диаграммами, необходимо определить значение общего выражения (950) коэффициента увеличения при различных граничных условиях. Коэффициент увеличения можно выразить в следующем общем виде:

$$m = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_A}{\frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^3 k}}. \quad (953)$$

1) Шэйд, цит. выше, стр. 526.

Для стали это уравнение примет вид

$$m = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_A}{26\,750 (t/b)^2 k}}, \quad (954)$$

где  $\sigma_A$  дано в к. фунтах на дюйм<sup>2</sup>. В таблице 51 приведены выражения выбранных координатных функций и коэффициента  $k$ , полученные для четырех условий опирания пластинки:

**Случай 1.** Все края защемлены (рис. 253).

**Случай 2.** Все края свободно оперты (рис. 254).

**Случай 3.** Нагруженные края защемлены, продольные края свободно оперты (рис. 255).

**Случай 4.** Нагруженные края свободно оперты, продольные края защемлены (рис. 256).

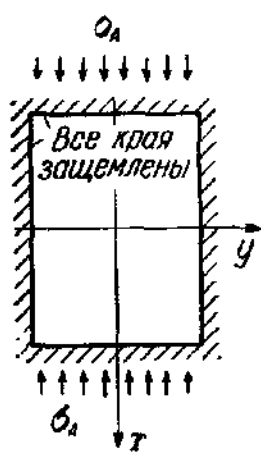


Рис. 253.

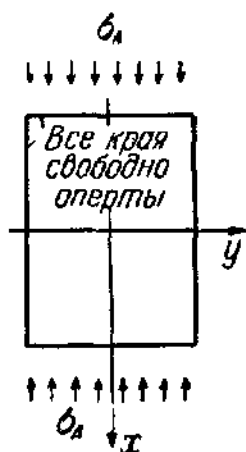


Рис. 254.

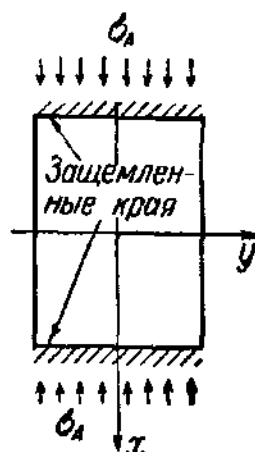


Рис. 255.

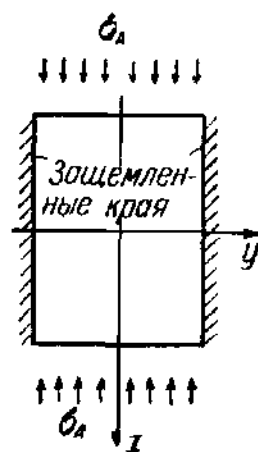


Рис. 256.

В таблице 52 приведены числовые значения коэффициента  $k$  для различных значений отношения сторон пластинки  $a/b$ . Необходимо помнить, что выражение  $26\,750 (t/b)^2 k$  в уравнении (954) имеет размерность напряжения и в некоторых случаях равно или приблизительно равно критическому напряжению пластинки, а коэффициент  $k$  представляет собой коэффициент устойчивости пластинки. Однако это имеет место не всегда; в случае неквадратных пластинок значения  $k$ , приведенные в таблице 52, могут существенно отличаться от значений коэффициента  $k$  устойчивости пластинки.

**Пределы применения коэффициента увеличения  $m$ .** Уравнения (951) — (954) применимы только при условии, если удовлетворены следующие три условия:

1. Значение максимального прогиба  $f$ , вычисленное с помощью уравнения (951), должно быть меньше  $t/2$ , где  $t$  — толщина пластинки.

2. Продольное сжимающее напряжение  $\sigma_A$  должно быть меньше предела пропорциональности материала.

3. Продольное сжимающее напряжение  $\sigma_A$  должно быть меньше критического напряжения  $\sigma_{кр}$  пластинки.

Таблица 52. Значения  $k$  в уравнениях (953) и (954)

$a/b$	Случай 1 (рис. 253)	Случай 2 (рис. 254)	Случай 3 (рис. 255)	Случай 4 (рис. 256)
0,4	28,31	8,41	26,12	9,77
0,6	15,22	5,14	12,39	7,37
0,8	11,48	4,20	7,72	7,64
1,0	10,67	4,00	5,75	9,00
1,2	11,21	4,13	4,84	11,04
1,4	12,55	4,47	4,51	13,63
1,6	14,47	4,95	4,48	16,71
1,8	16,86	5,55	4,67	20,26
2,0	19,67	6,25	5,00	24,25
2,2	22,86	7,05	5,47	28,69
2,4	26,40	7,93	6,00	33,56
2,6	30,30	8,91	6,67	38,87
2,8	34,54	9,97	7,40	44,61
3,0	39,11	11,11	8,19	50,78
3,2	44,02	12,34	9,08	57,38
3,4	49,26	13,65	10,03	64,41
3,6	54,82	15,04	11,04	71,87
3,8	60,71	16,51	12,11	79,73
4,0	66,92	18,06	13,25	88,06

Обоснование первого условия подробно рассматривалось в предыдущем параграфе. Для того чтобы оценить ошибку, допущенную при применении теории в области значений  $0,5 < f/t < 0,8$  в случае

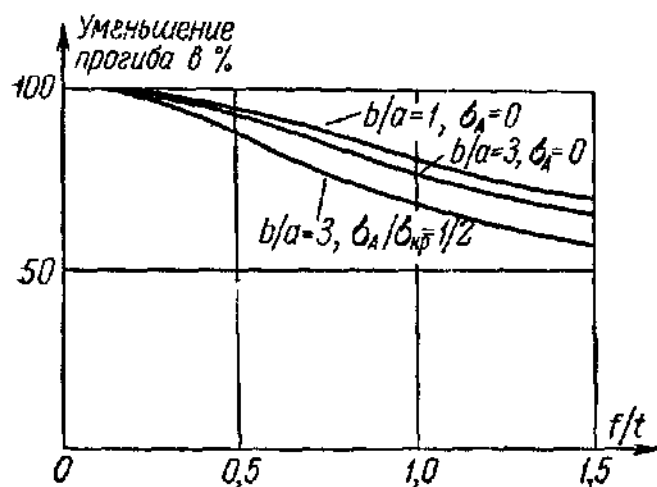


Рис. 257.

свободно опертых панелей пластинок, на рис. 257 приведены значения получающейся ошибки при применении линеаризированной теории. На рисунке показано уменьшение прогибов в случае применения более точного уравнения (933) вместо линеаризированной теории. Значения этого уменьшения нанесены в зависимости от  $f/t$ , согласно линеаризированной теории, в виде кривых для  $b/a = 1$  и 3. Из рис. 257 видно, что для области значений

$0,6 < f/t < 0,8$  ошибку, возникающую при использовании линеаризированной теории, можно несколько уменьшить, используя коэффициент увеличения, равный 0,9  $m$  вместо  $m$ .

Второе условие необходимо вследствие предположения о вполне упругом поведении пластинки. Это условие обычно будет удовлетворено, так как если значение  $\sigma_A$  располагалось выше предела упругости, то пластинка воспринимала бы лишь незначительную добавочную нормальную нагрузку.

Третье условие необходимо в связи с тем, что при введении понятия коэффициента увеличения существенно предположение о том, что прогиб можно выразить с помощью одной-единственной координатной функции, приведенной в таблице 51; в большинстве случаев это предположение неверно, если  $\sigma_A \geq \sigma_{кр}$ ; при этом уравнения (952) дают намного меньшие значения напряжений. При расчете обшивки корпуса случай  $\sigma_A \geq \sigma_{кр}$  возможно не будет иметь место на практике, так как, согласно таблице 49, предельная нагрузка пластинок с отношением сторон к толщине  $a/t < 60$  или  $b/t < 60$  на 25% больше критической нагрузки. Очевидно, такие пластинки не в состоянии воспринимать сколько-нибудь заметной нормальной нагрузки  $p$ , положенной на продольные сжимающие напряжения  $\sigma_A \geq \sigma_{кр}$ .

В таблице 52 приведены значения коэффициента  $k$ , необходимые для вычисления значения коэффициента увеличения свободно опертых и защемленных пластинок. В действительности обшивка корпуса обычно представляет собой неразрезную многопролетную пластинку. В случае равных пролетов и постоянной нагрузки  $p$  из рис. 258 ясно, что каждую отдельно взятую панель для целей определения напряженного состояния можно рассматривать как защемленную



Рис. 258.

на краях пластинку. При вычислении критического напряжения  $\sigma_{кр}$  для проверки выполнения условия 3 допустимость такого предположения является спорной. Неразрезная пластинка, не подверженная действию нормальной нагрузки, выпучится по волнам, направленным попеременно вниз и вверх, как это показано на рис. 259. В случае действия достаточно малого нормального давления нельзя предполагать, что давление  $p$  может предотвратить выпучивание по схеме рис. 259; если нормальное давление велико, то оно может вынудить пластинку выпучиться как защемленную. Эту важную задачу мы детально рассмотрим в следующем параграфе.



Рис. 259.

Изложенный в этом параграфе метод расчета напряженного состояния пластинок, находящихся под действием нормального давления и продольного сжатия, на основе линеаризированной теории прост и легко применим. Однако следует повторить, что в каждом

отдельном случае необходимо установить выполнение вышеупомянутых трех условий. Особенно важным является условие 3, требующее, чтобы  $\sigma_A < \sigma_{кр}$ ; следовательно, вычисление значения критического напряжения  $\sigma_{кр}$  обшивки всегда является необходимым.

### 130. Влияние нормального давления на критическую нагрузку прямоугольных пластинок

Так как эксцентриситет приложения осевой нагрузки или добавочные боковые нагрузки имеют неблагоприятное влияние на критическую силу прямого сжатого стержня, возникает вопрос, уменьшает ли нормальное давление, приложенное к свободно опертой на

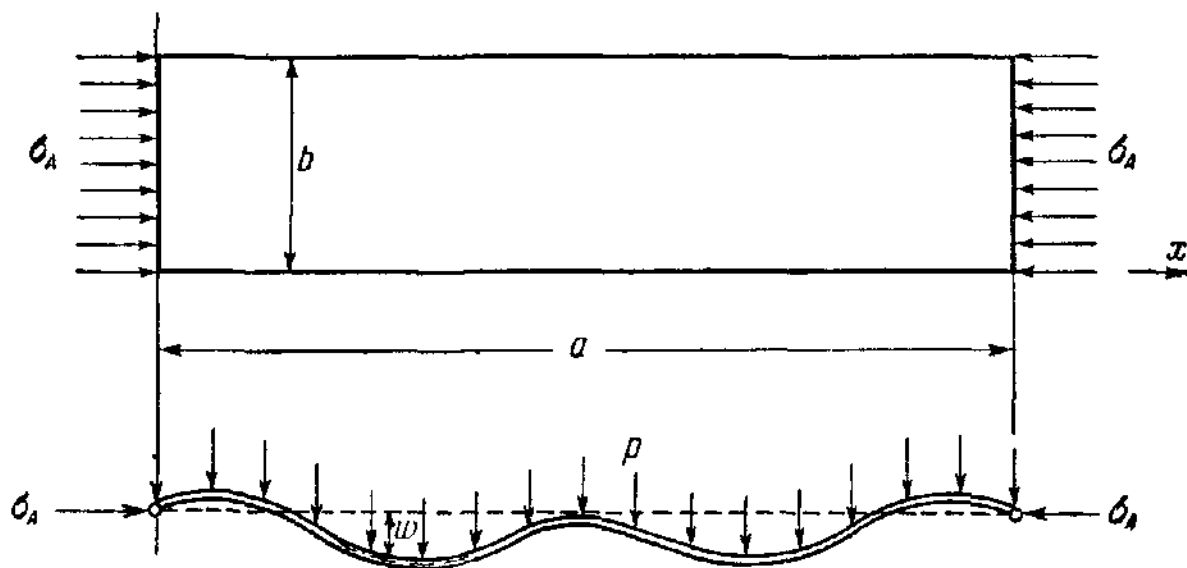


Рис. 260.

все четыре края пластинке, в более или менее значительной степени ее критическую нагрузку. В предыдущем параграфе указывалось, что послекритическое поведение пластинки существенно отличается от послекритического поведения прямого сжатого стержня и что действительная разрушающая нагрузка пластинки достигается при сжимающей нагрузке, значение которой может стать в несколько раз больше критической. Следовательно, имеется основание предположить, что действующий в пластинке специфический механизм, стабилизирующий равновесие в послекритическом состоянии, может также стабилизировать равновесие между внешними и внутренними силами нормально нагруженной пластинки, подверженной продольному сжатию, фактически задерживая момент начала ее выпучивания.

Для того чтобы определить условие устойчивости пластинки под действием вышеупомянутых нагрузок, необходимо основывать расчет на достаточно строгом решении основных нелинейных дифференциальных уравнений (864) и (865) теории больших прогибов и иссле-

довать последовательно изменяющиеся формы поверхности перемещения при различных условиях нагружения.

В недавно опубликованной статье Леви, Голденберг и Зибритоский<sup>1)</sup> привели результаты детального теоретического исследования поведения очень тонких свободно опертых прямоугольных пластинок с отношением длины к ширине, равным 4:1, находящихся под комбинированным действием нормального давления и продольного сжатия (рис. 260). Аналитическое исследование основывается на общем решении, приведенном в работе Леви о расчете пластинок с большими прогибами<sup>2)</sup>. Аппроксимируя прогиб  $w$  симметричным рядом Фурье с четырьмя подлежащими определению постоянными  $c_i$ :

$$w = c_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + c_3 \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + c_5 \sin \frac{5\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \\ + c_7 \sin \frac{7\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (955)$$

эти исследователи получили систему четырех совместных уравнений третьей степени, выражающую взаимосвязь между осевой и нормальной нагрузками и коэффициентами прогиба  $c_i$ . Решая эту систему уравнений специально разработанным методом, получим значения прогиба и среднюю продольную деформацию нагруженной пластинки. Исследование основывается на предположении об упругом поведении пластинки.

На основе трудоемких численных расчетов были получены следующие очень важные результаты.

«Нормальное давление значительно увеличивает критическую нагрузку. При наибольшем рассмотренном давлении теоретическое значение критической нагрузки в 3,1 раза больше критической нагрузки при нулевом нормальном давлении. Нормальное давление уменьшает эффективную ширину при значениях деформаций, меньших нормальной деформации выпучивания, и увеличивает эффективную ширину при деформациях, несколько больших нормальной деформации выпучивания. Однако в случае, если критическая нагрузка значительно превзойдена, нормальное давление увеличивает эффективную ширину менее чем на 1%. Для некоторых комбинаций нормального давления и осевой силы пластинка может иметь несколько положений равновесия. При таких условиях, в зависимости от предшествующей истории нагружения, возможно невыпученное или выпученное состояние пластинки.

«Значение осевой нагрузки, при котором имеет место выпучивание, равно  $\sigma_A = 3,84Et^3/b$  при  $p = 0$ ;  $\sigma_A = 4,05Et^3/b$  при  $p = 2,40Et^4/b^4$ ;  $\sigma_A = 8,56Et^3/b$  при  $p = 12,02Et^4/b^4$ ;  $\sigma_A = 11,84Et^3/b$  при  $p = 24,03Et^4/b^4$ ».

<sup>1)</sup> Levy S., Goldenberg D., Zibritosky G., Simply Supported Long Rectangular Plate under Combined Axial Load and Normal Pressure, NASA Tech. Note 949, 1944.

<sup>2)</sup> Леви, цит. выше, стр. 524.

В другой работе исследовалось поведение защемленных вдоль всех четырех краев пластинок<sup>1)</sup>. Для пластинок с отношением длины к ширине, равном 4:1, получены следующие результаты. Значение осевой нагрузки  $p$ , при котором впервые происходит выпучивание, равно  $\sigma_A = 6,4Et^3/p$  при  $p = 0$ ;  $\sigma_A = 6,8Et^3/b$  при  $p = 15,02Et^4/b^4$  и  $\sigma_A = 8,3Et^3/b$  при  $p = 37,55Et^4/b^4$ . Значение критической нагрузки при наибольшем нормальном давлении в 1,3 раза больше критической нагрузки при  $p = 0$ . Нормальное давление вызывает намного меньшее увеличение критической нагрузки защемленной пластинки, чем свободно опертой пластинки. Эти исследователи приходят к следующему заключению:

«Для малых значений осевых напряжений форма поверхности перемещения пластинки представляет собой одну длинную выпучину, которая по мере увеличения значений сжимающих напряжений преобразуется в поверхность с равномерными выпучинами. Начальный, направленный вниз прогиб пластинки, обусловленный нормальным давлением  $p$ , исчезает при больших значениях осевой нагрузки».

Влияние боковой нагрузки на критическую нагрузку пластинок было исследовано и экспериментальным путем, и, по крайней мере качественно, найдено хорошее соответствие с теоретическими результатами<sup>2)</sup>. Предполагаемые теоретические условия опирания на краях не могли быть точно реализованы. Опыты показали, что в случае больших значений отношения ширины к толщине пластинки  $b/t$  условия защемления краев приблизительно выполнялись, в то время как в случае малых значений отношения  $b/t$  степень заделки краев значительно отличалась от условия защемленных краев.

Цитированные выше теоретические исследования показывают, что критическая нагрузка прямоугольных пластинок значительно увеличивается при наличии достаточно больших нормальных нагрузок и что нормальное давление имеет большее влияние на свободно опертые пластинки, чем на защемленные. В связи с этим для пластинок днища возникает вопрос, достаточно ли велики нормальные нагрузки для того, чтобы оказывать заметное влияние на критическую нагрузку. Этот вопрос можно решить, исследуя величину прогибов пластинки. Увеличение критической нагрузки, по существу, обусловлено растягивающими мембранными напряжениями, вызванными изгибом пластинки, находящейся под действием нормальной нагрузки. Следовательно, можно ожидать, что величина этих прогибов связана с увеличением критической нагрузки. Это предположение вытекает из рис. 261, где для двух рассмотренных выше пла-

---

<sup>1)</sup> Corrick J. N., Levy S., Clamped Long Rectangular Plates under Combined Axial Load and Normal Pressure, NACA Tech. Note 1047, 194 .

<sup>2)</sup> Mc Pherson A. E., Levy S., Zibritsky G., Effect of Normal Pressure on Strength of Axially Loaded Sheet — stringer Panels, NACA Tech. Note 1041, 1946.



стинок приведены значения отношения критического напряжения  $\sigma_{кр}$  к критическому напряжению  $\sigma_{кр0}$  при  $p = 0$ . Значения этого отношения нанесены в функции от  $f/t$ . Обшивка корпуса представляет собой неразрезанную пластинку и под действием нормальной нагрузки ведет себя как защемленная пластинка; в § 128 было доказано, что прогиб такой обшивки корпусов кораблей не может превышать значения  $f/t = 0,4$ . Это значение прогиба настолько мало, что согласно рис. 261 увеличение критической нагрузки незначительно и не имеет практического значения.

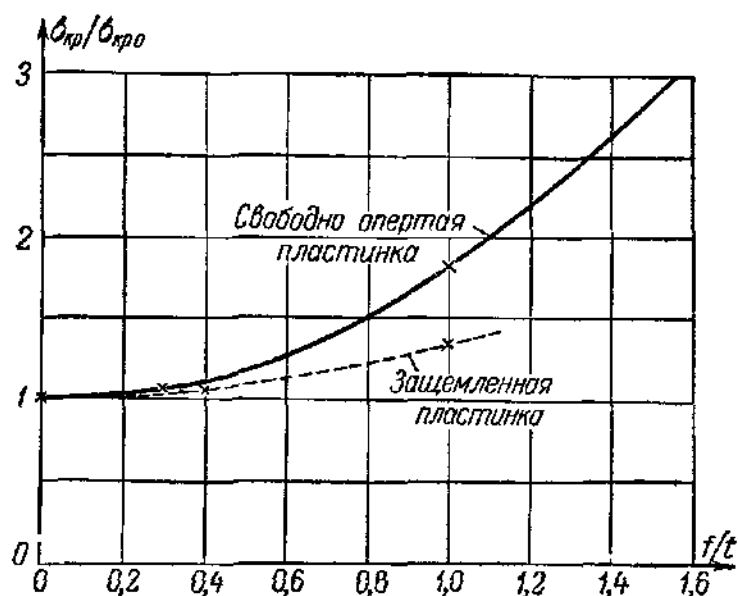


Рис. 261.

Вышеприведенное рассуждение дает также ответ на вопрос, упомянутый в конце предыдущего параграфа о том, выпучится ли неразрезная обшивка днища под действием нормальной нагрузки как защемленная или свободно опертая пластинка. Неразрезная пластинка под действием нормальной нагрузки изгибается как это показано на рис. 258. Если вследствие изгиба корпуса возникают

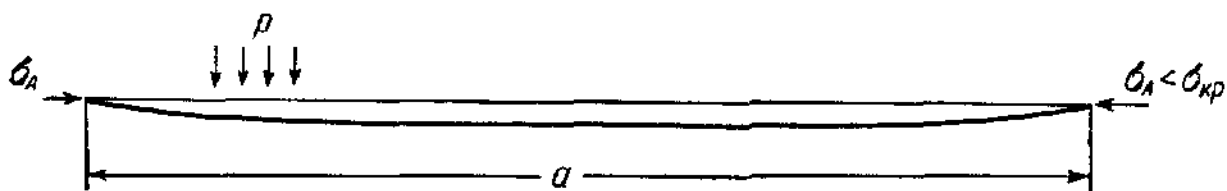


Рис. 262.

добавочные продольные сжимающие напряжения, то возникает возможность выпучивания. Вопрос заключается в том, может ли нормальная нагрузка предотвратить появление первой формы выпучивания, показанной на рис. 259 и вынудить пластинку выпучиваться как защемленную.

Фактически эта задача почти аналогична рассмотренной выше задаче выпучивания пластинки с отношением длины к ширине, равным 4:1. Под действием только нормальных нагрузок пластинка деформируется по одной полуволне, как это показано на рис. 262, где изображен продольный разрез изогнутой поверхности. При добавлении продольного сжатия деформация пластинки сохраняет свою форму в виде одной волны, пока не достигнута критическая нагрузка.

При значениях нагрузки выше критической в результате быстрого изменения типа деформации в окрестности значения критической нагрузки искривление происходит по пяти волнам, как это показано на рис. 263. Нормальная нагрузка не предотвращает появления обычной выпученной формы пластинки, но задерживает ее, повышая



Рис. 263.

значения критической нагрузки. Аналогичным образом можно ожидать, что нормальное давление, действующее на неразрезную пластинку, задерживает, но не предотвращает обычную форму выпучивания, изображенную на рис. 259. Зная, что прогиб неразрезной обшивки корпуса, показанной на рис. 258, не может превзойти величину  $f/t = 0,4$ , можно заключить, что мембранные напряжения будут снова малы и что значение критической нагрузки будет лишь немногим больше критической нагрузки пластинки, не подверженной действию нормального давления.

Следовательно, целесообразно вычислить значение критической нагрузки внешней обшивки корпуса в предположении полного отсутствия нормального давления. Этот вывод относится также к пластинкам, составляющим часть двойных или тройных днищ. Устойчивость этих пластинок должна быть исследована при помощи метода, данного в § 118, без учета влияния нормального давления.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Балка двутавровая 104, 142  
 — сплошная 424  
 Бифуркация состояния равновесия 21, 34, 84, 225, 252, 257  
 Блейха метод 223  
 Брайана формула 357  
 $\beta$ -кривые 58  
 Вариация первая 112  
 — функции 111  
 Венцеля теория ферм 199  
 Вестергорга и Осгуда метод 48  
 Влияние касательного напряжения на критическую силу 38  
 — формы поперечного сечения на прочность 60  
 Выпучивание антисимметричное 291  
 — боковое 40, 64, 125, 173, 178, 189  
 — изгибно-крутильное 124  
 — крутильное 115, 161  
 — местное 124, 336, 417  
 — основное 124, 418  
 — пластинок 428  
 — поясов 269  
 — рам 254, 281  
 — симметричное 290, 297  
 — стенок 437  
 — стержней 15  
 — — неупругое 22  
 — — упругое 18  
 — элементов решетки 275  
 Гибкость стержня 21  
 Гипербола Эйлера 30  
 Гипотеза Навье 126, 136  
 Гудьера теория 135  
 Двутавр 142, 374, 383  
 Деформация 136  
 Дефект случайный 71  
 Деформация средняя 506  
 Диаграмма напряжения — деформации 25, 145, 253  
 Длина приведенная (свободная) стержня 22, 392  
 Значение характеристическое 78  
 Изгиб пластический 253  
 Ильюшина теория 345, 387  
 «Искажение единичное» 122  
 Исчисление вариационное 108  
 Каппуса теорема 123  
 Кармана и Хвалла метод 42  
 Коэффициент безопасности 68, 71  
 — геометрической формы ( $\mu$ ) 61  
 — заделки 353, 366, 383, 474  
 — Пуассона 39, 135, 158, 345  
 — увеличения прогиба 529  
 — устойчивости 227, 359, 364, 406, 413, 418, 440, 448, 476  
 Кривая критического напряжения стержня 30, 36  
 Критерий жесткостей 245  
 — неустойчивости (выпучивания) 21  
 — рядов Лундкунста 245  
 — устойчивости 76  
 — экстремума 109  
 — энергетический 84  
 Лундкунста и Флигга теорема 123  
 — рядов критерий 245  
 Маргерра теория 506  
 Метод Блейха 223  
 — Вестергорга и Осгуда 48  
 — Кармана и Хвалла 42  
 — конечных разностей 76, 104  
 — множителя Лагранжа 85, 93, 109, 434  
 — последовательных приближений 77, 98, 221, 303  
 — — — Хоффа 246  
 — распределения моментов 223, 241  
 — Ритца 76, 85, 88, 120, 177, 323, 429  
 — Рэлея 93  
 — Стадола — Вианелло 98  
 — Тимошенко 85, 91  
 — Треффца 85  
 — энергетический 84, 302  
 Модуль касательный 23, 25  
 — упругости, постоянство его 21  
 — эффективный (приведенный) 26, 190, 221, 390  
 Момент статический 26  
 Навье гипотеза 126, 136  
 Нагрузка выпучивания 22  
 — тангенциально-модульная 31  
 Напряжение касательное, влияние его на критическую силу 38  
 — критическое 22  
 — мембранное 347, 500  
 — фибровое 58, 439, 504  
 Область выпучивания упругая 21  
 Обшивка корабля 468  
 Ортогональность, условие ее 80, 83  
 Перемещение виртуальное 85  
 Планка соединительная 210  
 Пластика 336  
 —, прочность предельная ее 520  
 — прямоугольная 395  
 Предел упругости 16  
 Принцип виртуальной работы 85  
 Пуассона коэффициент 39, 135, 158, 345  
 Равновесие неустойчивое 20  
 Радиус инерции эквивалентный 151, 163  
 Рама прямоугольная 201, 281, 287  
 — — многоэтажная 291

- Рама, устойчивость ее 220  
 Раскос 209  
 Ребро жесткости 395  
 Решение характеристическое 19  
 Ритца метод 76, 85, 88, 120, 177, 323, 429  
 Рэлея метод 93  
 Ряд Фурье 82  
 — — двойной 83, 96
- Сен-Венана теория кручения 126, 137  
 Сечение коробчатое 367, 369, 383  
 — крестообразное 384  
 — тавровое 378, 383  
 — Т-образное 141  
 — швеллерное 141, 374  
 — ячеистое 481  
 — U-образное 384, 521  
 — Z-образное 144, 376  
 Сила критическая 19, 22  
 Система ортогональных функций 81  
 — рамная со сдвигающимися узлами 249  
 Соединение внахлестку 493  
 Соотношения геометрические уравнений устойчивости 230  
 Стержень, гибкость его 21  
 —, нагруженный поперечно 40  
 — несимметричный с прямыми поясами 216  
 —, опертый жестко 310  
 —, — упруго 308, 316  
 — переменной жесткости 193  
 — рамный 201  
 — решетчатый 195, 210  
 —, раскосы его 209  
 —, сжатый внецентренно 15, 42, 63  
 Стержень, сжатый центрально 15, 300  
 — симметричный 214, 216  
 — с начальной кривизной 57  
 — составной 193, 206, 213  
 — с перфорированными пластинами 195  
 Стодола — Визанелло метод 98  
 Стоуэлла теория 345, 389
- Таблица коэффициентов уравнения четырех моментов 231, 240  
 Теорема Каппуса 123  
 — Луидкуиста и Флигга 123  
 — о стационарном значении потенциальной энергии 84, 123, 149, 163, 177, 324, 428  
 Теория Гульера 135  
 — двойного модуля Энгессера 17, 24, 146  
 — Ильюшина 345, 387  
 — касательного модуля Энгессера 22, 29, 153, 163, 190, 226, 386  
 — кручения Сен-Венана 126, 137  
 — линеаризованная 527, 531  
 — Маргерра 506  
 — неупругого поведения стержня Шэнли 31, 196  
 — поля диагональных напряжений 464  
 — Стоуэлла 345, 389  
 — устойчивости пластинок 83  
 — ферм Венцеля 199  
 Тимошенко метод 85, 91
- Тимошенко уравнение 185  
 Треффца метод 85
- Уголок 140, 379, 384  
 Упрочнение 37  
 Уравнение равновесия 236  
 — Тимошенко 185  
 — трех моментов 229, 265, 309  
 — упругой линии деформированного состояния 18, 20  
 — характеристическое 311  
 — частот 79  
 — четырех моментов 221, 227, 482  
 — —, таблица коэффициентов его 231, 240  
 — Эйлера 110, 113, 163, 473  
 Уравнения устойчивости 224, 236, 280  
 Условие граничное (конечное) 77, 117  
 — ортогональности 80, 83, 324  
 — устойчивости 76  
 Устойчивость, аналитическое исследование ее 76  
 — пластинок 83  
 — рам 220, 263  
 — сжатых элементов ферм 264
- Ферма полураскосная, стойки в ней 279  
 Форма выпучивания 90  
 — колебаний главная 79  
 Формула Брайана 357  
 — секанса 61, 254  
 — Эйлера 16, 19  
 — — обобщенная 23, 307  
 — Энгессера 304, 315, 327  
 Функция координатная 88, 324, 534  
 — пластичности 346  
 — характеристическая 79, 90, 324  
 Фурье ряд 82  
 — — двойной 83
- Хоффа последовательных приближений метод 246
- Шарнир упруго-пластический 32  
 Швеллер 141, 374, 384  
 Шэнли неупругого поведения стержня теория 31, 196
- Эйлера гипербола 30  
 — уравнения 110, 113, 163  
 — формула 16, 19  
 — — обобщенная 23, 307  
 Эксцентриситет относительный 55  
 — эквивалентный 55  
 Элемент пластинчатый 336, 381  
 Энгессера двойного модуля теория 17, 24, 146  
 — касательного модуля теория 22, 29, 153, 163, 190, 226  
 — формула 304, 315, 327  
 Энергия деформации 85, 126, 145, 166, 178, 197, 330, 429, 438  
 — потенциальная 86, 125, 144, 162, 167, 177, 331, 429, 438, 452, 473, 532